This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

First Series, 8 vols 1850 – 54 8vo
[Second Series] Annals 7 vols 1858 – 1865 } do
[Third Series] " 2 ser vols 1 – 10 1867 – 82 }

Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest

aib

Mathematics
QA
1
.A6134

First Series, 8 vols 1850 – 54 8vo
[Second Series] Annals 7 vols 1858 – 1865 } do
[Third Series] " 2 ser vols 1 – 10 1867 – 82 }

Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest

ait

ANNALI

DI

SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE

1850

ANNALI

DI SCIENZE

MATEMATICHE E FISICHE

COMPILATI

DA

BARNABA TORTOLINI

Professore di Calcolo Sublime all'Università Romana,
Uno dei Quaranta della Società Italiana
delle Scienze

TOMO PRIMO

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI

1850

ANNALI
DI SCIENZE
MATEMATICHE E FISICHE

SOPRA LE SUPERFICIE PARALLELE, ED APPLICAZIONE DI QUESTA TEORICA ALL'ELLISSOIDE.

RICERCHE

DI BARNABA TORTOLINI

1.° Una superficie curva parallela ad un altra superficie data può definirsi l'Inviluppo di una sfera di raggio costante, della quale il centro sia costretto a restare sopra la superficie data. Questa definizione è somigliante a quella di due curve piane parallele. Diversi Geometri hanno richiamato ad esame tanto le curve, quanto le superficie parallele. Il Lotteri fin dall' anno 1792 pubblicò in Pavìa una Memoria sopra le curve parallele piane, e circa lo stesso tempo comparvero le Memorie del Kaestner negli atti di Gottinga, e del Cagnazzi di Napoli. Negli Annali di Matematica del Sig. Terquem per l' anno 1844 trovasi una Memoria del Sig. Breton di Champ sulle curve parallele all'ellisse, ove il Sig. Terquem in una sua nota fa osservare che il Sig. Reiss di Gottinga in una dissertazione pubblicata fin dal 1826 sotto il titolo *De Lineis et superficibus aequidistantibus* trovansi tutte le formole differenziali relative alle linee, e superficie parallele. Quantunque non sia a mia cognizione la citata dissertazione, faccio nondimeno osservare che un gran numero di formole differenziali sopra le linee, e superficie parallele fu già dato fin dal 1811 dal Sig. prof. Bordoni

Recess. 12-16-29 T.E.N. ⊙ 3-19-07 G.L.

186285

di Pavia in una Memoria presentata alla Società Italiana, e pubblicata quindi nel 1813 nel tomo 16 degli atti della stessa Società. Richiamerò quì brevemente alcune formole generali, sopra le superficie parallele, date dal Sig. Bordoni, le quali applicate per ora all'ellissoide somministreranno una nuova, ed elegante rappresentazione dei trascendenti ellittici.

2.° Sia

$$f(x, y, z) = u = 0$$

l'equazione della superficie data, ed

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = k^2$$

l'equazione della sfera di raggio k. Per ottenere l'equazione della superficie parallela, od in altri termini per avere l'equazione della nuova superficie, inviluppo della sfera di raggio k della quale il centro sia costretto a restare sopra la superficie $u=0$, converrà differenziare relativamente ad x, ed y ed eliminare fra le due equazioni corrispondenti le derivate parziali.

$$\frac{dz}{dx} = z' \,, \qquad \frac{dz}{dy} = z_{,}$$

per ciò indicando con $D_x u$, $D_y u$, $D_z u$ le derivate parziali dell' equazione $u = 0$, avremo dalle due precedenti formole

$$D_x u + D_z u \,.\, z' = 0 \,, \qquad D_y u + D_z u \,.\, z_{,} = 0$$

$$(X - x) + (Z - z) z' = 0 \,, \quad Y - y + (Z - z) z_{,} = 0$$

ed eliminando z', e $z_{,}$ si ha

$$\frac{X - x}{D_x u} = \frac{Y - y}{D_y u} = \frac{Z - z}{D_z u}$$

Equazioni della normale alla superficie curva nel punto (x, y, z). come richiede la natura del problema. I valori poi delle X,Y,Z si ottengono in funzione delle x, y, z, quando si aggiunga alle precedenti equazioni il loro valor comune, vale a dire

$$\frac{X - x}{D_x u} = \frac{Y - y}{D_y u} = \frac{Z - z}{D_z u} = \frac{k}{\sqrt{[(D_x u)^2 + (D_y u)^2 + (D_y u)^2]}}$$

d'onde

$$X = x + \frac{kD_x u}{\sqrt{[(D_x u)^2 + (D_y u)^2 + (D_z u)^2]}}$$

$$Y = y + \frac{kD_y u}{\sqrt{[D_x u)^2 + (D_y u)^2 + (D_z u)^2]}}$$

$$Z = z + \frac{kD_z u}{\sqrt{[(D_x u)^2 + (D_y u)^2 + (D_z u)^2]}}$$

I secondi membri si possono sempre immaginare ridotti a due variabili, eliminate le quali otterremo l'equazione della superficie parallela fra le coordinate X, Y, Z. I medesimi valori poi appartengono alla superficie parallela esterna alla data. Quando l'equazione della superficie data sia risoluta relativamente ad una delle coordinate z, allora $u = 0$ diviene

$$z - f(x, y) = u = 0$$

e per ciò

$$D_z u = -z' = -p, \quad D_y u = -z_{,} = -q, \quad D_z u = 1,$$

ed i recedenti valori divengono

$$X = x - \frac{kp}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$$

$$Y = y - \frac{kq}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$$

$$Z = z + \frac{k}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$$

Prima di venire ad altre formole generali facciamo qualche applicazione delle precedenti.

3.° Sia l'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = u = 0$$

avremo

$$D_x u = \frac{2x}{a^2}, \quad D_y u = \frac{2y}{b^2}, \quad D_z u = \frac{2z}{c^2}$$

per ciò l'equazioni della normale sono

$$\frac{a^2(X - x)}{x} = \frac{b^2(Y - y)}{y} = \frac{c^2(Z - z)}{z}$$

alle quali si deve aggiungere

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=k^2$$

Per conoscere le definitive equazioni delle quali la risultante rappresenti l'equazione della superficie parallela all'ellissoide, si chiami m il valore comune delle tre frazioni simmetriche in modo da essere

$$\frac{a^2(X-x)}{x}=\frac{b^2(Y-y)}{y}=\frac{c^2(Z-z)}{z}=m$$

otterremo

$$x=\frac{a^2X}{a^2+m}\ ;\quad y=\frac{b^2Y}{b^2+m}\ ,\quad z=\frac{c^2Z}{c^2+m}$$

dalle quali

$$X-x=\frac{mX}{a^2+m},\quad Y-y=\frac{mY}{b^2+m},\quad Z-z=\frac{mZ}{c^2+m}$$

Sostituiti questi valori nelle equazioni dell' ellissoide, e della sfera si avrà

$$\frac{a^2X^2}{(a^2+m)^2}+\frac{b^2Y^2}{(b^2+m)^2}+\frac{c^2Z^2}{(c^2+m)^2}=1$$

$$\frac{m^2X^2}{(a^2+m)^2}+\frac{m^2Y^2}{(b^2+m)^2}+\frac{m^2Z^2}{(c^2+m)^2}=k^2.$$

L'eliminazione di m fra queste due equazioni porgerà l'equazione della superficie parallela all'ellissoide, ma questa eliminazione condurrebbe ad operazioni algebriche assai lunghe, che noi ci dispensiamo di eseguire. Le precedenti formole sono analoghe a quelle che s'incontrano per le curve parallele all'ellisse: infatti le due equazioni si ridurranno ad

$$\frac{a^2X^2}{(a^2+m)^2}+\frac{b^2Y^2}{(b^2+m)^2}=1,\quad \frac{m^2X^2}{(a^2+m)^2}+\frac{m^2Y^2}{(b^2+m)^2}=k^2$$

Qui l'eliminazione della m conduce ad un'equazione di ottavo grado come ha ritrovato il Sig. Catalan nel tom. 3.° degli Annali di Matematica del sig. Terquem pag. 553. La curva parallela all'ellisse si chiama dai Geometri *Toroide*, e la sua teorica analitica fu data dal Sig. Cauchy nel 1841 nei *Comptes Rendus* 2° semestre pag. 1062.

4.° Come già si è praticato in altre Memorie determiniamo i valori delle coordinate X, Y, Z per le coordinate x, y, z dell'ellissoide. A questo oggetto osservando, che per le derivate parziali p, q, si ha

$$\frac{dz}{dx}=p=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}\,,\quad \frac{dz}{dy}=q=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$$

e ponendo

$$P=\sqrt{(b^4c^4x^2+a^4c^4y^2+a^4b^4z^2)}$$

avremo dalle formole ultime pel parag. 2.°

$$X=x+\frac{kb^2c^2z}{P}\,,\quad Y=y+\frac{ka^2c^2y}{P}\,,\quad Y=z+\frac{ka^2b^2z}{P}\,.$$

Questi valori delle coordinate X, Y, Z si potranno sempre immaginare ridotti a funzioni di due variabili, eliminate le quali si giungerebbe ad un'equazione fra le coordinate X, Y, Z appartenente alla nuova superficie. Nelle applicazioni giova per l'ellissoide di far uso della sostituzione sferica

$$x=a\cos\varphi\,,\quad y=b\,\mathrm{sen}\varphi\cos\omega\,,\quad z=c\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\omega\,,$$

per ciò fatto

$$P_1^2=b^2c^2\cos^2\varphi+a^2c^2\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\omega+a^2b^2\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\omega$$

avremo

$$X=a\cos\varphi+\frac{kbc\cos\varphi}{P_1}$$

$$Y=b\,\mathrm{sen}\varphi\cos\omega+\frac{kac\,\mathrm{sen}\varphi\cos\omega}{P_1}$$

$$Z=c\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\omega+\frac{kab\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\omega}{P_1}$$

In queste tre espressioni si trova compresa l'equazione alla nuova superficie coll'eliminazione degli angoli polari φ, ω. Esse possono utilmente adoprarsi nella risoluzione di qualche problema di Calcolo Integrale, ed appartengono alla superficie parallela, ed esterna.

5.° Si riprendano ora i valori generali delle X, Y, Z co' quali termina il parag. 2.°, e cerchiamo in una superficie curva qualunque l'espressione della quadratura per la sua superficie

parallela. Riteniamo primieramente per le derivate parziali di primo ordine

$$p=\frac{dz}{dx}\,,\quad q=\frac{dz}{dy}$$

ed i valori sono

$$X=x-\frac{kp}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$$

$$Y=y-\frac{kq}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$$

$$Z=z+\frac{k}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$$

Considerando la Z come funzione delle X, Y, l' espressione generale per la quadratura delle superficie è

$$S=\int\int dX\,dY\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dZ}{dX}\right)^2+\left(\frac{dZ}{dY}\right)^2\right\}}$$

Le coordinate X, Y, Z potranno immaginarsi ridotte a funzioni di due sole variabili x, y, quindi è che rappresentando per X', Y', Z' le derivate relative ad x, e per $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$ le derivate relative ad y, e ponendo per brevità

$$U=X'Y_{,}-X_{,}Y',\quad V=X'Z_{,}-X_{,}Z',\quad W=Y_{,}Z'-Y'Z_{,}$$

avremo dalla trasformazione degli integrali multipli

$$S=\int\int dx\,dy\sqrt{(U^2+V^2+W^2)}$$

Ciò posto sia per le derivate parziali di secondo ordine

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=r\,,\quad \frac{d^2z}{dy^2}=\frac{dq}{dy}=t\,,\quad \frac{d^2z}{dx\,dy}=\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}=s$$

le derivate X', . . . $X_{,}$ . . . saranno

$$X'=1-\frac{k[(1+q^2)r-pqs]}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

$$X_{,}=-\frac{k[(1+q^2)s-pqt]}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

$$Y' = -\frac{k[(1+p^2)s - pqr]}{\sqrt{(1+p^2+y^2)^3}}$$

$$Y_{,} = 1 - \frac{k[(1+p^2)t - pqs]}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

$$Z' = p - \frac{k(pr+qs)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

$$Z_{,} = q - \frac{k(ps+qt)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

Formiamo ora co' valori dei secondi membri le differenze dei prodotti indicate da U, V, W, e sia di più

$$R = 1 - \frac{k[(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs]}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} + \frac{(rt-s^2)k^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

otterremo

$$U = R\,, \quad V = qR\,, \quad W = pR$$

per ciò la formola per le quadrature diviene

$$S = \int\int R\, dxdy \sqrt{(1+p^2+q^2)}$$

Questa formola fra le altre si trova nella citata Memoria del Sig. Bordoni. Pongasi per brevità

$$Q = (1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs$$

si avrà

$$S = \int\int dxdy\sqrt{(1+p^2+q^2)} - k\int\int \frac{Qdxdy}{(1+p^2+q^2)}$$
$$+ k^2\int\int \frac{(rt-s^2)dxdy}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

Di qui si trae che la quadratura delle superficie parallela viene misurata e per la quadratura della superficie primitiva, e per due altre quadrature una delle quali potrà ricevere in alcune particolari superficie un valore generale, e costante. Negli ultimi due integrali i coefficienti di $dxdy$ sotto i segni $\int\int$ sono funzioni delle derivate di primo, e di second' ordine della z, ed hanno anche una dipendenza dai raggi di curvatura prin-

cipale in un punto (x, y, z) della superficie data. L'equazione di secondo grado che somministra i due raggi di curvatura principale è come si conosce

$$\rho^2 - \frac{Q\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{rt-s^2}\rho + \frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2} = 0$$

Uno dei casi più notabili è di supporre che in ciascun punto della superficie data i raggi di curvatura principale sieno eguali, e di segno contrario il che da $Q = 0$, ossia

$$(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs = 0.$$

L' integrale di quest' equazione a differenze parziali è di una forma assai complicata, e fu dato da Monge, e Legendre. Cercando di più per mezzo del calcolo delle variazioni la supercie terminata ad un dato contorno, e di cui l'area sia un minimo si trova la stessa equazione a differenze parziali: infine limitando la ricerca alle superficie gobbe a piano direttore si giunge a riconoscere che la proprietà del minimo appartiene alla sola *Elicoide*, come ha dimostrato il Sig. Catalan (*): aggiungiamo che un nuovo sviluppo dell'integrale della stessa equazione fù in questi ultimi tempi dato dal sig. Mich. Roberts di Dublino nel tomo 11° del giornale del sig. Liouville. Che se si verificasse

$$rt - s^2 = 0$$

la superficie primitiva sarebbe *sviluppabile*, ed il valore della quadratura S risulterà come nel precedente caso di due soli integrali duplicati.

6.° Nel caso generale lo stesso integrale che serve di coefficiente a k^2 rappresenta la somma degli elementi di una superficie divisi per il prodotto dei raggi di curvatura principale corrispondenti a questi elementi. Esso si presentò fin dagli anni 1815 e 1816 ai Sigg. Binet, e Rodriguez nel tomo III della Corrispondenza della scuola politecnica, ed in questi ultimi anni il sig. Ossian Bonnet ebbe occasione di riprenderlo ad

(*) Journal de l'École polytec. Cah. 27, pag. 128.

esame in una Memoria inscrita nel fascicolo 32° del giornale della scuola politecnica. I due raggi ρ', ρ'' di curvatura principale danno

$$\rho'\rho''=\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}$$

di qui si trae

$$\int\int\frac{(rt-s^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}=\int\int\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{\rho'\rho''}$$

Il Sig. Rodriguez fa osservare che quando la superficie sia chiusa, e di una curvatura uniforme come si ha per esempio nell'ellissoide, il valore di quest'integrale esteso a tutta la superficie sarà 4π. Il medesimo sig. Rodriguez vi giunge con un metodo analitico, che è ben di conoscere. Considerando le derivate parziali come funzioni di x, y è chiaro che all'elemento $\mathrm{d}p\mathrm{d}q$ si dovrà sostituire il nuovo elemento

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(rt-s^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

quindi potremo avere entro dati limiti

$$\int\int\frac{(rt-s^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}=\int\int\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

Sieno ora u, v i coseni degli angoli formati dalla retta normale alla superficie nel punto (x, y, z) cogli assi delle x, e delle y, sarà

$$p=-\frac{u}{\sqrt{(1-u^2-v^2)}}\,,\quad q=-\frac{v}{\sqrt{(1-u^2-v^2)}}$$

Volendo pertanto esprimere l' integrale duplicato per mezzo delle nuove variabili u, v, allora all' elemento $\mathrm{d}p\mathrm{d}q$ dovremo sostituire il nuovo elemento

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}v}-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(1-u^2-v^2)^2}$$

e per ciò

$$\int\int\frac{(rt-s^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}=\int\int\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\sqrt{(1-u^2-v^2)}}$$

L'integrale del secondo membro rappresenta evidentemente un' area sferica di raggio 1, d'onde per una superficie chiusa, e di uniforme curvatura esteso a tutta la sfera sarà

$$\int\int \frac{(rt - s^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} = 4\pi$$

Questo risultamento costituisce anche uno dei teoremi trovati dal Sig. Gauss sulla curvatura delle superficie, e ci potrà esser molto utile nelle applicazioni che siamo per fare per la quadratura delle superficie parallele.

7.° Consideriamo di nuovo l'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

avremo per le derivate parziali p, q, r, s, t

$$p = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{b^2}{c^2}\frac{y}{z}, \quad s = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$$

$$r = -\frac{c^2(a^2z^2 + c^2x^2)}{a^4z^3}, \quad t = -\frac{c^2(b^2z^2 + c^2y^2)}{b^4z^3}$$

Di qui si trova

$$Q = (1+p^2)\,t + (1+q^2)r - 2pqs$$

$$= -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}\left(a^2 + b^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right)$$

$$\sqrt{(1+p^2+q^2)} = \frac{c^2}{z}\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}, \quad rt - s^2 = \frac{c^6}{a^2b^2z^4}$$

Sostituendo questi valori nella formola generale della quadratura riportata nel parag. 5.°, e fatto inoltre

$$P = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}}$$

otteniamo per la quadratura della superficie parallela all'ellissoide

$$S = c^2\int\int\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{zP} + \frac{k}{a^2b^2}\int\int\frac{P^2[a^2+b^2+c^2-(x^2+y^2+z^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$$

$$+ \frac{k^2}{a^2b^2}\int\int\frac{P^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$$

Il primo degli integrali esteso a tutta la superficie rappresenta l' area ellissoidica di semiassi a, b, c e il terzo, per quanto è stato detto nell'antecedente parag. 6.°, e come avremo occasione di verificare sarà un'area sferica di raggio k, il secondo poi si potrà anche ridurre ad una nuova area ellissoidica. Per conoscere prontamente queste diverse proprietà, trasformiamo come sopra in coordinate sferiche le x, y, z, cioè sia

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\,\mathrm{sen}\varphi\cos\omega, \quad z = c\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\omega$$

allora all' elemento $dxdy$ dovrà sostituirsi il nuovo elemento

$$ab\,\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}\omega\,d\varphi d\omega,$$

d'onde facendo

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\omega + c^2\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\omega$$

$$\rho^2 = b^2c^2\cos^2\varphi + a^2c^2\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\omega + a^2b^2\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\omega$$

ed integrando entro i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$ si avrà per l'intera quadratura della superficie parallela all'ellissoide

$$S = 8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho\,\mathrm{sen}\varphi d\varphi d\omega + 8k^2a^2b^2c^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{sen}\varphi\,d\varphi d\omega}{\rho^3}$$

$$+ 8kabc\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(a^2 + b^2 + c^2 - \rho_1^2)\mathrm{sen}\varphi d\varphi d\omega}{\rho^2}$$

Pel secondo degli integrali abbiamo come è noto

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{sen}\varphi d\varphi d\omega}{\rho^3} = \frac{\pi}{2a^2b^2c^2}$$

e per ciò si ridurrà ad una superficie sferica S_2 di raggio k, mentre il primo rappresenta la superficie ellissoidica S_1 di semiassi a, b, c, e ponendo per l'ultimo

$$T = 8abc\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(a^2 + b^2 + c^2 - \rho_1^2)\mathrm{sen}\varphi d\varphi d\omega}{\rho^2}$$

avremo

$$S = S_1 + S_2 + kT$$

Il prodotto kT da quanto siamo per esporre si ridurrà all'area di una ellissoide, della quale i quadrati dei semiassi sieno

$$\frac{2kbc}{a}, \frac{2kac}{b}, \frac{2kab}{c}$$

Di più esso ha una relazione notabile colle attrazioni A, B, C esercitate da una ellissoide sopra un punto interno.

8.° Si sostituisca pertanto il valore di ρ_1^2, e si moltiplichi il trinomio $a^2 + b^2 + c^2$ per l'unità determinata dall'equazione

$$\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\omega = 1$$

il valore di T si potrà porre sotto la forma

$$T = \frac{8a(b^2+c^2)}{bc}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{b^2c^2\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi d\omega}{\rho^2}$$

$$+ \frac{8b(a^2+c^2)}{ac}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{a^2c^2\operatorname{sen}^3\varphi\cos^2\omega d\varphi d\omega}{\rho^2}$$

$$+ \frac{8c(a^2+b^2)}{ab}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{a^2b^2\operatorname{sen}^3\varphi\operatorname{sen}^2\omega d\varphi d\omega}{\rho^2}$$

Sieno presentemente a_1, b_1, c_1 le coordinate di un punto interno nell'ellissoide di semiassi a, b, c, le attrazioni esercitate sopra questo punto parallelamente agli assi delle x, y, z, sono

$$A = 8a_1\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{b^2c^2\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi d\varphi d\omega}{\rho^2}$$

$$B = 8b_1\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{a^2c^2\operatorname{sen}^3\varphi\cos^2\omega d\varphi d\omega}{\rho^2}$$

$$C = 8c_1\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{a^2b^2\operatorname{sen}^3\varphi\operatorname{sen}^2\omega d\varphi d\omega}{\rho^2}$$

e per ciò

$$T = \frac{a(b^2+c^2)A}{a_1bc} + \frac{b(a^2+c^2)B}{b_1ac} + \frac{c(a^2+b^2)C}{c_1ab}$$

Le attrazioni A, B, C si esprimendosi, come è noto, in funzioni ellittiche di prima, e seconda specie, anche l'integrale definito T sarà espresso per tali funzioni. Facendo uso della notazione di Legendre, sia h il modulo e μ l' ampiezza delle funzioni ellittiche di prima, e seconda specie, e pongasi per esse

$$F(h, \mu)=\int_0^{\mu}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-h^2\operatorname{sen}^2\theta)}}, \quad E(h, \mu)=\int_0^{\mu}d\theta\sqrt{(1-h^2\operatorname{sen}^2\theta)}$$

e sia a il più grande dei semiassi, b, il medio, c il minimo, quindi prendendo per il modulo h e l'ampiezza μ

$$h^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad \cos\mu=\frac{c}{a}$$

i valori generali dei rapporti delle attrazioni A, B, C alle coordinate del punto attratto sono (*Poisson, Memoires de l'Instit. tom.* 13, *pag.* 522.)

$$\frac{A}{a_1}=\frac{4\pi abc}{(a^2-b^2)\sqrt{(a^2-c^2)}}\Big(F(h, \mu)-E(h, \mu)\Big)$$

$$\frac{B}{b_1}=\frac{4\pi abc}{(a^2-b^2)\sqrt{(a^2-c^2)}}\left(\frac{(a^2-c^2)E(h, \mu)}{b^2-c^2}-F(h, \mu)\right)-\frac{4\pi c^2}{b^2-c^2}$$

$$\frac{C}{c_1}=\frac{4\pi b^2}{b^2-c^2}-\frac{4\pi abc\,E(h, \mu)}{(b^2-c^2)\sqrt{(a^2-c^2)}}$$

Moltiplicando ora i primi, e secondi membri respettivamente per le quantità

$$\frac{a(b^2+c^2)}{bc}, \quad \frac{b(a^2+c^2)}{ac}, \quad \frac{c(a^2+b^2)}{ab}$$

e sommando verrà facilmente

$$T=\frac{4\pi bc}{a}+4\pi\left(\frac{c.^2F(h, \mu)}{\sqrt{(a^2-c^2)}}+\sqrt{(a^2-c^2)}.E(h, \mu)\right)$$

ove sostituendo $c=a\cos\mu$ e moltiplicando per k, sarà

$$kT=\frac{4\pi kbc}{a}+\frac{4\pi ak}{\operatorname{sen}\mu}\Big(\cos^2\mu\,F(h, \mu)+\operatorname{sen}^2\mu\,.\,E(h, \mu)\Big)$$

Il secondo membro di questa equazione proveniente dall'indicata somma rappresenta un'area ellissoidica della quale i quadrati dei semiassi sono

$$\frac{2kbc}{a}, \quad \frac{2kac}{b}, \quad \frac{2kha}{c}$$

Infatti se α, β, γ sieno i semiassi di un ellissoide, ove γ sia il minimo, β il medio, ed α il massimo, si avrà per l'area ellissoidica M l'espressione già data da Legendre

$$M = 2\pi\gamma^2 + \frac{2\pi\alpha\beta}{\operatorname{sen}\mu}\left(\cos^2\mu\, F(h, \mu) + \operatorname{sen}^2\mu\, E(h, \mu)\right)$$

L'ampiezza μ, ed il modulo h sono determinati dalle formole

$$\cos\mu = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad h^2 = \frac{\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)}{\beta^2(\alpha^2 - \gamma^2)}$$

Ora per la supposizione di sopra fatta $a > b > c$ prenderemo

$$\gamma^2 = \frac{2kbc}{a}, \quad \beta^2 = \frac{2kac}{b}, \quad \alpha^2 = \frac{2kab}{c}$$

ed i valori di h, μ porgono

$$\cos\mu = \frac{c}{a}, \quad h^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$$

i quali essendo identici a quei che si presentano nelle attrazioni A, B, C ne segue che il prodotto k^4T rappresenta la quadratura S_3 di una nuova ellissoide: dunque per la quadratura della superficie parallela all'ellissoide si ha

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

ove S_1 è l' ellissoide di semiassi a, b, c, ed S_2 la sfera di raggio k. In altri termini la superficie parallela all'ellissoide di semiassi a, b, c è eguale alla somma delle tre superficie determinate dall'equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = k, \quad \frac{x^2}{\left(\frac{2kbc}{a}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{2kac}{b}\right)} + \frac{z^2}{\left(\frac{2kab}{c}\right)} = 1$$

Aggiungiamo che l'area della nuova ellissoide è eguale anche all'area della superficie di quarto ordine

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2k(ax^2+by^2+cz^2)$$

Essa rappresenta in ottica la *superficie di elasticità*, e sarà anche il luogo geometrico della proiezione ortogonale del centro dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{2ka}+\frac{y^2}{2kb}+\frac{z^2}{2kc}=1$$

su i piani tangenti.

9.° Il valore generale di T ci somministra una nuova relazione fra le attrazioni A, B, C esercitate da un'ellissoide sopra un punto interno (a_1, b_1, c_1). È noto che eliminando le due funzioni ellittiche $F(h, \mu)$, $E(h, \mu)$, che trovansi nell' espressioni di A, B, C si trova

$$\frac{A}{a_1}+\frac{B}{b_1}+\frac{C}{c_1}=4\pi$$

Una relazione somigliante si conosce in Meccanica nel caso di un punto esterno. Il secondo membro 4π rappresenterà una superficie sferica S di raggio 1, perciò avremo identicamente

$$\frac{A}{a_1}+\frac{B}{b_1}+\frac{C}{c_1}=S$$

A questa possiamo aggiungere

$$\frac{Aa(b^2+c^2)}{a_1bc}+\frac{Bb(a^2+c^2)}{b_1ac}+\frac{Cc(a^2+b^2)}{c_1ab}=T$$

ed il secondo membro rappresenterà un ellissoide della quale i quadrati degli assi sono dati dai valori numerici

$$\frac{2bc}{a}, \frac{2ac}{b}, \frac{2ab}{c}$$

Potrebbero trovarsi infinite altre relazioni secondo la natura dei moltiplicatori, e ci basterà indicarne un' altra che si riferisca ad una cubatura. I consueti rapporti

$$\frac{A}{a_1}, \frac{B}{b_1}, \frac{C}{c_1}$$

si moltiplichino respettivamente per

$$\alpha'' = \frac{a^2[(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)+b^4+c^4]}{24abc}$$

$$\beta'' = \frac{b^2[(a^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)+a^4+c^4]}{24abc}$$

$$\gamma'' = \frac{c^2[(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)+a^4+b^4]}{24abc}$$

si troverà dopo alcune riduzioni

$$\frac{A\alpha''}{a_1}+\frac{B\beta''}{b_1}+\frac{C\gamma''}{c_1}$$

$$=\frac{\pi abc}{6}\left(\frac{a^2+2(b^2+c^2)}{a^2}\right)+\pi\,\frac{[c^2(a^2+b^2+c^2)+c^4-a^2b^2]}{6\sqrt{(a^2-c^2)}}.F(h,\mu)$$

$$+\frac{2\pi(a^2+b^2+c^2)\sqrt{(a^2-c^2)}}{6}.E(h,\ \mu)$$

Il secondo membro come dimostrai nel tomo 31 del giornale del sig. Crelle di Berlino, e nel tomo 116 del giornale arcadico rappresenta il volume V terminato dalla superficie di elasticità, e di equazione

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$

per ciò se pongasi

$$\alpha' = \frac{a(b^2+c^2)}{bc},\quad \beta' = \frac{b(a^2+c^2)}{ac},\quad \gamma' = \frac{c(a^2+b^2)}{ab}$$

avremo le tre equazioni

$$\frac{A}{a_1}+\frac{B}{b_1}+\frac{C}{c_1} = S$$

$$\frac{A\alpha'}{a_1}+\frac{B\beta'}{b_1}+\frac{C\gamma'}{c_1} = T$$

$$\frac{A\alpha''}{a_1}+\frac{B\beta''}{b_1}+\frac{C\gamma''}{c_1} = V$$

In questa guisa le attrazioni A, B, C verranno espresse da tre quadrature S, T, V ove ciascuna di queste somministra una rappresentazione geometrica.

10.° Termineremo questo articolo col ricercare quali sieno le coordinate a_1, b_1, c_1 del punto interno attratto da un ellissoide, e quali sieno le dimensioni della stessa ellissoide onde la somma delle attrazioni sia rappresentata da una nuova ellissoide T. Dal valore generale di T si vede che prendendo $\alpha' = a_1$, $\beta' = b_1$, $\gamma' = c_1$, ovvero

$$a_1 = \frac{a(b^2 + c^2)}{bc}, \quad b_1 = \frac{b(a^2 + c^2)}{ac}, \quad c_1 = \frac{c(a^2 + b^2)}{ab}$$

si avrà

$$A + B + C = T$$

Il valore di T come già è stato veduto nell'antecedente parag. rappresenta la quadratura di un ellissoide della quale i valori numerici dei quadrati dei semiassi sono

$$\frac{2bc}{a}, \quad \frac{2ac}{b}, \quad \frac{2ab}{c}$$

Per conoscere però quali sieno le dimensioni dell' ellissoide alla quale appartengono le attrazioni A, B, C, osserveremo che per un punto (a_1, b_1, c_1) collocato nell'interno di un ellissoide, le coordinate a_1, b_1, c_1, devono essere necessariamente minori dei semiassi quando anche il punto (a_1, b_1, c_1) fosse situato nella superficie. I riportati valori delle attrazioni A, B, C restando invariabili, quando anche si sostituisca ma, mb, mc invece di a, b, c, le attrazioni si riducono a quelle di un ellissoide descritta sopra le direzioni dei medesimi assi della prima, e che passa per il punto a_1, b_1, c_1. Quando adunque per a_1, b_1, c_1 si prendano i valori determinati dalle precedenti espressioni, saranno essi respettivamente maggiori di a, b, c, e converrà prendere in generale un'ellissoide di semiassi ma, mb, mc. Il numero m potrà assumere uno dei valori per i quali sia

$$a_1 < ma, \quad b_1 < mb, \quad c_1 < mc.$$

Ora questo valore si può ottenere col supporre il punto situato sopra l'ellissoide di semiassi ma, mb, mc, il che dà

$$\frac{a_1^2}{a^2}+\frac{b_1^2}{b^2}+\frac{c_1^2}{c^2}=m^2$$

da dove restituendo i valori di a_1, b_1, c_1 risulterà

$$m^2=3+(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

ovvero

$$m^2=6+\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2}{c^2}$$

Prendendo adunque per m un numero o eguale o maggiore di quello determinato da questa equazione, e costruendo un ellissoide di semiassi o eguali o maggiori di ma, mb, mc, allora la somma delle attrazioni esercitate da queste ellissoidi sopra un punto collocato o nella superficie o nell'interno, e di coordinate a_1, b_1, c_1 sarà rappresentata dalla quadratura di una nuova ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{\left(\frac{2bc}{a}\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{2ac}{b}\right)}+\frac{z^2}{\left(\frac{2ab}{c}\right)}=1$$

od anche dalla quadratura della superficie di elasticità

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2(ax^2+by^2+cz^2)$$

In altri articoli estenderemo questa teorica ad altre superficie.

SULLO STATO ATTUALE DELLA TELEGRAFIA

RELAZIONE

DI A. SECCHI

Professore nel Collegio Romano.

In due epoche principalmente meritano le scoperte scientifiche di essere presentate al pubblico : una è nel loro primo apparire, quando tutte brillanti dello splendore di novità , facilmente trovano scusa ai loro apparenti difetti : l'altra è quando da lunga esperienza migliorate a stato sono ridotte di perfezione. Per questo non credo inopportuno il ritornare un poco sui telegrafi elettrici quantunque sia già materia nota, non tanto per tesserne la storia o darne una minuta descrizione, quanto per esporre sommariamente lo stato attuale di questa utilissima scoperta. Questo tema è stato trattato recentemente in un opera assai grande dall' ab. Moigno, il quale ha raccolto quanto trovasi sparso in varii autori e giornali su questo soggetto, e la presente relazione potrà servire a chi non avesse in pronto l' opera predetta. Io qui non farò altro che esporre quanto ho veduto in America nelle visite fatte agli uffizi dei telegrafi, specialmente in Filadelfia per gentilezza del sig. Hugh superintendente del telegrafo di Morse , a New-York al telegrafo di House , e finalmente in Inghilterra in casa del sig. Wheatstone stesso il quale ebbe la compiacenza di farmi conoscere i suoi ritrovati. Spero poi che questo articolo non riuscirà in tutto una ripetizione del già noto, perchè fuori dei principii generali su cui sono fondati i telegrafi poco altro è stato pubblicato, e le invenzioni di molte cose accessorie sono affatto inedite, o almeno poco note tra noi. Comincierò dai telegrafi usati in America, riserbandomi a parlare in ultimo luogo dei telegrafi inglesi per unire così insieme molte altre invenzioni del sig. Wheatstone.

Tre specie di telegrafi sono ora usati in America detti di Morse, di House e di Bain, e tutti sono telegrafi ad impressione.

Chi desidera la descrizione del telegrafo di Morse legga la Memoria del sig. Arnoldi *Sui telegrafi elettrici* nel Giornale Arcadico T. 108, p. 79. Quì basterà ricordarne la costruzione in poche parole. Il telegrafo di Morse consiste in un elettromagnete a ferro da cavallo, ed in una piccola leva lunga circa un decimetro, sostenuta da un asse ai due terzi della sua lunghezza. Al capo del braccio più corto essa porta un'ancora o sbarra trasversale di ferro, che viene attratta dall'elettro-magnete quando si chiude il circolo della corrente, e all'aprirsi di questo è staccata per l'azione di una molla. Quando l'ancora è attratta l'altro capo si alza e una punta di acciaio smussata batte contro una striscia di carta su cui imprime un segno : siccome la carta è continuamente tirata per l'azione di due cilindri simili a quelli del laminatoio, così il segno o solco fatto dalla punta sarà in proporzione del tempo che la leva sta alzata, ossia del tempo che sta chiuso il circuito della corrente. Se questo sta chiuso per un istante, la punta farà un solco cortissimo, ossia un *punto*, se il circolo rimane chiuso per più tempo, passerà più carta, e la punta farà una *linea*. Combinando *linee e punti* insieme, e lasciando fra le combinazioni i debiti spazii si può fare un alfabeto convenzionale, per intendere il quale basta gettare gli occhi su questo schema.

ALFABETO TELEGRAFICO DI MORSE.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*l*	*m*	*n*
.	- - -	- .	..	.. -	- . -	.-	...	. - ..	- - .	.-.

o	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*z*
....	. - . -	- . -,	---	. . - .	. . . -	. . . .	. - - .	- . . -

Fin quì nulla di nuovo : il tempo però e l'esperienza hanno persuaso qualche modificazione alla costruzione primitiva. In questa vi era un campanello onde avvisare l'assistente ed un meccanismo per mettere in moto l'orologio che muove i cilindri tosto che la leva cominciava ad oscillare ed il telegrafo ad agire, e per fermarlo quando era finito il dispaccio. Tutte queste cose sono state tolte come inutili, perchè l'uso assiduo che si fa del telegrafo richiedendo più uomini sempre presenti notte

e giorno nella stanza ove sono le machinette, questi stessi possono facilmente invigilare al buono andamento loro, e caricare l'orologio quando sentono che comincia il battimento dell'ancora che fa rumore sufficiente onde essere inteso per tutta una stanza, e fermarlo quando questo è cessato.

All'incontro, due altre modificazioni assai importanti sono state introdotte, e che non sono state pubblicate; la prima riguarda il giro delle correnti, l'altra l'economia della carta. L' elettro-magnete di questo telegrafo deve avere una forza considerabile, onde imprimere bene su la carta, e quella che usasi attualmente è tale da sostenere un peso di 4 ovvero 5 libbre romane. Ora per sviluppare a distanza di parecchie centinaia di miglia di filo una forza magnetica sì poderosa, si sarebbe richiesta una pila enorme e fili grossi assai e di metallo buon conduttore, il che non può conciliarsi colla economia. Fu questa difficoltà che determinò il sig. Wheatstone ad abbandonare l'uso degli elettromagneti nei telegrafi, e servirsi soltanto della deviazione degli aghi, come vedremo appresso. Morse medesimo sentì da principio tale difficoltà, giacchè usando pile più forti in linee non molto lunghe otteneva elettro-magneti più deboli, e parciò invece della punta di acciaio adoperò un lapis, e poscia a questo (che era troppo fragile) sustituì un tiralinee o specie di penna a serbatoio di inchiostro. Questo esigeva pochissima forza, ma avea invece altri inconvenienti: l'inchiostro raggrumandosi e disseccandosi mancava spesso di segnare, e richiedeva una attenzione continua. Ma quando le linee telegrafiche furono cresciute a gran lunghezza, e si volle far uso della punta di acciaio, anche le pile fortissime si trovarono insufficienti, essendo indebolite enormemente dalla resistenza dei fili metallici, e fu necessario ricorrere a un mezzo secondario per muovere il telegrafo, che è il seguente ancor esso assai semplice. Si usano due pile una grande di 30 a 40 elementi in tempo asciutto, e di 80 o 90 in tempo piovoso, ed un'altra più piccola di due o tre elementi soltanto. La corrente della pila grande circola pei fili della linea telegrafica, e attorno un piccolo elettro-magnete *secondario* di circa 6 centimetri di lun-

ghezza e un centim. di diametro; la corrente della pila minore circola direttamente per l'elettro-magnete *principale* del telegrafo. L' uso del piccolo elettro-magnete secondario non è altro che di muovere una leggierissima ancora che colla sua oscillazione apre e chiude il circuito dell'elettro-magnete principale, la cui pila benchè minore può sviluppare gran forza, essendo il giro dei fili assai corto. La piccola ancora dell'elettro-magnete secondario sta sospesa a guisa di un pendolo, onde i suoi moti siano più facili, e viene staccata dall'elettro-magnete per l' azione di una sottilissima molla spirale la cui forza è uguale al peso di pochi grani: le oscillazioni inoltre sono piccolissime onde abbiasi presta ed esatta corrispondenza di movimenti tra i due elettro-magneti, e quindi la macchina deve essere costruita con grande esattezza. Ad onta di avere tanto diminuita la forza della corrente necessaria ad impiegarsi nel moto meccanico prodotto dall'elettro-magnete secondario, pure su le linee lunghe da 3 o 4 cento miglia in tempi assai piovosi il telegrafo non agisce, tanta essendo la dispersione della elettricità per l'imperfetto isolamento dei fili. Questi sono comunemente portati da rozzi pali di 5 a 6 metri di altezza, alla cui sommità è una traversa in forma di T alla quale sono attaccati i fili mediante un uncino. Dove sono più protetti si usa un piccolo cappelluccio tondo di vetro del diametro di tre pollici sotto la cui ala è un uncino pure di vetro in cui passa il filo: questo cappelluccio è infilato in un uncino di ferro simile ad un ganghero di porta conficcato nel palo. Molta elettricità è pure dispersa dai rami degli alberi che vengono a toccare i fili che passano per le selve, e anche lungo le strade ordinarie. Questi inconvenienti potrebbero certamente evitarsi, ma la spesa per la costruzione e mantenimento di migliori linee sarèbbe molto maggiore che non quelli di adoperare una pila più poderosa. Si calcola che le linee telegrafiche in America costano da 70 scudi al miglio, mentre in Inghilterra ove appunto la maniera di isolamento è molto perfetta costano dieci volte tanto per lo meno, cioè circa 150 lire sterline. Le pile usate comunemente sono quelle di Grove; lo zinco non ha più che 6 centimetri di altezza

e 35^{mm} di diametro interno; esse si tengono nella soffitta della casa onde non aver nocumento dallo sviluppo del gas nitroso: il filo conduttore é una cordicella di tre fili di ferro torti insieme, ciascun de'quali è poco più di un millimetro di diametro. Questa si preferisce ad un sol filo di diametro più grosso per la sua flessibilità. Essi sono coperti con una mano d' olio di lino, ovvero zincati, onde impedirne l'ossidazione.

I segni del telegrafo si trasmettono, come è noto, mediante un tasto che alzato ed abbassato chiude il circuito della pila della linea. Il maneggio di questo tasto riesce alquanto difficile pei principianti, che fanno molti errori, quindi fu che specialmente ad uso dei gabinetti di fisica, ove non si ha tempo di studiar molto tal pratica io proposi nella Raccolta Scientifica (anno 1847) un meccanismo facile onde evitare questi inconvenienti. Questo stesso congegno è stato l'anno scorso proposto da un altro in Inghilterra, ed il Sig. Wheatstone ne sta eseguendo uno analogo attualmente. Ma tutti questi sono inutili per gli uffizi pubblici; perchè una settimana di esercizio basta a chiunque per acquistar pratica sufficiente, onde trasmettere i segni a mano assai più velocemente che con qualunque macchina. Anzi questa stessa difficoltà di apprendere torna poscia a vantaggio degli impiegati, come le altre abilità manuali nelle arti, onde non esser rimossi facilmente dall'impiego.

L'altra modificazione è nell'uso della carta: da principio se ne faceva gran consumo, essendochè una riga sola di caratteri imprimevasi su una lista di carta larga 12 mm. Ora invece le striscie si fanno di 30 mm., e vi si imprimono 5 o 6 righe una presso l'altra, e così tre quarti almeno della spesa si risparmia. Chi rifletterà che il solo messaggio inviato al congresso dal presidente degli Stati Uniti sul principio del 1849 occupò da 8 miglia di carta scritta a 6 righe quantunque non fosse più che una pagina degli ordinari fogli Americani, e inoltre che la massima parte delle notizie stampate in questi è trasmessa per via telegrafica, si convincerà che quel risparmio non è faccenda di poco momento. Resta però sempre in questo telegrafo l' incomodo di dovere copiare il dispaccio in caratteri

ordinarii, onde inviarlo al suo destino; ma questa é faccenda di poco momento, e una persona sola può sbrigare comodamente quanto appartiensi a 2 macchine.

Il secondo telegrafo è quello di House. Questo stampa i dispacci in caratteri ordinarii dell'alfabeto, e perciò che riguarda l'invenzione è certamente il più bello ed ingegnoso. Esso non è che una leggiera modificazione del telegrafo a quadrante di Wheatstone, ed é assai simile al telegrafo a stampa inventato già alcuni anni sono dal Sig. Ceselli qui in Roma sui principii di Wheatstone. Il Sig. Arnoldi nella citata memoria ha descritto ed illustrato il telegrafo a quadrante, e sarà bene consultarlo. House si é attenuto a quello de' telegrafi di Wheatstone in cui l'elettricità non fa altro che regolare il moto di una serpentina prodotto da un peso, lasciando da parte quello in cui l'elettromagnete stesso produce la rotazione del quadrante senza aiuto di peso alcuno. Chi non conoscesse questo meccanismo, non ha da fare altro per formarsene una idea che mettersi avanti ad un orologio a pendolo e tenere lo sguardo alla serpentina. Presa in mano l'asta del pendolo quando sta nella massima escursione a sinistra, la fermi, quindi guidandola colla mano la passi a dritta, e vedrà che scapperà mezzo dente della serpentina, poscia mandi il pendolo a sinistra di nuovo, e passerà l'altro mezzo, onde ad ogni due vibrazioni successive passerà un dente della serpentina. Se esso muoverà il pendolo più volte di seguito come sopra, passeranno successivamente più denti, e arrestato il moto dell'asta, la serpentina si fermerà a quel dente che più piacerà. Se ora al pendolo si sostituisca una sbarra di ferro dolce; alla mano che lo conduce a destra l'azione di un elettro-magnete, e alla mano che lo riporta a sinistra, l'azione di una molla si avrà il vero meccanismo del telegrafo di cui parliamo. In questo la serpentina ha 25 denti, e sul suo asse é fissata una rotella che porta le 24 lettere dell'alfabeto, e il segno — in caratteri rilevati come i tipi da stampare, e vi é un indice fisso sotto cui passano le lettere, mentre la serpentina gira, e quelle che ivi si fermano qualche tempo, sono quelle che compongono il dispaccio. Quando si chiude il circuito della cor-

rente dell'elettro-magnete la sbarra è tirata e passa lo spazio di mezza lettera della rotella, e interrotto il circuito è staccata per l'azione della molla, e passa l'altro mezzo, e così si cambia lettera, ed è evidente che potrà condursi sotto l' indice quella che più piace. Per passare da A a B basterà aprire e chiudere una volta sola il circuito, e da B a T bisognerà farlo 7 volte, e farlo 17 volte per ritornare ad A. Il Sig. Wheatstone ha inventato un commutatore a posta onde eseguire queste aperture e chiusure di circuito convenientemente, e consiste in una ruota di legno avente i 25 caratteri con altrettanti pezzi di metallo incastrati sulla circonferenza, e tutti congiunti al centro; una molla che striscia su di loro chiude ed apre il circuito secondo che tocca il legno o il metallo. House invece usa un cilindro ed una tastiera simile a quella proposta pel telegrafo di Morse. Se si è inteso il modo con cui il moto alternativo dell' ancora regola il moto della serpentina non sarà difficile capire come si stampino le lettere. Quando la ruota si ferma scocca una molla che spinge a contatto della lettera una striscia di carta tirata continuamente mediante un particolare congegno, e siccome il tipo si è già coperto di inchiostro passando sotto un cilindro annerito, esso lascia la sua impronta su la carta. Per separare una parola dall'altra si fa uso del segno —. La descrizione minuta di tutte le parti aggiunte da House alla prima invenzione di Wheatstone porterebbe molto a lungo, ed esigerebbe molte figure con pericolo di non essere intesa ad onta di tutto ciò. Tutte le parti di questo telegrafo sono messe in moto da una ruota girata da un uomo, e l'elettricità non fa che regolare il moto della serpentina come abbiam detto: ma la forma di scappamento è alcun poco diversa dall'ordinaria degli orologi a serpentina, e ciò perchè questo è troppo soggetto a *scorrere* da se quando si vuol muovere velocemente. Il Sig. Wheatstone per stampare col suo telegrafo avea attaccato i tipi ad altrettante molle, e, quando la ruota si fermava, un martelletto batteva dietro la molla portante il tipo che doveasi imprimere: la carta era un foglio di carta comune sotto cui ne stava un'altro tinto in nero che per la pressione

del tipo tingeva la bianca, come appunto si usa talora per copiare dei disegni. Questa carta era avvolta ad un cilindro avente il doppio moto di rotazione e traslazione, essendo uno de'perni su cui girava lavorato a vite. Questo telegrafo però è meno veloce di quello di Morse, e per stare in competenza con esso ha bisogno di usare molte abbreviazioni: il consumo della carta è maggiore, e la macchina assai più costosa, e per le linee assai lunghe non dispensa dall'uso dell'elettro-magnete secondario per chiudere il circuito dell'elettro-magnete primario che regola la serpentina. Vi è però il vantaggio che qualunque persona premendo i tasti su cui sono scritte le lettere dell'alfabeto può stampare a distanza di parecchie centinaia di miglia quello che più gli aggrada in caratteri intelligibili da tutti. Così le comunicazioni possono farsi secretamente a ciascuno, avendo cura che la persona a cui esse sono dirette si trovi presente alla macchina quando sono trasmesse. Non fa mestieri copiare i dispacci: ma la lista stessa di carta così stampata dal telegrafo inviasi al suo destino.

Il terzo telegrafo introdotto recentemente è quello di Bain. La necessità di eludere i diritti delle patenti amplissime ottenute da Morse all'epoca della sua scoperta e poscia da House, è stato stimolo a varii onde cercare di inventare un telegrafo in cui fosse esclusa assolutamente l'azione magnetica, M. Bain approfittandosi dei lumi avuti da Wheatstone di cui era stato lavorante, e delle idee proposte da Davy sulla scomposizione chimica mediante la corrente elettrica, ha inventato un nuovo telegrafo a sola azione chimica. Una striscia di carta è anche in questa tirata continuamente tra due cilindri come in quello di Morse, ma questa carta è preparata chimicamente e bisogna usarla mentre è ancora umida. La preparazione consiste in una soluzione di cianoferruro potassico con acido nitrico ed un poco di cremor di tartaro. La carta così preparata è di un bel turchino chiaro, e mentre è tuttora umida si fa scorrere fra i due cilindri. Un ago di ferro spuntato preme continuamente la striscia sopra una piastra collocata assai vicino ai cilindri che la tirano, e tanto l'ago che la piastra sono in comunicazione coi

poli della pila. All'istante in cui chiudesi il circuito della pila (il che si fa premendo un tasto come nel telegrafo di Morse), il fluido elettrico passando dall' ago alla piastra attraverso la carta umida scompone la preparazione, e il color turchino cambiasi in bruno scuro sotto la punta. Qui succede lo stesso che nel telegrafo di Morse, che la lunghezza del segno fatto è proporzionale alla durata del tempo che sta chiuso il circuito, e si fa uso dello stesso alfabeto. I punti e le linee sono distintissimi e paiono fatti con vero inchiostro, e si anneriscono sempre più restando esposti all'aria, ed asciugandosi la carta. Esclusa l'azione dell'elettro-magnete, la macchina non fa rumore alcuno, quindi esige continua attenzione, ovvero il suono di un campanello che avverta l'assistente quando comincia ad agire. Il costo della macchina è alquanto minore di quello di Morse, ma la spesa della preparazione della carta è considerevole, come pure è grande l'incomodo di preparare e conservare la carta umida, benchè questo sia assai diminuito mediante alcune macchinette inventate a questo fine. La economia della pila pareva che fosse maggiore che in quello di Morse, ma la linea de'fili su cui questo telegrafo era introdotto, era troppo corta per poterne giudicare : del resto esso dicesi operare con grande esattezza e celerità.

È difficile formarsi una idea della estensione a cui è giunto l'uso dei telegrafi in America: dalla punta settentrionale di Halifax fino alle parti più meridionali degli Stati Uniti a Nuova Orleans vi è una catena non interrotta di telegrafi la quale si dirama a tutte le città di qualche considerazione di quell'immenso paese. La somma delle linee telegrafiche prese insieme arriva a molte migliaia di miglia e vanno ogni dì crescendo, talchè presto arriveranno al Messico, e alla California. All'arrivo de'vapori postali inglesi ad Halifax trasmettesi immediatamente per telegrafo un sunto delle notizie Europee che viene pubblicato lo stesso giorno in tutte le principali città dell'Unione: la massima parte degli affari commerciali si tratta per telegrafo, e non rare volte negli affari urgenti, per esso si inviano gli ordini di polizia. La mediocrità de'prezzi, e la prestezza del

servizio fa che il suo uso sia popolare anche negli affari che non esigono somma celerità. I servigi che il telegrafo rende al commercio sono incalcolabili, e ne serve di prova lo stesso venir rotti non di rado i fili all'arrivo de'vapori d'Europa, quando vi è cambiamento notabile de'mercati. Fuori di questo caso, rarissimo è che vengano rotti, tranne per vicende atmosferiche, benchè lungo le linee non vi sia guardia alcuna nemmeno nei siti dove passano lungo le strade ferrate. È già noto che impiegasi per conduttore un sol filo, e che la terra serve per l'altro : I molti fili che veggonsi su alcune linee, sono destinati per altrettanti telegrafi più d'uno de'quali sta in un luogo solo, ove ciò richiede il concorso degli affari. .

Veniamo ora ai telegrafi inglesi. Abbiamo già parlato del telegrafo a quadrante di Wheatstone, e some esso abbandonò ogni idea di adoperare gli elettro-magneti considerando la fortissima corrente richiesta da essa quando le linee erano assai lunghe : quindi fu che esso si mise a perfezionare il telegrafo di Ampère servendosi della deviazione dell'ago magnetico mediante la corrente elettrica. Già fino dal 1837 egli avea costruito un telegrafo su la strada ferrata da Blackwall a Londra composto di 5 aghi soltanto invece dei 24 proposti da Ampère. Questo era destinato esclusivamente al servizio di quella strada su cui i carri erano tirati mediante una fune messa in moto da due macchine a vapore fisse, situate a 4 miglia di distanza l'una dall'altra. Più tardi egli si propose di sciogliere il problema non usando che *due aghi* ed *un solo filo conduttore*, ed ecco come è costruito il suo apparato. Sopra due telarini simili a quelli dei comuni galvanometri sono avvolti molti giri di fil di rame coperto di seta : questi telarini sono lunghi circa 8 centimetri, e larghi 5, essi sono collocati parallelamente l'uno all'altro i loro centri essendo distanti circa un decimetro. Un solo è il filo di rame che avvolgesi su ambedue i telarini in una stessa direzione. In ciascun d'essi è un paio d'aghi astatici fissati su di un asse orizzontale, talchè gli aghi possono deviare in un piano verticale come l' ago di una bussola di inclinazione. Dei quattro aghi che sono in questo che chiamar

possiamo doppio galvanometro verticale, che rimangono nascosti dentro la matassa dei fili, e gli altri due sono visibili e servono da indice su di una mostra, o quadrante comune, come negli ordinarii galvanometri. Essendo un solo il filo che gira attorno agli aghi, e questi essendo disposti coi poli omonimi ad uno stesso modo, è manifesto che ambedue gli aghi esterni piegheranno a destra o a sinistra simultaneamente secondo la direzione della corrente. Questo libero moto dei due aghi d'ambe le parti farebbe che essi oscillassero continuamente, e perciò confuse e lente fossero le indicazioni : perciò mediante un perno o altro ostacolo fisso nel telarino, si fa che un ago possa deviare *solo a dritta*, e l'altro *solo a sinistra*. Chiamiamo i due aghi D, ed S; se la corrente nel filo va da destra a sinistra devierà solo D, e se va da sinistra a destra devierà solo S. Questo congegno con un commutatore simile a quelli della macchina di Ampère per invertere la corrente nei fili costituisce tutta la macchina. Il commutatore è attaccato ad un manubrio che quando sta in direzione verticale lascia aperto il circuito, e quando si piega a destra manda la corrente da destra a sinistra, e viceversa quando piegasi dall' altra parte : così il moto del manubrio corrisponde a quello degli aghi. Per intendere l'alfabeto di questo telegrafo basta ricordarci di quello di Morse, purchè pel punto si prenda la deviazione dell'ago destro, e per la linea quella del sinistro. Così per esempio, se devia solo l'ago D la lettera, sarà *a* : se solo S, sarà *c* : se due volte di seguito il destro, sarà *e* : se prima il destro, poi il sinistro sarà *h*, e così via discorrendo. È manifesto che i due aghi non fanno che l' uffizio di un solo, che fosse dalla corrente mandato ora a destra, ora a sinistra : ma l'ago allora libero ad oscillare non quieterebbesi che lentissimamente, e quindi lungo tempo richiederebbesi per inviare pochi segni uno dopo l'altro. Per fare che gli aghi verticali si quietino più presto, essi sono sospesi un poco al di sopra dei loro centri di gravità, ovvero aggravati al fondo di un piccol peso, il che però deve regolarsi in modo da non rendere troppo difficile il loro moto. Le dimensioni degli aghi possono variare

ad arbitrio, e quindi può essere più o meno facile il muoverli: quelli usati comunemente su le linee inglesi agiscono con 4 o 5 elementi di rame e zinco con acqua acidula, su linee di fili lunghe circa quattro cento miglia. La dispersione della elettricità è piccola assai essendo i fili bene isolati. Essi sono sostenuti da pali inverniciati ad olio, inoltre ciascun filo passa per un corto tubo di terra cotta isolante simile alla porcellana, il quale è fissato al palo con un anello di ferro : di più i tubi ove ne sono più d'uno sono coperti da una tavola , e in cima al palo ve ne è un altra a guisa di tettuccio per difenderli dalla pioggia. Ove i fili passano sotto i tunnel molto umidi, sono coperti di gutta-percha, sostanza resinosa, isolante e simile alla gomma elastica, ma che messa nell' acqua bollente diventa plastica. La spesa però per costruire tali linee é assai grande , onde é che l' uso del telegrafo é molto costoso , e perciò poco popolare. Una delle avvertenze necessarie ad aversi nella costruzione dei telegrafi ad ago é di fare il numero de' giri della matassa che circonda gli aghi né più grande, né più piccolo di quello che porta la resistenza della pila e del resto della linea; per conoscere tale numero bisogna determinare con esattezza la resistenza dei fili della linea, e quella della pila che deve usarsi, indi mediante le formole di Ohm determinare il numero de' giri che farà l'effetto massimo sull'ago. Wheatstone ha dimostrato che un ago ben costruito può deviare di 50° usando un filo di rame di un millimetro e mezzo di diametro, e 200 miglia di lunghezza , con una semplice coppia voltiana di due pollici di grandezza.

Questo telegrafo può costruirsi in modo che uguagli in sensibilità i più squisiti galvanometri, e che pochissimo ne differisca nella forma. Facciasi il telarino ordinario del galvanometro un poco più largo del solito, onde possano starvi parallelamente due sistemi d'aghi astatici finissimi sospesi a fili di seta, e dispostili in modo che l'uno di questi deviar possa solo a destra e l'altro solo a sinistra limitandone le escursioni a 12 o 15° al più, mediante ostacoli di materia soffice, avrassi uno strumento delicatissimo che sarà un completo telegrafo. Questo potrà usarsi

con debolissime correnti, e perciò con pochissima spesa, benchè non colla stessa celerità quanto il sistema degli aghi verticali attesochè le oscillazioni non così tosto si quietano. Usando di queste macchinette può trasmettersi il medesimo dispaccio simultaneamente a moltissime stazioni intermedie dove passa un filo principale, senza che per la interposizione di un numero qualunque di questi telegrafi venga punto aumentata la resistenza della linea, anzi diminuita di alcun poco. A tale effetto basta attaccare i fili di questi galvanometri telegrafi al filo principale senza interromperlo mettendone i capi a distanza di circa 100 metri l'uno dall'altro, e la porzione di corrente che così deriva dal filo principale sarà più che capace di fare deviare gli aghi. Così quantunque il dispaccio sia diretto unicamente all'ultima stazione propriamente detta, esso si comunicherà allo stesso tempo a tutte le intermedie, e la doppia via che trova nell'intervallo del filo posto tra i capi del galvanometro agevola il corso della corrente stessa. Questo uso delle correnti deviate può essere in pratica molto vantaggioso, perchè in generale la resistenza della matassa è almeno la metà di quella di tutto il circuito.

Questi piccoli telegrafi possono anche usarsi per le ordinarie comunicazioni che occorrer possono in una casa grande, e dove il suono de'campanelli potrebbe essere incomodo, o troppo dispendioso. La corrente che ottiensi attaccando o staccando da una calamita l'ancora attorno a cui è avvolta una spirale di filo di rame coperto di seta, può servire a questo effetto senza la pila, e già il sig. Wheatstone ha costruito diverse macchine elettro-magnetiche distinate a quest'uso. È alquanto singolare il modo con cui questo fisico aumenta l'influenza della corrente sull'ago. Finora erasi avuto gran premura di allontanare ogni ferro dal galvanometro: egli invece pone alle due estremità del telarino a cui è avvolto il filo due piastre di ferro col loro piano parallelo alle convoluzioni di questo, la cui lunghezza è all'incirca quella degli aghi. In altri termini: esso chiude con due piastre di ferro le due estremità del telarino che comunemente rimangono aperte. All'istante che circola la corrente, la

piastra prende una polarità trasversale secondo la minima dimensione, ossia la sua spessezza, e trovasi avere una faccia divenuta tutta polo sud, e l' altra polo nord, come appunto il P. Pianciani trovò accadere negli aghi di ottone. Questa polarità essendo troppo forzata nel ferro cessa immediatamente al cessare della corrente, mentre la polarità longitudinale rimane più o men lungo tempo (*).

Ad onta dei molti pregi di questo telegrafo vi è il grande inconveniente di richiedere sempre un assistente presente che legga, e talora un altro che trascriva quanto trasmettesi di mano in mano; inoltre vi è pure bisogno di un campanello che avvisi e richiami l'attenzione. Molti sono i congegni inventati da Wheatstone, onde suonare i campanelli coll' elettro-magnetismo, il più semplice però è quello in cui l'ago stesso deviando chiude il circuito di un elettro-magnete che tirando un' ancora fa scorrere una molla, o lascia libero il dente di una ruota che suona un campanello come nelle sveglie ordinarie. Mettendo due campane di tono diverso, e facendo che ciascuno dei due aghi deviando chiuda il circuito di un elettro-magnete, che tirando un martello batta su di una di esse, si farà un telegrafo i cui segni potranno riceversi anche nella oscurità, senza bisogno di tanta attenzione, e senza guardar gli aghi potrà un solo assistente scrivere quanto viene trasmesso. Un congegno simile è stato introdotto in alcuni telegrafi di Germania da Steinheil uno de'quali fu mostrato in Roma alcuni anni fa. In questo una sbarra magnetica di circa un decimetro di lunghezza, deviando ora a destra, ora a sinistra, batteva due campanelle di tono diverso: ma quella sbarra essendo piuttosto pesante richiedeva correnti forti, e quantunque le oscillazioni fossero diminuite assai dal colpo contro la campana; pure non si potevano mandare i segni con tanta speditezza come in quelli di Wheatstone, i quali se sono ben costruiti possono eguagliare quelli di Morse.

Dopo la succinta esposizione fatta sin qui dei varii modi di

(*) V. Pianciani, Atti della Società Italiana delle Scienze. T. XXI.

telegrafi, è naturale la domanda quale di essi debba preferirsi. Non è tanto facile il risolvere questa quistione in generale, dipendendo la scelta da molte circostanze. I telegrafi ad impressione paiono certamente migliori, perchè la possibilità dell'errore dipende da uno solo, cioè da chi scrive, mentre negli altri può errare chi manda e chi riceve il dispaccio, e non vi è mezzo di verificazione fuorchè ripeterlo. Quei di Morse richiedono forte pila, e gran carta: quelli di Wheatstone invece debole pila e niun consumo v'è di carta. Questi all'incontro richiedono più assistenza, sicchè la questione economica per questo punto deve risolversi dal confronto del prezzo dei materiali della pila e della carta con quello da pagarsi ad un assistente di abilità maggiore di quella che comunemente si richiede in quelli di Morse, e che deve stare più occupato. Prescindendo da ragioni economiche il telegrafo di Morse merita la preferenza sopra gli altri per la sua semplicità e facilità di costruzione. Le pile di Grove pochissimo si logorano quando il telegrafo non agisce, e così per un luogo, ove non sia gran concorso la spesa non sale a gran cosa ogni giorno. I telegrafi ad impressione sarebbero poi sempre da preferirsi quando servono alle strade ferrate, perchè questi lasciano ordini permanenti che in qualche caso può esser necessario di conservare, e uno sbaglio nell' interpretare può apportare gravi disordini. Un telegrafo elettrico su di una strada ferrata in cui non sia un grandissimo concorso di treni dispensa dalla spesa di una seconda linea di rotaie, e può prevenire le disgrazie meglio che l'uso di queste doppie linee.

Molto si è parlato del telegrafo submarino, e la fantasia di alcuni si era esaltata a segno di volere congiungere l' Inghilterra coll'America : ma questi tali non avevano mai veduto certamente l' Atlantico. Ora si sta trattando seriamente di farne uno tra la Francia e l'Inghilterra. Il filo dovrebbe esser steso nel fondo del mare in un sito ove il canale non è più largo di 18 miglia presso Folkstone in Inghilterra e Boulogne in Francia; esso sarebbe coperto di Gutta-Percha solforata, impenetrabile all'acqua e abbastanza dura e flessibile. Speriamo che difficoltà serie non si oppongano a questo vasto progetto che

farebbe una città sola delle due più grandi capitali del mondo, e che sarebbe un vero trionfo della scienza: ma molte sono a temere che la scienza e l'arte non potranno per ora superare, perchè non dipendenti semplicemente dalla natura materiale, ma miste di altri elementi.

Toccherò brevemente delle altre varie applicazioni dell'elettro magnetismo fatte da Wheatstone, essendo faccenda di non piccol momento il descrivere anche solo le principali. Una di queste che può riuscire assai interessante alla scienza è quella di misurare la velocità dei corpi cadenti e dei proiettili. A questo fine esso ha inventato un cronoscopio che consiste in poco più che un ordinario cronometro a minuti terzi, in cui la molla che lascia e ferma le ruote è attaccata ad un ancora di ferro, che si muove mediante un elettro-magnete. Se vuolsi misurare la velocità de'corpi cadenti si fa che il corpo al momento di cadere tocchi una piccola leva, e chiuda il circuito della pila che è congiunta coll'elettromagnete del cronoscopio, e lo riapra quando arriva al piano orizzontale. Questo è fatto alquanto mobile e cedendo all'urto tocca un altra leva che riaprendo il circuito ferma il cronoscopio. Lo stesso si fa pei proiettili: all' uscire della bocca del pezzo la palla chiude il circuito e lo richiude col suo urto all'arrivare che fa sul bersaglio: così durante il moto de'corpi il cronoscopio cammina e fa vedere i tempi impiegati a percorrere i diversi spazi. È già noto come Wheatstone trovò un congegno onde fare che quanti orologi si volesse tutti segnassero una stessa ora benchè posti in luoghi diversi, e mostrò anche di quanto vantaggio esser potessero così semplici orologi nelle ricerche astronomiche. Il sig. Airy astronomo reale a Greenwich ha preso in considerazione questo soggetto e forse tra breve a tutti i pendoli di quel grande osservatorio si sostituiranno tali orologi che saranno regolati da un sol pendolo. (Vedi Raccolta Scientifica anno 1847 ove trovasi un cenno di questa invenzione). Ultimamente in America si è applicato il telegrafo a determinare la longitudine geografica dei vari luoghi e i sigg. Kendall e Bond uno astronomo a Filadelfia l'altro a Cambridge presso Boston, mi assi-

curarono che quantunque le osservazioni non siano tanto facili quanto paiono a prima vista, pure si può esser sicuri dei decimi di minuto secondo in longitudine, supponendo le osservazioni fatte bene nel rimanente che non appartiene al telegrafo. Il sig. Airy è già in trattativa colla compagnia dei telegrafi inglesi onde fare passare i fili per l'osservatorio di Greenwich per determinare così con precisione la longitudine delle varie città d'Inghilterra.

Il dottor Locke di Cincinnati ha recentemente applicato il telegrafo di Morse alle ordinarie osservazioni astronomiche dei passaggi delle stelle, ed ha ottenuto per ciò dal congresso Americano un premio di 25000 scudi. La sua macchina consiste in un telegrafo di Morse con due leve, e con due elettromagneti, e si scrive non su una striscia di carta, ma sopra un cilindro mosso col doppio moto di rotazione e di traslazione come abbiamo detto che avea già inventato Wheatstone. La velocità del cilindro deve essere tale da far scorrere circa un pollice per minuto secondo. Dei due elettro-magneti che abbiamo detto essere in questa macchina, il circuito di uno viene regolarmente chiuso ed aperto da un pendolo a secondi: la chiave dell'altro è a disposizione dell'osservatore. Quando l'astronomo osserva il transito di un astro pei fili del suo strumento non ha da far altro che calcare il tasto al momento dell' appulso e l'osservazione è registrata. Per avere poi la frazione di secondo, basterà misurare con una scala la distanza del punto che è stato fatto dall'osservatore da quello fatto dal pendolo. Le osservazioni trovansi così tanto agevolate che secondo le sperienze fatte da Locke si possono osservare più stelle nel medesimo tempo e fare in un ora sola il lavoro che ne esigerebbero molte senza trovarsi punto affaticato. Il meccanismo con cui aprire e chiudere il circuito dell' orologio regolatore può esser vario: Wheatstone usava una rotella posta sull'asse della sfera dei secondi divisa in settori metallici ed isolanti, su cui premendo dolcemente una molla ad ogni secondo si apre e chiude il circuito. Locke usa una piccola leva di platino che toccata leggierissimamente dai denti della serpentina,

apre il circuito, e ricadendo quindi pel proprio peso lo richiude. Onde avere maggiore precisione nei risultati, il moto del cilindro deve essere uniforme; perciò è bene usare nell'orologio un regolatore a forza centrifuga come negli orologi che muovono i comuni telescopii equatoriali, ovvero un mulinello ad acqua, come ha fatto il Sig. Lassel di Liverpool, pel suo gran riflettore parallattico.

Il Sig. Wheatstone ha inventato un termometro che si registra coll'elettro-magnetismo mediante un filo di platino, che scendendo nel tubo chiude il circuito elettrico di una pila all'istante che tocca la colonetta di mercurio: ma ometteremo questa con altre cose per descrivere brevemente un suo voltametro, col quale facilmente misuransi le resistenze dei circuiti elettrici. Consiste questo in un tubo a U a braccia ineguali. Il più corto è più largo, ed il più lungo è molto più sottile, e quasi capillare. La bocca del tubo maggiore è chiusa da forte valvula a tenuta d'aria mediante una molla; presso il fondo di questo penetrano due fili sottili di platino destinati a scomporre l'acqua contenuta nel tubo quando mettonsi in comunicazione colla pila. Scomposta l'acqua, i gas prodotti non potendo uscire per la bocca del tubo premono sul fluido, e lo fanno salire nel braccio più sottile: con questo metodo una piccolissima quantità di gas prodotto riesce sensibilissima, e questo strumento può servire invece del reostato per misurare le resistenze dei circuiti. Finita una sperienza si apre con un dito la valvola, esce il gas, e l'apparato è presto per un altra.

Lo scopo prefisso a questo articolo essendo soltanto quello di fare una relazione sullo stato attuale della telegrafia nei due paesi dove ha avuto più estensione non richiedeva di entrare in veruna particolarità storica sulla sua invenzione; tanto più che ciò non poteva farsi senza citare le date delle pubblicazioni che sono soggetto di grande controversia. Prenderò tuttavia questa occasione per indicare un epoca più antica delle assegnate finora in cui si propose chiaramente la costruzione di un telegrafo elettrico. La prima applicazione della elettricità alla telegrafia vuolsi esser quella ricordata nei viaggi in Francia di

Arturo Young pubblicati nel 1787, ove si dice eseguita da un certo francese Lomond. A me pare che tale idea fosse proposta almeno 20 anni prima in Italia dal P. Bozoli professore di Fisica in Collegio Romano. La descrizione minuta dell'apparato è fatta dal P. Partenio (Mazzolari) nel suo poemetto latino sulla elettricità (*), e consiste nel fare scoccare tra due punte vicinissime fra di loro una serie di scintille successive, il cui numero formasse un alfabeto di convenzione; non pare che si volesse adoperare altro che un filo solo. Il P. Bozoli giunse a tal conclusione dal vedere, che scaricando una boccia di Leida non isolata per un filo metallico ancor esso non isolato, la scintilla compariva in una piccola interruzione del filo fatta a grande distanza dalla boccia. Se questo fosse pensiero non caduto in mente ad alcuno prima di lui non saprei accertarlo: il poeta ascrive a lui la maravigliosa scoperta di poter parlare lontano all'amico lontano senza che alcuno possa essere consapevole del secreto. L'opera del Mazzolari fu stampata la seconda volta nel 1772, ma fu riveduta per la stampa nel 1767 epoca in cui essa dovea esser finita, e le esperienze fatte pubblicamente dal Bozoli nel Seminario Romano paiono anteriori di qualche anno alla data del poema (**).

Non sono certamente esauste le invenzioni dei telegrafi elettrici, o le applicazioni dell' elettro-magnetismo ad utili ritrovati: anzi quelle che conosciamo null' altro sono che casi particolari del gran principio, mediante il quale possiamo produrre un moto meccanico a distanza; le applicazioni pratiche si seguiranno ancora in gran numero, e speriamo che la società umana verrà cogliendo frutti sempre più copiosi anche da que' rami della scienza, che parevano a prima vista più frivoli ed infecondi.

(*) Electricorum lib. I.

(**) Nel 1774 dicesi che Lesage inventasse un telegrafo elettrico fatto con 24 elettrometri, ma non lo pubblicò che nel 1788; anche questo sarebbe posteriore al Bozoli e di più difficile esecuzione.

SOPRA LE OCCULTAZIONI DI ALDEBARAN E ALTRE STELLE PER LA LUNA

ARTICOLO 3.

DI GIUSEPPE BIANCHI

Direttore dell'Osservatorio di Modena, Segretario della Società dei Quaranta.

Egli è un anno che avveniva l'ultima delle numerose occultazioni lunari di Aldebaran annunziate per l'anno 1848, e che mi somministraron soggetto di considerazioni ai due articoli precedenti. (Racc. Scient. Anno IV. pag. 78 e 297.) Quest'ultima della sera 9 dicembre 1848 essendo riuscita completamente, e ben osservata sì a Padova che a Modena, io avrei tosto dovuto liberarne la mia promessa, in fine del 2.° Articolo, di esaminarne al confronto la duplice osservazione, e dedurne uno schiarimento alla promossa quistione circa la vera e più esatta differenza di longitudine fra le specole Padovana e Modenese. Con gentile sollecitudine mi aveva di fatto il ch. Cav. Santini comunicata la propria osservazione, che vidi poscia con piacere inviata da lui alla stessa Raccolta Scientifica, e pubblicata nel fascicolo di essa dell'Aprile a. c. insieme alla determinazione dell'istante della congiunzion vera per Padova e della simultanea latitudine della Luna. Dubitava io però che dall'unico novello confronto si potesse trarre un definitivo risolvimento della questione anzidetta, e che occorresse all'uopo raccogliere, e paragonare due serie di osservazioni comuni. Occupato d'altronde in estranee cure, senza dire delle distrazioni e amarezze dell'animo per l'orrendo scompiglio religioso e civile della nostra bella Italia, ho indugiato lungamente a calcolar l'occultazione di Aldebaran già da me osservata, e solo da pochi giorni essendomivi applicato, ne ottenni il risulta-

mento e le soddisfacenti deduzioni che ora son lieto di qui offerire.

Come ho detto, l'osservazione che riporto, è della sera 9 Dicembre 1848, un giorno prima che accadesse il plenilunio, è fatta in circostanze propizie di un cielo sereno. All' immersione la stella α del Toro mi scomparve istantaneamente, e sembrandomi essa per così dire sprofondata nella parte lunare oscura. Per l'emersione dalla parte opposta e illuminata impiegai l'ingrandimento più forte dell'eccellente cannocchiale di Fraunhofer, tanto che rividi la stella in contatto propriamente del lembo della Luna: ecco i tempi osservati

Immersione a $23^h.16'.\ 1'',5$	tempo siderale a Modena $= 6^h.1'45'',2$	tempo medio a Modena
Emersione .. 23. 59. 43, 4	= 6. 45. 9, 9	

In questa occasione io volli accertarmi accuratamente di non commettere errore nella quantità del tempo assoluta, e quindi aveva praticata qualche giorno innanzi; l' inversione del mio circolo meridiano, a fin di riconoscere la precisa deviazione della linea di fiducia, ossia dell'asse ottico del cannocchiale, e rettificarne insieme colle altre due deviazioni di livello e di azzimut i passaggi meridiani delle stelle dai quali ricavasi l'equazione dell' orologio e il tempo siderale corrispondente. L' orologio regolato a tal tempo è di Molyneux, e da qualche anno conserva un andamento equabilissimo. Però le occultazioni da me osservate riferendosi immediatamente ad altro orologio, io debbo trasferirne ogni volta il tempo a quello di Molyneux, ma ciò si ottiene per accordi prossimi alle osservazioni e in guisa che non può rimaner incertezza se non di alcun decimo di secondo. E così da questo lato mi affidai che la riportata osservazione è, quanto si può, esatta. Nell'istituirne poscia il calcolo di confronto colla osservazione contemporanea di Santini mi è grato dire, che debbo alla cortese amicizia di lui di averne superato una piccola difficoltà, che pure aveami arrestato per una di quelle fissazioni di mente, facili ad incontrarsi ne'calcoli pratici o di applicazione. Pertanto, fatto uso

del metodo di Carlini, e assumendo gli stessi dati dal Santini adoperati per la paralasse equatoriale; pel semidiametro e pei moti orarj della luna in longitudine, e alla mia latitudine geografica di 44.° 38′, 52″, 8 ho ritrovato in quantità di tempo medio a Modena.

L'istante della congiunzion vera della luna colla stella 1848 9 Dicembre 7^h, 17′, 11″, 7, e per tale istante la latitudine vera della luna = — 4°, 56′, 20″, 07.

Ho altresì rifatto col metodo stesso l'intero calcolo della osservazione di Santini, e ne ottenni in tempo medio di Padova l'istante della congiunzione vera dei due astri a 7^h, 20′, 56″,7 e simultaneamente la latitudine vera della luna = -4°,56′,19″,18. Una di quelle minime sviste di computo numerico, facili non meno ad intervenire agli stessi più esperti e forti calcolatori qual è di certo il Prof. Santini, lo condussero al risultato da lui trasmesso, e pubblicato nella *Raccolta Scientifica* (T. V. pag. 100), e che ora è da correggere, come l' Autore medesimo lealmente ne è convenuto scrivendomene. Alla stessa pagina 100 della *Raccolta* sono da corregere altri due errori di stampa, il 1.° nell' ora siderale della immersione osservata che è 23, invece di 22, il 2.° nel segno — che deve apporsi alla latitudine di Aldebaran invece che alla sua longitudine.

Ora comparando gl' istanti della congiunzione vera per Padova e Modena si ha la differenza de'rispettivi meridiani, ossia di longitudine = 3′, 45″ 00 in tempo medio, e in tempo sidereo, come tale differenza in generale dee prendersi = 3′, 45″, 65.

Vero è d'altra parte che i segnali a fuoco e istantanei, accesi sul Monte baldo la state dell'anno 1824 somministrarono, per medio di quaranta confronti assai concordi, il valor della suddetta differenza = 3′, 49″, 86 di tempo siderale. Ma intorno a ciò giova di fare alcuna riflessione. Il mezzo più sicuro e più semplice degl'indicati segnali per determinare le differenze di longitudine terrestre venne praticato e ripetuto parecchi anni di seguito, e precisamente del 1822 al 1827 inclusive nell' alta Italia, e altrettante volte se n'ebbero i confronti dei tempi fra i luoghi d'osservazione. Io vi presi parte quasi ogni volta insieme

cogli astronomi di Milano, Torino, Padova, Firenze e Bologna, cosicchè avrei potuto riconfermarne con essi, e metterne fuor di ogni dubbio, la relativa nostra posizione di longitudine (Veggansi le effem. di Milano alle Appendici del 1823 p. 27-63, del 1825 pag. 81-96, del 1826 pag. 45-142, del 1828 pag. 33-120, e del 1829 pag. 25-65). Disgraziatamente però la Specola Modenese non fu eretta e posta in attività di strumenti se non a mezza state dell'anno 1827, perlocchè all'occasion dei segnali negli anni antecedenti, per quantunque io m'industriassi con privati mezzi di ben riconoscere l'elemento indispensabile del tempo, tuttavia, mancandomene il mezzo diretto e migliore di uno strumento di passaggi, doveva di necessità restarmene qualche incertezza negl'istanti osservati dei segnali, fra i quali si trovaron pur compresi quelli del 1824 dati dalla vetta del Monte baldo. Dalla sommità medesima nell' estate del susseguente 1825 ripetevansi, e in molto maggior numero, que' fuochi, e se ne accendevano pur a tarda notte alcuni altri sul Monte Cimone, che riuscirono a far congiungere immediatamente Milano con Firenze. Allora io ebbi modo di montare provvisoriamente nella terrazza scoperta di una casa il grande cannocchiale del mio circolo meridiano, che mi servì qual istromento de'passaggi per conoscere la vera equazione siderea dell' orologio. Ed essendomi altresì riuscito di osservar in buona copia i mentovati segnali, sì del Cimone che del Monte baldo, ne trassi fiducia maggiore pel medio valore de' miei risultamenti. Se non che qualche ombra di dubbio pur mi rimaneva per aver io dovuto trasportar il tempo sopra orologi a mano fra tre luoghi assai disgiunti; mentre l' orologio astronomico stava nella mia casa, in quella d' altri era collocato il cannocchiale meridiano, e per veder i segnali mi conveniva ogni notte ascendere la torre del R. Palazzo che poscia è divenuta Specola. Fortunatamente la fabbrica di questa si trovò appena compiuta, ed io m' affrettai di collocarvi per primo il grande strumento di passaggi d'Amici coll'orologio vicino, quando nell'estate del 1827 si combinò di accendere per ultima verificazione alcuni segnali istantanei sul monte della Maddalena, al

nord-est, e poco distante da Brescia. Benchè que' segnali fossero scarsi di numero, e a stento da me veduti attesa la lontananza, e la poca elevazione del detto monte, cionullameno la determinazione che ne risultò per la mia differenza di longitudine con Milano e Padova (effem. di Milano del 1829 nell' Appendice pag. 60) fu la meglio fondata regolare e sicura, e ad essa perciò è duopo attenersi di preferenza; tanto più, che la stessa è pienamente concorde a quella in altro modo somministrata dalle misure geodetiche (effem. di Milano del 1823 nell'Appendice pag. 62).

Aprasi ora l'effemeride di Berlino del 1849, e alla pag. 455 dal Catalogo ivi riportato delle posizioni geografiche de'principali Osservatorj si rileverà la differenza di longitudine fra Padova e Modena in tempo = 3′, 45″, 90 solo di 0″, 25 maggiore dell'ottenuta precedentemente dall'occultazione d'Aldebaran. Non è detto veramente alla citata pagina a quali fonti abbia attinto il ch. Raccoglitore Sig. Dott. Wolfers: però aggiungesi a pagina 533 ch'egli ogni anno va correggendo e perfezionando quel suo Catalogo.

Aprasi ancora il Nautical Almanac di Londra dello stesso anno corrente, e alla pagina 594-95 da un simile ma più copioso Catalogo delle posizioni terrestri de'principali Osservatorj si vedrà la differenza de' meridiani di Padova e Modena = 3′. 46″, 90 maggiore della nostra precedente di 0″, 35. Ivi poi anche accennasi espressamente la posizione di Modena essere stata presa dall'effemeridi di Milano del 1829, alla pagina 70 quanto alla longitudine, e quanto alla latitudine alla pag. 94 dell'Appendice.

Concludiamo che dunque la differenza di longitudine fra Padova e Modena è ormai assicurata in numeri rotondi e in tempo siderèo = 3′, 46″, accordandosi in questo valore quasi esattamente una occultazione di Aldebaran, la determinazione relativa dei segnali a fuoco istantanei, e le operazioni o misure geodetiche. Di questa guisa mi pare sciolta compiutamente la questione dei 10″ in tempo di discordanza fra il risultamento dei segnali, e quello delle occultazioni; discordanza di 2′, 30″

in arco, la quale sarebbe obbrobriosa e insoffribile sopra un elemento fondamentale di un pubblico Osservatorio. Per le due occultazioni di Aldebaran e di Gemelli discusse dal Prof. Santini, mio maestro ed amico, e che gli porsero un valore di 6″ più piccolo del vero, sarebbe da riandarne con ogni scrupolo ed attenzione gli elementi tutti del calcolo, da che non mi ricuso a miglior agio ed opportunità. Ma nel momento reputo cosa più gradita e di qualche interesse il trattenermi ancora sopra una recente e duplice occultazione lunare delle stelle α e γ Toro, che pur è stata felicemente e pienamente osservata sì dal Prof. Santini che da me.

Tale doppia occultazione accadeva la notte del 29 Novembre poc'anzi spirato, insieme ad altre di varie stelle del Toro, cospicue bensì, ma non tanto come le nominate, e difficili ad osservarsi in vicinanza del plenilunio. Ne reco qui tosto la mia osservazione che ho giudicata e ritengo schiettamente per ottima in ciascun istante notato.

29 Novembre 1849

γ Toro	Immersione a	1^h. 3′.21″,3	di tempo sid. in Modena	.... 8^h. 29′ 4″,4	di tempo med. in Modena
	Emersione	2. 0. 3, 1		9. 25. 35,3	
α Toro	Immersione a	9.16.19,9	tempo sid. in Modena	.... 16. 40. 42, 6	di tempo med. in Modena
	Emersione ...	10.12.39,8		17. 26. 53, 3	

Il cielo fu propizio, per serenità costante, all'una ed all'altra, riuscendo solo alquanto molesto all' osservatore, specialmente nell'ora mattutina, il freddo a — 4.° del termometro. Accadeva il plenilunio appena pochi minuti avanti l' occultazione di Aldebaran, cosicchè la stella appariva in contatto del lembo lunare illuminato sì all'ingresso che alla sortita; la quale circostanza della fase ha renduto necessario il servirsi a ciascun punto di queste osservazioni di forte cannocchiale a massimo ingrandimento, che meno affatica l' occhio nella parte affisata della luna. Per me la γ Toro disparìva momentaneamente in

contatto di un'estrema punta montuosa e illuminata del lembo lunare a Oriente, e Aldebaran similmente mi dispariva, ma in una valle o cavità dello stesso illuminato contorno. A ben cogliere le emersioni, io ne aveva fissato ciascuna volta il preciso luogo del lembo lunare a occidente, valendomi a ciò parzialmente del cannocchiale della paralattica (troppo debole e insufficiente d'altronde all'osservazion totale), fermando cioè la stella, poco innanzi l'immersione, sotto il filo equatoriale e mirando al punto diametralmente opposto , col dovuto riguardo al moto lunare in declinazione per l'intervallo dell'occultamento. Così l'una e l'altra stella mi riapparve puntualmente e in un lampo, dove coll'occhio, lungamente fisso ma non divagato, io le attendeva. E avvertirò pure che numerando io da me solo il tempo alle battute del pendolo, dopo ciascuna osservazione io proseguo a numerarlo finchè abbia letto e verificato sul quadrante dell'orologio il notato istante : avvertenze minute sì, ma che aggiungon fiducia nelle quantità osservate.

Un particolare fenomeno però, da me rilevato nella recente occultazione di Aldebaran, mi sembra degno di attenzione e di venir esposto. A qualche distanza dalla luna, sì prima dell'immersione che dopo l'emersione, la stella, di un bel colore giallo aranciato, mi offeriva l'aspetto di un circolar disco ben contornato e di splendor uniforme e tranquillo. Pochi secondi prima d'immergersi nell'abbagliante disco lunare cominciò essa a scemar di grandezza, e proseguiva gradatamente a impicciolirsi , finchè sul disco stesso della luna, e per un istante non era essa che un punto raggiante, assai più risplendente nondimeno, come altra volta io rifletteva, di un simil punto lunare che fosse isolato e a confronto con quello in campo oscuro. All'emersione le apparenze medesime, solamente in ordine inverso. Ei giova quì ricordarsi che in altre occultazioni entrando Aldebaran nella parte oscura della luna o uscendone , a parità di propizie circostanze atmosferiche, essa dispare o ricomparisce di un tratto, senza la minima diminuzion progressiva, o il simile aumento dell'apparente suo diametro. Cotai fenomeni unitamente ad altri che presentan le stelle più brillanti gettar possono

molto lume su la vera cagion fisica dell'apparente diametro di tali stelle, e dell' altro analogo effetto di una luce vivissima denominato l'irradiazione, che sensibilmente accresce il diametro de'Corpi luminosi e men lontani qual è il sole. Mi basta per ora di aver avvertito un fatto importante che a quella cagione si riferisca.

Ad altro tempo del pari il calcolo e risultamento delle due ultime occultazioni osservate; benchè ne abbia sott' occhio eziandio la compiuta osservazione fattane dal collega prof. Santini e da lui graziosamente comunicatami il seguente mattino del giorno 30. Qui non la unisco, proponendosi l' autore medesimo di darne parte a codesta Raccolta scientifica.

Pertanto le occultazioni lunari di Aldebaran avvenuta l'anno 1848, e colla precedente del 1849, ci offerirono le variazioni pressochè tutte delle circostanze principali, rispetto all' ora del fenomeno, alla base della luna, ad altre e simili. Per l'ultima io sono stato appieno indennizzato della privazione di quella del 1 Giugno 1848, impeditami dalle nubi e dal novilunio; e ne ho pure completata colla doppia osservazione riuscitami quella del 22 Agosto susseguente. L'anno che è presso a spuntare ci addurrà esso pure alcune occultazioni della stella medesima per la Luna, le quali giovera di non trascurare.

Modena, 5 Decembre 1849.

SULLA INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONI DIFFERENZIALI

STUDII

DEL DOTT. GASPARE MAINARDI,

Professore Ord. nell' I. R. Università di Pavia ec.

Ho raccolto in questo scritto alcune equazioni differenziali dotate di qualche generalità, ed alcuni metodi di qualche estensione, forse inosservati, che mi si offersero nelle esercitazioni. Ho risoluto ancora varie questioni importanti, che non credo discusse, ed ho aggiunte alla dottrina generale delle equazioni differenziali lineari alcune notizie le quali estendono alquanto l'analogia colle equazioni algebraiche, coltivata con predilezione dai Geometri di primo ordine. Nello studio de'varii argomenti mi sono attenuto possibilmente alla disposizione seguita nei Trattati che godono maggiore estimazione. Per indicare la derivazione mi valgo talvolta degli apici di Lagrange; ovvero della caratteristica d ponendovi in alto il numero esponente l'ordine della derivazione, ed al piede la variabile, alla quale si riferisce: ma ometto la variabile quando non ne venga confusione.

§, 1.° Rappresento colla scrittura abbreviata

$$(1) \qquad \sum_{r=0}^{r=m} A_r . d_x^r y = \varphi(x)$$

una equazione differenziale lineare dell'ordine m, nella quale y è la funzione incognita di x; A_1, A_2 . . . . $\varphi(x)$ funzioni note della stessa variabile. Se i coefficienti A_1, A_2 . . . . sono costanti, indicata con a una radice multipla secondo il numero n della equazione ausiliaria

$$(2) \qquad \sum_{r=0}^{r=m} A_r z^r = 0,$$

onde siano

$$\sum_{r=0}^{r=m} A_r z^r = (z - a)^n \sum_{r=0}^{r=m-n} B_r z^r,$$

$$A_1 = B_1 - na, \qquad A_2 = B_2 - naB_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} a^2,$$

$$A_3 = B_3 - naB_2 + \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 B_1 - \frac{n(n-1)(x-2)}{1.2.3} a^3, \text{ ec...}$$

fatto

$$d^{m-n}y + B_1 d^{m-n-1}y + B_2 d^{m-n-2}y \ldots + B_{m-n}y = u,$$

dalla equazione (1) caveremo di seguito

$$d^n u - nad^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 d^{n-2}u \ldots \pm a^n u = \varphi(x),$$

$$d^n(ue^{-ax}) = e^{-ax}\varphi(x),$$

$$(3) \qquad u = e^{ax} \int^{(n)} e^{-ax}\varphi(x)(dx)^n.$$

Se la radice a fosse immaginaria conjugata con b, supposto

$$d^{m-2n}y + C_1 d^{m-2n-1}y + C_2 d^{m-2n-2}y + \ldots + C_{m-2n}y = v,$$

siccome

$$A_1 = C_1 - n(a+b), \; A_2 = C_2 - n(a+b)C_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}(a^2+b^2) + n^2 ab$$

$$A_3 = C_3 - n(a+b)C_2 + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}(a^2+b^2) + n^2 ab\right)C_1$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(a^3+b^3) - \frac{n(n-1)}{1.2} n.ab(a^2+b^2), \text{ ec.}$$

avremo

$$v = e^{bx} \int^{(n)} e^{(a-b)x} \left(\int^{(n)} e^{-ax}\varphi(x)(dx)^n\right) dx^n.$$

Il metodo d'integrazione, che ho indicato, il quale è il comune esposto con qualche variazione, si applica ad innumerevoli equazioni a coefficienti variabili. Sia

$$(\alpha) \qquad d^2y + p.dy + (dr + pr - r^2)y = \varphi(x),$$

essendo p, r, φ funzioni date di x: ed avremo di seguito

$$d(dy + ry) + (p - r)(dy + ry) = \varphi(x),$$

$$dy + ry = e^{-\int(p-r)dx}\int\varphi(x)e^{\int(p-r)dx}dx.$$

Supponiamo

$$p = \frac{\omega}{a + bx + cx^2}, \quad r = \frac{\alpha + \beta x}{a + bx + cx^2},$$

$$dr + pr - r^2 = \frac{\theta}{(\alpha + bx + cx^2)^2},$$

la equazione

$$d^2y + \frac{\omega}{a + bx + cx^2}dy + \frac{\theta}{(a + bx + cx^2)^2}y = \varphi(x)$$

si integrerà col metodo indicato, quando sia

$$\theta = (a + \beta x)\omega - (c + \beta)(2\alpha x + \beta x^2) - (\alpha^2 + b\alpha - a\beta)$$

Se θ è costante, $\omega = 0$, $\beta = -c$, $\alpha^2 + b\alpha - a\beta = \theta$, si ha l'equazione integrata dal Sig. Besge (*).

Anche la equazione di Eulero (**)

$$d^2y + \frac{c + ex}{x(a + bx)}dy + \frac{f + gx}{x^2(a + bx)}y = 0$$

si integra come la (α) se

$$(ag - bf)^2 = (ae - bc)[f(b - e) - g(a - c)];$$

e così l'altra (**)

(*) Iournal de Mathemat. par M. Liouville T. 9.

(**) Novi Coment. Acad. Petrop. Tom. 7 et 8.

$$d^2y + \frac{\partial + ex}{a + bx + cx^2} dy + \frac{f}{a + bx + cx^2} y = 0$$

se
$$e + f = 0 ,$$

fatto
$$r = \frac{f}{\partial - fx} ;$$

oppure se

$$e = fn + \frac{1+n}{n} c, \ \partial = fm + a \frac{1+n}{m}, \ an^2 + bm^2 - bmn = 0.$$

La equazione

$$d^2y + \frac{a + bx^2}{x(1 - x^2)} dy + \frac{c}{1 - x^2} y = 0,$$

che comprende una famosa di Legendre (*), si presta allo stesso modo, quando sia

$$c = (1 + a)(2 + a + b) ,$$

fatto

$$r = \frac{c}{1+a} \frac{x}{1-x^2} ;$$

oppure

$$a = 0 , \ c = - \frac{b(b + 2)}{4} ,$$

fatto

$$r = \frac{b+2}{2} \frac{1}{1-x} :$$

e si ha una equazione analoga ad altra risoluta dal Sig. Wantzel cogli integrali definiti (**).

La equazione

$$(1) \qquad d^2y + \frac{c + \partial x^n}{a + bx^n} dy + \frac{f + gx^n}{a + bx^n} y = 0 ,$$

(*) Traitè des fonct. elliptiques T. I. pag. 63.

(**) Comptes rendus.

essendo

$$(ag - bf)^2 = (a\partial - bc)(gc - \partial f),$$

fatto

$$A = \frac{gc - \partial f}{ag - bf},$$

può integrarsi, sottoposta alla forma

$$d(dy + Ay) + \left(\frac{c + \partial x^n}{a + bx^n} - A\right)(dy + Ay) = 0:$$

e la seguente

$$d^2y + \frac{c + \partial x^n + qx^m}{a + bx^n + px^m} dy + \frac{f + gx^n + rx^m}{a + bx^n + px^m} y = 0$$

quando siano

$$(ag - bf)^2 = (a\partial - bc)(gc - \partial f),$$

$$(ag - bf)(rc - qf) = (ar - pf)(gc - \partial f),$$

assume la forma

$$d(dy + Ay) + \left(\frac{c + \partial x^n + qx^m}{a + bx^n + px^m} - A\right)(dy + Ay) = 0.$$

La equazione di Pfaff

$$d^2y + \frac{c + \partial x^n}{a + bx^n} \cdot \frac{1}{x} dy + \frac{f + gx^n}{a + bx^n} \cdot \frac{1}{x^2} y = 0,$$

suppostovi $x = e^t$, essendo e la base iperbolica, fornisce

$$d^2y + \frac{(c - a) + (\partial - b)e^{nt}}{a + be^{nt}} dy + \frac{f + ge^{nt}}{a + be^{nt}} y = 0,$$

la quale, se

$$(ag - bf)^2 = (a\partial - bc)\,[g(c - a) - f(\partial - b)]$$

s'integra come la (1) antecedente.

La equazione

$$(\beta) \qquad d^2y + 2p.dy + (dp + p^2 + r)y = \varphi(x),$$

ossia $$d^2(ye^{\int p dx}) + r(ye^{\int p dx}) = \varphi(x)e^{\int p dx};$$

se r è costante, oppure

$$r = -\frac{d^2\omega}{\omega},$$

fatto $$ye^{\int p dx} = u,$$

ci dà

$$u = \omega\int\frac{1}{\omega^2}dx\int\omega\varphi e^{\int p dx}.dx$$

Troveremo nella stessa maniera innumerabili equazioni di tutti gli ordini, alle quali si applica il nostro metodo di integrazione: e tutte le volte che avremo ad integrare una equazione lineare, ai tentativi noti gioverà aggiungere pure quello di ridurla all'una o all'altra forma (α), (β).

Per comprovare l'importanza e la estensione dell'argomento, del quale ci occupiamo, mi propongo di stabilire le condizioni essenziali alla equazione generale

$$(h)\quad (a_0+b_0x)d^ny + (a_1+b_1x)d^{n-1}y + (a_2+b_2x)d^{n-2}y \ldots + (a_n+b_nx)y = 0$$

perchè possa integrarsi col metodo proposto. Essa dovrà ridursi alla forma

$$d[(a_0+b_0x)d^{n-1}y+(\alpha_1+\beta_1x)d^{n-2}y + (\alpha_2+\beta_2x)d^{n-3}y \ldots, + (\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}x)y]$$
$$+ h[(\alpha_0+b_0x)d^{n-1}y + \ldots + (\alpha_{n-1}+b_{n-1}x)y] = 0;$$

l'identità delle quali equazioni importa che siano

$$\beta_1 = b_1+hb_0,\ \beta_2 = b_2+hb_1+h^2b_0,\ \beta_3 = b_3+hb_2+h^2b_1+h^3b_0 \ldots$$
$$\beta_{n-1} = b_{n-1}+hb_{n-2}+h^2b_{n-3} \ldots + h^{n-1}b_0$$
$$\alpha_1 = (a_1+ha_0)-b_0,\ \alpha_2 = (a_2+ha_1+h^2a_0)-(b_1+2hb_0),$$
$$\alpha_3 = (a_3+ha_2+h^2a_1+h^3a_0)-(b_2+2hb_1+3h^2b_0) \ldots$$
$$\alpha_{n-1} = (a_{n-1}+ha_{n-2} \ldots + h^{n-1}a_0)$$
$$-[b_{n-2}+2hb_{n-3}+3h^2b_{n-4} \ldots + (n-1)h^{n-2}b_0]$$

ed anche

$$b_n + h\beta_{n-1} = 0 \ , \quad \beta_{n-1} = a_n + h\alpha_{n-1} \ .$$

Supposti per brevità

$$b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n = \mathrm{E}(z) \ ,$$

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n = e(z) \ ,$$

eliminate da quelle equazioni α, β, concludiamo che h deve rendere

$$(k) \qquad \mathrm{E}(z) = 0 \ , \qquad e(z) = \mathrm{dE}(z);$$

e l'integrale della (h) sarà

$$(a_0 + b_0 x)\mathrm{d}^{n-1}y + (\alpha_1 + \beta_1 x)\mathrm{d}^{n-2}y + \ldots + (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}x)y = \mathrm{C}.e^{-hx}.$$

Affinchè anche questa equazione si possa trattare come la (h), dovranno sussistere contemporaneamente le relazioni che seguono

$$b_0 z^{n-1} + \beta_1 z^{n-2} + \beta_2 z^{n-3} \ldots + \beta_{n-3} = b_0 z^{n-1} + (b_1 + hb_0)z^{n-2}$$
$$+ (b_2 + hb_1 + h^2 b_0)z^{n-3} + \ldots = \frac{\mathrm{E}(z)}{z-h}$$

$$a_0 z^{n-1} + [(a_1 + ha_0) - b_0]z^{n-2} + [(a_2 + ha_1 + h^2 a_0) - (b_1 + 2hb_0)]z^{n-3}$$
$$+ [(a_3 + ha_2 + h^2 a_1 + h^3 a_0) - (b_2 + 2hb_1 + 3h^2 b_0)]z^{n-4} + \ldots.$$
$$= (n-1)b_0 z^{n-2} + (n-2)(b_1 + hb_0)z^{n-3}$$
$$+ (n-3)(b_2 + hb_1 + h^2 b_0)z^{n-4} + \ldots,$$

vale a dire

$$\frac{e(z) - e(h)}{z-h} = nb_0(z^{n-2} + hz^{n-3} + h^2 z^{n-4} \ldots)$$
$$+ (n-1)b_1(z^{n-3} + hz^{n-4} + h^2 z^{n-5} \ldots)$$
$$+ (n-2)b_2(z^{n-4} + hz^{n-5} \ldots)$$
$$= \frac{1}{z-h}[nb_0(z^{n-1} - h^{n-1}) + (n-1)b_1(z^{n-2} - h^{n-2}) + (n-2)b_2(z^{n-3} - h^{n-3}) + \ldots]$$

onde

$$e(z) - e(h) = d_z E(z) - d_h E(h),$$

e siccome

$$e(h) = d_h E(h),$$

le equazioni (k) dovranno avere due radici comuni. Così affinchè la (h) si riduca al primo ordine, le equazioni (k) dovranno av re $n-1$ radici comuni, le quali forniscono i moltiplicatori della forma e^{-hx}; epperò, indicata con l la radice della prima equazione (k) che non soddisfa alla seconda, le due seguenti

$$z^{n-1} + \frac{a_0 b_2 - b_0 a_2 + (n-1) b_0 b_1}{a_0 b_1 - b_0 a_1 + n b_0^2} z^{n-2} + \frac{a_0 b_3 - b_0 a_3 + (n-2) b_0 b_2}{a_0 b_1 - b_0 a_1 + n b_0^2} z^{n-3} \ldots = 0$$

$$z^{n-1} + \frac{b_1 + b_0 l}{b_0} z^{n-2} + \frac{b_2 + b_1 l + b_0 l^2}{b_0} z^{n-3} + \ldots = 0,$$

dovendo essere identiche, forniranno $n-1$ equazioni lineari, d'onde caveremo a_2, a_3,... a_n date per a_0, a_1, b_0, b_1 .... b_n.

§. 2.° In una Memoria (*) ho fatto qualche studio intorno la integrazione delle equazioni differenziali lineari, i coefficienti delle quali siano funzioni intere della variabile, ed ho notato che essendo y l'incognita dipendente da x, se si pone

$$y = \int_\alpha^\beta e^{tx} . z . dx$$

ove z è funzione ignota di t, la determinazione di z dipende da una equazione lineare, l'ordine della quale è il grado massimo dei coefficienti della equazione in y; e reciprocamente il grado dei coefficienti formati con t eguaglia l'ordine della equazione differenziale in y. I limiti α e β si determinano mediante una equazione richiesta essenzialmente dal metodo. Colla stessa analisi il ch. sig. Lobatto (**) integrava la equazione

$$d^n y = xy,$$

(*) Annali del Regno Lombardo-Veneto T. 7. 1837.

(**) Giornale del Sig. Crelle 1837.

cui fece molta lode il Sig. Moigno (*). Riprendo la seguente

$$(1)\quad (a_2+b_2x)d^2y+(a_1+b_1x)dy+(a_0+b_0x)y=0,$$

esaminata in quella mia memoria, per farvi qualche aggiunta. Posto

$$y=\int_\alpha^\beta ze^{tx}.dt\,,$$

siccome

$$\int_\alpha^\beta xze^{tx}dt=z_\beta e^{\beta x}-z_\alpha e^{\alpha x}-\int_\alpha^\beta e^{tx}.d_tz.dt,$$

la equazione (1) si riduce alla

$$(b_0+b_1\beta+b_2\beta^2)z_\beta e^{\beta x}-(b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2)z_\alpha e^{\alpha x}$$

$$+\int_\alpha^\beta\Big[[(a_0+a_1t+a_2t^2)-(b_0+2b_1t)]z-(b_0+b_1t+b_2t^2)d_tz\Big]e^{tx}dt=0$$

la quale decompongo nella

$$d_t.\log(b_0+b_1t+b_2t^2)z=\frac{a_0+a_1t+a_2t^2}{b_0+b_1t+b_2t^2}=d_t\psi(t),$$

ed ai limiti

$$(b_0+b_1t+b_2t^2)z_t.e^{tx}=0;$$

essendo

$$\psi(t)=m_0t+\log(b_0+b_1t+b_2t^2)^{m_1}+m_2\int\frac{1}{b_0+b_1t+b_2t^2}.dt$$

$$m_0=\frac{a_2}{b_2}\,,\quad m_1=\frac{a_1b_2-b_1a_2}{2b_2^2}\,,\quad m_2=\frac{a_0b_2-b_0a_2}{b_2}-m_1.b_1\,,$$

ed ai limiti

$$e^{tx}.e^{\psi(t)}=0.$$

Se

$$b_2t^2+b_1t+b_0=b_2(t-a)(t-b),$$

(*) Traité de Calcul differ. et integ. T. 2. pag. 648.

ed a, b reali, fatto

$$\frac{m_2}{b_2}(a-b)=c\,,$$

saranno

$$z(b_0+b_1t+b_2t^2)=C.e^{m_0t}(t-a)^{m_1+c}(t-b)^{m_1-c}\,;$$

$$y=C\int_\alpha^\beta e^{(m_0+x)t}(t-a)^{m_1+c-1}(t-b)^{m_1-c-1}.dt,$$

ed ai limiti

$$e^{t(m_0+x)}\,(t-a)^{m_1+c}\,(t-b)^{m_1-c}=0\,.$$

Se $m_0+x>0$, porremo $\beta=-\infty$. Se $m_0+x<0$, $\beta=\infty$. Se m_1+c, oppure m_1-c, o entrambi sono positivi, supporremo α eguale ad a, oppure a b, o avremo due valori di α, quindi due integrali particolari.

Se

$$m_1+c=1\,,\quad m_0+x>0\,,\quad 1>2c\,,$$

sarà

$$y=\int_b^{-\infty}\frac{e^{(m_0+x)t}}{(t-b)^{2c}}\,dt=e^{b(m_0+x)}\int_0^\infty\frac{e^{-(m_0+x)t}}{t^{2c}}\,dt$$

$$=(x+m_0)^{2c-1}e^{b(m_0+x)}.$$

Supponiamo

$$b_1^2+4b_0b_2<0\,,$$

ed indicate con

$$m\pm\sqrt{n}\sqrt{-1}$$

le radici a, b, fatto

$$t=m+\omega\sqrt{-1},$$

onde

$$b_2t^2+b_1\,t+b_0=b_2(n-\omega^2)\,,\quad b_1=-2mb_2\,,\quad b_0=(m^2+n)b_2$$

$$\psi=mm_0+m_1\log b_2(n-\omega^2)+\left[m_0\omega+\frac{m_2}{2nb_2}\log\frac{\sqrt{n}+\omega}{\sqrt{n}-\omega}\right]\sqrt{-1},$$

la equazione

$$(a_2+b_2x).d^2y+(a_1-2mb_2x)dy+[a_0+(m^2+n)b_2x]\,y=0$$

avrà per integrale

$$y=e^{mx}\int_{\alpha}^{\beta}(n-\omega^2)^{m_1-1}\left[\cos\left((m_0+x)\omega+\frac{m_2}{2nb_2}\log\frac{\sqrt{n+\omega}}{\sqrt{n-\omega}}\right)\right.$$

$$\left.+\sqrt{-1}\,\text{sen}(\text{idem})\right]d\omega$$

ove

$$m_0=\frac{a_2}{b_2}\,,\ m_1=\frac{a_1+2ma_2}{2b_2}\,,\ m_2=a_0-(m^2+n)a_2+2mm_1b_2$$

ed ai limiti

$$(n-\omega^2)^{m_1}=0.$$

Se $m_1>0$, supporremo

$$\alpha=-\sqrt{n}\,,\ \beta=\sqrt{n}\,:$$

Se $m_1<0$,

$$\alpha=-\infty\,,\ \beta=\infty\,.$$

Essendo $m_2=0$, m_1 intero negativo, fatto $m_1=-r$, siccome

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos bx}{(\alpha+x^2)^i}dx=\frac{\pi(-1)^i}{2}\,\mathrm{d}_{\alpha}^{i}\,\frac{e^{-b\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}\,,$$

l'integrale della

$$(a_2+b_2x)\mathrm{d}^2y-2(ma_2+rb_2+2mb_2x)\mathrm{d}y$$

$$+[(m^2+n)a_2-2mm_1b_2+(m^2+n)b_2x]\,y=0$$

si presenta sotto la forma singolarissima

$$y=e^{mx}\left[\mathrm{A}.\mathrm{d}_n^{r+1}\frac{\text{sen}\left(x+\frac{a_2}{b_2}\right)\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\mathrm{B}\mathrm{d}_n^{r+1}\frac{\cos\left(x+\frac{a_2}{b_2}\right)\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right].$$

Se

$$m=0,\ a_2=0,$$

la equazione

$$(2)\qquad x\mathrm{d}^2y+2m_1.\mathrm{d}y+nxy=0$$

avrà per integrale

$$y=\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}(n-\omega^2)^{m_1-1}\cos(x\omega)d\omega=\int_0^1(1-\omega^2)^{m_1-1}\cos(x\omega\sqrt{n}).d\omega$$

il quale nel caso di m_1 intero positivo si riduce a forma finita. Ma non è così dell'integrale completo, perchè indicata con $y=\theta$ quella soluzione, essendo

$$xd^2y+2m_1dy+nxy=0\,,\quad xd^2\theta+2m_1d\theta+nxy=0,$$

ne segue

$$xd(\theta dy-yd\theta)+2m_1(\theta dy-yd\theta)=0\,,$$

ossia

$$d[x^{2m_1}(\theta dy-yd\theta)]=0\,,\quad \theta dy-yd\theta=Cx^{-2m_1}$$

e finalmente

$$y=\theta\int\frac{x^{-2m_1}}{\theta^2}dx\,.$$

Quest' ultima equazione (2) venne posteriormente (*) studiata con molta diligenza dai Sigg. Serret e Liouville.

§. 3.° Alle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti tien dietro la seguente

$$d^ny+\frac{\alpha_1}{a+bx}d^{n-1}y+\frac{\alpha_2}{(a+bx)^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{(a+bx)^n}y=0$$

integrata da Eulero, e che Laplace ridusse ad altra coi coefficienti costanti. La stessa riduzione si applica ad altre equazioni (**): Sia data

$$d^2y+p.dy+q.y=0$$

essendo p, q funzioni di una variabile primaria x. Indicando cogli apici le derivate rispetto ad altra variabile, avremo

$$y''+\left[p+\left(\frac{1}{x'}\right)'\right]x'y'+qyx'^2=0;$$

(*) Journal par M. Liouville année 1844.

(**) Avendo comunicato questo pensiero al chiar. Sig. Cav. Bordoni, mi disse di averne fatto cenno in un suo Trattato di Calcolo Sublime.

e se

$$qx'^2 = \mathrm{B}, \quad \left[p + \left(\frac{1}{x'}\right)'\right]x' = \mathrm{A},$$

cioè costanti, la integrazione della prima equazione dipende dalla

$$y'' + \mathrm{A}y' + \mathrm{B}y = 0.$$

Sia

$$q = \frac{\alpha^2 \mathrm{B}}{(a + bx)^m}$$

onde

$$\frac{1}{x'} = \frac{\alpha}{(a+bx)^{\frac{m}{2}}}, \quad \left(\frac{1}{x'}\right)' = -\frac{mb}{2}\,\frac{1}{a+bx},$$

ed avremo la equazione

$$d^2y + \frac{\mathrm{A}\alpha + \frac{mb}{2}(a + bx)^{\frac{m}{2} - 1}}{(a + bx)^{\frac{m}{2}}} dy + \frac{\mathrm{B}\alpha^2}{(a + bx)^m} y = 0,$$

e l'integrale

$$y = \mathrm{M}e^{\frac{h\alpha}{\left(1 - \frac{m}{2}\right)b}(a + bx)^{-\frac{m}{2} + 1}} + \mathrm{N}e^{\frac{k\alpha}{\left(1 - \frac{m}{2}\right)b}(a + bx)^{-\frac{m}{2} + 1}}$$

essendo h, k radici di

$$z^2 + \mathrm{A}z + \mathrm{B} = 0.$$

Se $m = 2$, abbiamo il caso di Eulero.

Sia

$$q = \frac{\alpha^2 \mathrm{B}}{\mathrm{sen}^2(a + bx)},$$

onde

$$\frac{1}{x'} = \frac{\alpha}{\mathrm{sen}(a + bx)},$$

avremo la equazione

$$d^2y + \frac{A\alpha + b\cos(a + bx)}{\operatorname{sen}(a + bx)} dy + \frac{\alpha^2 B}{\operatorname{sen}^2(a + bx)} y = 0,$$

e l'integrale

$$y = M\left(\operatorname{tang}\frac{a+bx}{2}\right)^{\frac{k\alpha}{b}} + N\left(\operatorname{tang}\frac{a+bx}{2}\right)^{\frac{k\alpha}{b}}.$$

Farò notare in appresso come lo studio della geometria sferica, desunto dalle latitudini e longitudini dei punti, conduca ad equazioni affette da coefficienti trigonometrici, siccome l'ultima considerata. Credo pure di qualche utilità l'avvisare le varie forme d'integrali che mano mano si vanno presentando.

Se nell'ultima equazione poniamo

$$\operatorname{sen}(a + bx) = t,$$

si trasforma nella

$$d_t^2 y + \left(\frac{A\alpha}{\sqrt{(1-t^2)}} + \frac{b(1-2t^2)}{1-t^2}\right)\frac{1}{bt} d_t y + \frac{\alpha^2 B}{b^2 t^2 (1-t^2)} = 0,$$

e se $A = 0$, si ha

$$d_t^2 y + \frac{1-2t^2}{(1-t^2)t} d_t y + \frac{\alpha^2 B}{b^2 t^2 (1-t^2)} y = 0$$

che ha simiglianza con quella di Legendre superiormente ricordata; Ma ancora più notabile è la seguente

$$d^2y - \frac{x}{1-x^2} dy + \frac{a}{1-x^2} y = 0,$$

pure analoga alla stessa di Legendre, per la quale, fatto

$$x' = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{(1-x^2)},$$

si hanno $A = 0$, $B = 1$,

$$y = M\operatorname{sen}(\sqrt{a}.\operatorname{Ang}\operatorname{sen}x) + N\cos(\sqrt{a}.\operatorname{Ang}\operatorname{sen}x),$$

integrale che diventa algebrico finito allora che a sia intero quadrato.

§. 4.° Laplace ha conseguita una singolare espressione delle equazioni differenziali lineari per mezzo degli integrali particolari, alla quale si può pervenire con molta speditezza nel seguente modo. Sia y la funzione ignota; p, q, r, s . . . gli integrali particolari della equazione lineare in y: A, B, C .... tante costanti, onde

$$y = Ap + Bq + Cr + Ds \ldots .$$

Indicata cogli apici la derivazione, caviamo di seguito

$$\frac{y}{p} = A + B\frac{q}{p} + C\frac{r}{p} + D\frac{s}{p} \ldots ,$$

$$\left(\frac{y}{p}\right)' = B\left(\frac{q}{p}\right)' + C\left(\frac{r}{p}\right)' + D\left(\frac{s}{p}\right)' \ldots .$$

$$\left(\frac{y}{p}\right)' : \left(\frac{q}{p}\right)' = B + C\left(\frac{r}{p}\right)' : \left(\frac{q}{p}\right)' + D\left(\frac{s}{p}\right)' : \left(\frac{q}{p}\right)' \ldots ;$$

$$\left[\left(\frac{y}{p}\right)' : \left(\frac{q}{p}\right)'\right]' = C\left[\left(\frac{r}{p}\right)' : \left(\frac{q}{p}\right)'\right]' + D\left[\left(\frac{s}{p}\right)' : \left(\frac{q}{p}\right)'\right]' + \ldots$$

$$\left\{\left[\left(\frac{y}{p}\right)' : \left(\frac{q}{p}\right)'\right]' : \left[\left(\frac{r}{p}\right)' : \left(\frac{q}{p}\right)'\right]'\right\}'$$

$$= D\left\{\left[\left(\frac{s}{p}\right)' : \left(\frac{q}{p}\right)'\right]' : \left[\left(\frac{r}{p}\right)' : \left(\frac{r}{p}\right)'\right]'\right\}' + \ldots .$$

Rinnovando tale operazione finchè siano tolte tutte le costanti, si ottiene la trasformazione ricordata, della quale indicherò varie notabili applicazioni.

Si voglia scoprire la forma generale delle equazioni di cui gli integrali particolari sono le potenze intere di una stessa funzione p? Dovendo essere

$$q = p^2 , \; r = p^3 , \; s = p^4 \ldots$$

la equazione sarà

$$\left(\left(\left(\cdots\cdots\left(\left(\left(\left(\frac{y}{p}\right)'\!:p'\right)'\!:p'\right)'\!:p'\right)'\cdots\cdots\right)\right)'\!:p'\right)'=0.$$

Il primo membro di questa è una formola essenziale nella trasformazione delle variabili, la quale prendo a svolgere, non ricordando d'averla altrove notata. Siano

$$\left(\frac{y}{p}\right)'=u,\ p'=q,$$

e supposte eseguite n poi $n+1$ derivazioni, rappresento i risultati coi simboli

$$[q^n.\mathrm{d}^n u+\mathrm{A}_n\mathrm{d}^{n-1}u+\mathrm{B}_n\mathrm{d}^{n-2}u+\mathrm{C}_n\mathrm{d}^{n-3}u\ldots\ldots]:q^{2n}$$

$$[q^{n+1}\mathrm{d}^{n+1}u+\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{d}^n u+\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{d}^{n-1}u+\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{d}^{n-2}u\ldots]:q^{2n+2}.$$

Differenziato il primo ed eguagliato al secondo avremo

$$\mathrm{A}_n=q\mathrm{A}_{n-1}-nq'q^{n-1},$$

$$\mathrm{B}_n=q\mathrm{B}_{n-1}+q\mathrm{A}'_{n-1}-(2n-1)q'\mathrm{A}_n,$$

$$\mathrm{C}_n=q\mathrm{C}_{n-1}+q\mathrm{B}'_{n-1}-(2n-1)q'\mathrm{B}_n,\ \text{ec.}\ldots$$

quindi

$$\mathrm{A}_n=-(1+2+3\ldots+n)q^{n-1}q'=-\frac{n(n+1)}{2}q^{n-1}q'$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_n&=[\mathrm{A}'_{n-1}q+\mathrm{A}'_{n-2}q^2+\ldots+\mathrm{A}'_1q^n]\\&\quad-[(2n-1)\mathrm{A}_{n-1}+(2n-3)\mathrm{A}_{n-2}q+(2n-5)\mathrm{A}_{n-3}q^2\ldots]q'\\&=[\mathrm{A}_{n-1}q+\mathrm{A}_{n-2}q^2\ldots+\mathrm{A}_1q^n]'\\&\quad-[2n\mathrm{A}_{n-1}+(2n-1)\mathrm{A}_{n-2}q\ldots+(n+2)\mathrm{A}_1q^{n-2}]q'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n&=[\mathrm{B}_{n-1}q+\mathrm{B}_{n-2}q^2\ldots]'\\&\quad-[2n\mathrm{B}_{n-1}+(2n-1)\mathrm{B}_{n-2}q\ldots]q',\ \text{ec. ec.}\ldots\end{aligned}$$

Troviamo poi

$$A_{n-1}q + A_{n-2}q^2 + \ldots + A_1 q^n$$

$$= -\tfrac{1}{2}[n(n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots + 2 \cdot 1]q^{n-1}q'$$

$$= -\frac{(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 3} q^{n-1}q',$$

$$2nA_{n-1} + (2n-1)A_{n-2}q + (2n-2)A_{n-3}q^2 \ldots + (n+2)A_1 q^{n-2}$$

$$= -2n\frac{(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 3}q^{n-2}q' - (A_{n-2}q + 2A_{n-3}q^2 + 3A_{n-4}q^3 \ldots),$$

$$A_{n-2}q + 2A_{n-3}q^2 + 3A_{n-4}q^3 \ldots\ldots$$

$$= -\tfrac{1}{2}[(n-1)(n-2) + 2(n-2)(n-3) + 3(n-3)(n-4) \ldots + (n-2).2.1]q^{n-2}q'$$

$$= -\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.3.4} q^{n-2}q'$$

$$B_n = -\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4}q^{n-2}q'^2 - \frac{(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 3}q^{n-1}q'',$$

$$B_{n-1}q + B_{n-2}q^2 \ldots + B_2 q^{n-2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1) \ldots (n-2)}{2, 4, 5,} q^{n-2}q'^2 - \frac{(n+1) \ldots (n-2)}{2.3.4}q^{n-1}q'',$$

$$B_{n-2}q + 2B_{n-3}q^2 + 3B_{n-4}q^3 \ldots + (n-1)B_2 q^{n-1}$$

$$= \frac{(n+2) \ldots (n-3)}{2.4.5.6.}q^{n-3}q'^2 - \frac{(n+1) \ldots (n-3)}{2.3.4.5.}q^{n-2}q'',$$

$$C_n = -\frac{(n+3) \ldots (n-2)}{2.4.6}q^{n-3}q'^3 - \frac{(n+2) \ldots (n-2)}{3.4}q^{n-2}q'q''$$

$$- \frac{(n+1) \ldots (n-2)}{2.3.4}q^{n-1}q''' .$$

È agevole cosa il proseguire questi calcoli e desumerne per induzione la forma generale dei coefficienti D_n, E_n . . . . . Con quelle formole troviamo le equazioni e gli integrali sot-

toscritti

$$p^2p'.d^2y-(p^2p''+2pp'^2)dy+2p'^3y=0,$$

$$y=Ap+Bp^2;$$

$$d^2y.\text{sen}^2x.\cos x-(2\cos^2x-\text{sen}^2x)\text{sen}x.dy+2\cos^3x.y=0,$$

$$y=A\text{sen}x+B\text{sen}^2x;$$

$$p^3p'^2.d^3y-3(p'^2+pp'')p^2p'.d^2y$$

$$+(6p'^4+3pp'^2p''-p^2p'p'''+3p^2p'''^2)pdy-6p'^5.y=0,$$

$$y=Ap+Bp^2+Cp^3:$$

esempii che ho calcolati anche direttamente a conferma delle formole generali.

Dalla trasformata di Laplace dedurrò pure un importante teorema del celebre Sig. Conte Libri, dimostrato dall'altro illustre Geometra Sig. Liouville (*).

Sia noto che due equazioni differenziali lineari hanno degli integrali particolari comuni. Abbassando l'ordine della più elevata per mezzo dell'altra, e proseguendo l'abbassamento di entrambe le ridotte, giungeremo a tal punto che due equazioni differenti dell'unità nell'ordine, combinate all'intento di rinnovare l'abbassamento, daranno la risultante identica alla equazione del minor ordine, e gli integrali particolari di questa saranno unicamente tutti gli integrali comuni alle due proposte equazioni. Qui daremo principio a svolgere il Teorema del Sig. Libri. Una delle equazioni date sia

$$(1)\qquad d^{m+r}y+a_1d^{m+r-1}y+a_2d^{m+r-2}y\ldots+a_{m+r}y=0,$$

e l'altra che ha comuni con essa tutti gli integrali particolari

$$(2)\qquad d^ry+A_1d^{r-1}y+A_2d^{r-2}y\ldots+A_ry=\varphi(y)=0.$$

Se gli integrali esclusivi alla (1) sono r_1, r_2, r_3 ... r_m, d'essa

(*) Comptes Rendus.

potrà sottoporsi alla forma

$$\left[\left(\left(\ldots\left([\varphi(y):\varphi(r_1)]':[\varphi(r_2):\varphi(r_1)]'\right)'\left([\varphi(r_3):\varphi(r_1)]':[\varphi(r_2):\varphi(r_1)]'\right)'\ldots\right]'=0$$

la quale visibilmente è soddisfatta da

$$\varphi(y)=\varphi(r_1)\,,\quad \varphi(y)=\varphi(r_2)\,,\ \text{ec.}\ \ldots\ldots$$

e svolta si ridurrà alla forma

$$(3)\quad d^m\varphi+P_1d^{m-1}\varphi+P_2d^{m-2}\varphi+\ldots+P_{m-1}d\varphi+P_m\varphi=0.$$

Rimesso in questa il valore di φ, siccome la risultante è identica alla (1), saranno

$$P_1+A_1=a_1\,,\quad P_2+A_1P_1+m.A_1'+A_2=a_2\,,$$

$$d_3+A_1P_2+[(m-1)A_1'+A_2]P_1+\frac{m(m-1)}{1,2}A_1''+(m-1)A_2'+A_3=a_3$$

$$P_4+A_1P_3+[(m-2)A_1'+A_2]P_2+\left[\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A_1''+(m-1)A_2'+A_3\right]P_1$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}A_1'''+\frac{(m-1)(m-2)}{1,2}A_2''+(m-2)A_3'+A_4=a_4,\ \text{ec.}$$

la legge delle quali equazioni è manifesta. Le prime m di queste danno i valori di P_1, P_2 . . ; le altre r forniscono le condizioni cui devono soddisfare i eoefficienti noti

$$a_1\,,\ a_2\ldots,\ A_1\,,\ A_2\ldots$$

Integrata la equazione (3) conosceremo $\varphi(r_1)$, $\varphi(r_2)$ ec.: poi integrata la (2), col mezzo delle quadrature si troveranno tutti i valori di y che rendono

$$\varphi(y)=\varphi(r_1)\,,\quad \varphi(y)=\varphi(r_2)\,,\ \text{ec.}$$

cosichè la effettiva risoluzione della (1) dipende dalla (2) dell'ordine r; e dalla (3) dell'ordine m, i coefficienti della quale si trovano senza eseguire alcuna integrazione: nel che appunto consiste il teorema del Sig. Libri.

Per accennare una terza applicazione, supponiamo che si vogliano i criterj per riconoscere se una equazione differenziale lineare ammette soluzioni analoghe a quelle che nelle equazioni a coefficienti costanti provengono dalle radici multiple della equazione algebrica ausiliaria: vale a dire, conoscere se la equazione in y, funzione di x, è soddisfatta da

$$y = (A + Bx + Cx^2 \ldots + Mx^{r-1})\frac{1}{p}$$

essendo A, B ... M costanti; p qualunque funzione di x (*). Dovranno essere

$$\varphi(y) = p\,d^r(py) = d^r y + r\frac{p'}{p}d^{r-1}y + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{p''}{p}d^{r-2}y + \ldots + \frac{p^{(r)}}{p}y = 0$$

$$A_1 = r\frac{p'}{p}, \quad A_2 = \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{p''}{p}, \ldots\ldots A_r = \frac{p^{(r)}}{p},$$

Se la equazione

$$d^3y + a_1 d^2y + a_2 dy + a_3 y = 0$$

è soddisfatta da

$$y = (A + Bx)\frac{1}{p},$$

fatto

$$p.d^2\frac{y}{p} = \varphi(y),$$

troviamo

$$d\varphi + \left(a_1 - \frac{2p'}{p}\right)\varphi = 0, \quad 3p'' + 2a_1 p' + a_2 p = 0,$$

$$pp''' - 3p'p'' - a_1(2p'^2 - pp'') + a_3 p^2 = 0,$$

da cui

$$(2a_1^2 - 6a_1' - 6a_2)p' + (a_1 a_2 + 3a_2' - 9a_3)p = 0$$

(*) Ho notato dipoi che anche l'illustre Sig. Hill si occupava, con altro metodo, dello stesso problema. Giornale del Sig. Crelle T. 25.

eliminato p troveremo la condizione che deve essere soddisfatta dalle funzioni a_1, a_2, a_3: quindi caveremo φ e finalmente y.

Sono ben noti gli importanti ritrovati di Eulero, Lagrange, Laplace, e del Sig. Conte Libri intorno alle equazioni differenziali lineari, che stabiliscono una singolare analogia di queste eguaglianze colle algebraiche. Facciamo a quelle dottrine alcune importanti aggiunte.

Il Sig. Libri trovò le espressioni dei coefficienti delle equazioni differenziali lineari formate cogl'integrali particolari, ma le forme sono complicate. Ecco quanto di più semplice si può desiderare. Siano p_1, $p_2 \ldots p_m$ gli integrali di una equazione in y dell'ordine m, e questa sarà

$$(1)\quad \sum_{r=1}^{r=m}(-1)^{m-r}y^{(r)}\ \mathrm{S}\left(p'_1\, p''_2\, p'''_3 \ldots p^{(r-1)}_{r-1}\ p^{(r+1)}_{r}\ p^{(r+2)}_{r+1} \ldots p^{(m)}_{m-1}\right)=0$$

dove gli apici indicano la derivazione rispetto alla variabile primaria, e $\mathrm{S}(p'_1\, p''_2 \ldots .)$ la funzione *determinante* o *alternata* che si ottiene permutando tutti gli esponenti di derivazione primo, secondo ..... m^{esimo}, escluso l'r dal quale è affetta la y: Infatti quella equazione è lineare, dell'ordine m, e soddisfatta ponendo per y ognuna delle funzioni $p_1, p_2, \ldots p_m$.

Le funzioni determinanti formate cogli integrali particolari e le loro derivate, tengono luogo delle funzioni simmetriche composte colle radici delle equazioni algebriche: quindi si offre un vasto campo di ricerche, che riprenderò con questi miei studii. Eccone qualche semplicissimo esempio. Con tutta facilità verificheremo le equazioni

$$\mathrm{R}(p, r').\mathrm{R}(p, q'') - \mathrm{R}(p, q').\mathrm{R}(p, r'') = p.\mathrm{R}(r, q', p'');$$

$$\mathrm{R}(p, r').\mathrm{R}(p', q'') - \mathrm{R}(p, q').\mathrm{R}(p', r') = p'\mathrm{R}(r, q', p''),$$

$$\mathrm{R}(p, q').\mathrm{R}(p, r'', s''') - \mathrm{R}(p, q'').\mathrm{R}(p, r', s''') + \mathrm{R}(p, q''').\mathrm{R}(p, r', s'') = p\mathrm{R}(p, r', s'', q'''),$$

$$\mathrm{R}(p', q).\mathrm{R}(p', r'', s''') - \mathrm{R}(p', q'').\mathrm{R}(p', r, s''') + \mathrm{R}(p', q''').\mathrm{R}(p', r, s'') = p'\mathrm{R}(p, r', s'', q'''),$$

dove il segno R esprime una funzione determinante. Quindi se la equazione

$$A_0 y'' - A_1 y' + A_2 y = 0$$

ha per integrali particolari due funzioni p, q,
e l'equazione $B_0 y'' - B_1 y' + B_2 y = 0$, le q, r;
sarà

$$p' : p = (B_0 A_2 - A_0 B_2) : (B_0 A_1 - A_0 B_1)$$

Se

$$C_0 y''' - C_1 y'' + C_2 y' - C_3 y = 0,$$

ha per integrali p, r, s.
sarà

$$p' : p = [A_0 C_0 - A_1 C_1 + (A'_1 - A_2) C_0] : [A_0 C_3 - A_2 C_1 + A'_2 C_0].$$

Essendo data una equazione

$$A_0 y^{(n)} - A_1 y^{(n-1)} + \text{ec.} \ldots = 0,$$

onde toglierne il secondo termine, posto $y = u.z$, siccome $A_1 = A'_0$, troviamo

$$u = (A_0)^{\frac{1}{n}}, \quad y = z\sqrt[n]{A_0}.$$

Indicati colle lettere p, q due integrali particolari della equazione istessa

$$(\alpha) \qquad A_0 y^{(n)} - A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} \ldots \pm A_n = 0,$$

cerchiamo la trasformata avente per integrali i binomii $p + \omega q$: essendo ω una funzione data. Si ponga $p + \omega q = z$, e cavatone $p = z - \omega q$, si sostituisca nella equazione

$$A_0 p^{(n)} - A_1 p^{(n-1)} + A_2 p^{(n-2)} \ldots = 0:$$

Fatto

$$A_0 z^{(n)} - A_1 z^{(n-1)} \ldots + A_n z = \varphi,$$

avremo

$$(A_0 \omega^{(n)} - A_1 \omega^{(n-1)} + A_2 \omega^{(n-2)} \ldots) q$$

$$+ [n A_0 \omega^{(n-1)} - (n-1) A_1 \omega^{(n-2)} + (n-2) A_2 \omega^{(n-3)} \ldots] q'$$

$$+ \frac{1}{1.2} [n(n-1) A_0 \omega^{(n-2)} \ldots] q'' + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{n(n-1)}{1.2} A_0 \omega'' - (n-1) A_1 \omega'\right) q^{(n-2)} + n A_0 \omega' q^{(n-1)} = \varphi \quad (\beta)$$

dalla quale si dovrà eliminare q col mezzo della equazione

$$A_0 q^{(n)} - A_1 q^{(n-1)} \ldots \pm A_n q = 0.$$

Per conseguire la risultante, impiegando le funzioni determinanti, rappresentata colla scrittura

$$(8) \qquad M_0 \varphi^{(n)} - M_1 \varphi^{(n-1)} + M_2 \varphi^{(n-2)} \ldots = 0$$

ne calcoleremo i coefficienti M_0, $M_1 \ldots$ dietro la loro composizione cogli integrali particolari desunti dal valore di φ. Nel caso che la equazione data fosse

$$A_0 y'' - A_1 y' + A_2 y = 0 ,$$

essendo

$$\varphi = \alpha q + \beta q' , \ \alpha = A_0 \omega'' - A_1 \omega' , \ \beta = 2A_0 \omega' ;$$

la risultante

$$M_0 \varphi'' - M_1 \varphi' + M_2 \varphi = 0 ,$$

i di cui integrali sono

$$\varphi_1 = \alpha q + \beta q' , \quad \varphi_2 = \alpha p + \beta p',$$

si calcolerà notando che

$$M_0 = \varphi_1 \varphi'_2 - \varphi'_1 \varphi_2 = (\alpha q + \beta q')[\alpha' p + (\alpha + \beta') p' + \beta p'') + \text{ec.}$$
$$= (\alpha' \beta - \alpha \beta' - \alpha^2) A_0 - \alpha \beta . A_1 - \beta^2 A_2$$

$$M_1 = M'_0 ; \ M_2 = \varphi'_1 \varphi''_2 - \varphi''_1 \varphi'_2 = [(\alpha + \beta')\alpha'' - \alpha'(2\alpha' + \beta')] A_0$$
$$+ [\beta \alpha'' - \alpha'(\alpha + 2\beta')] A_1 + [\beta(2\alpha' + \beta') - (\alpha + \beta')(\alpha + 2\beta')] A_2$$
$$- \beta(\alpha + \beta') A'_2 - \alpha' \beta (A'_1 - A_2) + \beta^2 \left[\left(\frac{A_2}{A_0}\right)' A_1 - \frac{A_2^2}{A_0} - \left(\frac{A_1}{A_0}\right)' A_2 \right] ,$$

da che

$$p'q'' - p''q' = A_2 , \ p'q''' - p'''q' = A'_2 ,$$
$$pq'' - p''q = A_1 , \ pq''' - p'''q = A'_1 - A_2 ,$$

$$p''q''' - p'''q'' = \left[\left(\frac{A_1}{A_0}\right)' - \frac{A_2}{A_0} \right] (p'q'' - p''q') - \left(\frac{A_2}{A_0}\right)' (pq'' - p''q).$$

Se fossero noti alcuni valori del binomio $p + \omega q$, in numero r, ne conosceremo altrettanti di $\varphi = A_0 z^{(n)} - A_1 z^{(n-1)} \ldots$:

la equazione in φ dell'ordine n si abbasserà di r unità : epperò integrata la ridotta all'ordine $n - r$, saranno noti tutti gli n valori particolari della funzione φ. Posto uno qualunque di essi φ_1 nella equazione (β), cercheremo la radice comune alle due (α), (β), riducendo il loro ordine al primo, colla eliminazione delle derivate $q^{(n)}$, $q^{(n-1)} \ldots q''$. Troveremo il valore di q ed il corrispondente di p il quale rende $p + \omega q = \varphi_1$: onde la integrazione della (α) dipenderà da quella di altra equazione lineare dell'ordine $n-r$. Se gli r valori di φ non fossero dati esplicitamente, ma per mezzo di una equazione lineare di quell'ordine r, avrà pur luogo l'abbassamento della (8) colla regola del Sig. Libri superiormente dimostrata.

Indicata la equazione (1) colla scrittura

$$y^{(m)} - A_1 y^{(m-1)} + A_2 y^{(m-2)} - A_3 y^{(m-3)} \ldots \pm A_m y = \varphi(y) = 0,$$

sia

$$y^{(m+1)} - B_1 y^{(m)} + B_2 y^{(m-1)} - B_3 y^{(m-1)} + \ldots \mp B_{m+1} y = 0$$

la equazione che ammette gli stessi integrali p_1, $p_2 \ldots p_m$ ed altro ancora che indico con t. Sarà identicamente

$$y^{(m+1)} - B_1 y^{(m)} + B_2 y^{(m-1)} \ldots = \left(\frac{\varphi(y)}{\varphi(t)}\right)' \varphi(t) = \varphi'(y) - \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \varphi(y) =$$

$$= [y^{(m+1)} - A_1 y^{(m)} + (A_2 - A'_1) y^{(m-1)} - (A_3 - A'_2) y^{(m-2)} \ldots \pm A'_m y]$$

$$- [y^{(m)} - A_1 y^{(m-1)} + A_2 y^{(m-2)} \ldots \pm A_m y] \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)},$$

e quindi

$$B_1 = A_1 + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}, \; B_2 = A_2 - A'_1 + A_1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = A_2 - \left(\frac{A_1}{\varphi(t)}\right)' \varphi(t) \; ;$$

$$B_3 = A_3 - \left(\frac{A_2}{\varphi(t)}\right)' \varphi(t), \; \ldots\ldots, \; B_{m+1} = - \left(\frac{A_m}{\varphi(t)}\right)' \varphi(t).$$

Supponiamo che le due equazioni differenziali sottoscritte

(1) $\quad y^{(n)} + P y^{(n-1)} + Q y^{(n-2)} \ldots + R y = 0,$

(2) $\quad y^{(m)} + p y^{(m-1)} + q y^{(m-2)} \ldots + r y = 0,$

abbiamo un'integrale particolare comune: per cui i coefficienti P, Q ... R; p, q ... r, e le loro derivate avranno fra loro una relazione che indico con $F(r) = 0$, ove ho scritta la sola r che mi importa di considerare. Indico con h una costante indeterminata, e suppongo che la equazione (1) e la seguente

$$(3) \qquad y^{(m)} + py^{(m-1)} + qy^{(m-2)} \ldots + (r + h)\, y = 0,$$

abbiano pure un integrale comune, per cui sarà

$$F(r + h) = 0,$$

ossia

$$F'(r) + \frac{h}{1.2}F''(r) + \frac{h^2}{1.2.3}F'''(r) + \ldots = 0.$$

Se h diminuisce indefinitamente, siamo condotti a concludere, che se le equazioni (1), (2) avranno due integrali comuni, saranno

$$F(r) = 0\,,\ F'(r) = 0:$$

se ne hanno tre, avremo

$$F(r) = 0\,,\ F'(r) = 0,\ F''(r) = 0 \text{ ec. } \ldots.$$

Abbiamo per tale maniera esteso alle equazioni differenziali un singolare teorema che Lagrange (*) scopriva per le equazioni algebriche.

Valga a conferma il seguente esempio. Considero le equazioni

$$(a) \qquad y''' + Py'' + Qy' + R = 0\,,$$
$$y''' + py'' + qy' + ry = 0\,.$$

Supposto che abbiano due integrali comuni, per scoprirne la condizione, sottraendole, desumo

$$(b) \qquad y'' + Ay' + By = 0\,,$$

ove

$$A = \frac{Q - q}{P - p},\quad B = \frac{R - r}{P - p}\,.$$

Differenziata la (b) ed eliminato di nuovo y''', ottengo

(*) Atti dell'Accad. di Berlino 1770—71.

$$(c) \qquad y'' + \frac{A'+B-q}{A-p}y' + \frac{B'-r}{A-p}y = 0 ,$$

la quale dovrà essere identica alla (b), per cui

$$(\partial) \qquad \frac{A'+B-q}{A-p} = A , \quad \frac{B'-r}{A-p} = B .$$

Ma se le equazioni (a) avranno un solo integrale comune, dalle (b) (c) cavata

$$(e) \qquad y'\left(\frac{A'+B-q}{A-p} - A\right) + y\left(\frac{B'-r}{A-p} - B\right) = 0,$$

differenziata questa equazione poi combinata colla (b) per eliminarvi ancora y'', la risultante in y' dovrà essere identica alla (c) stessa, e la equazione di condizione sarà

$$F(r) = [(A'+B-q)-A(A-p)]\left[\left(\frac{B'-r}{A-p}\right)' - B' - \frac{A'+B-q}{A-p}B + AB\right]$$

$$-[B'-r-(A-p)B]\left[\left(\frac{A'+B-q}{A-p}\right)' - A' + \frac{B'-r}{A-q} - B - \frac{A'+B-q}{A-p}A + A^2\right] = 0$$

da cui

$$F'(r) = [(A'+B-q) - A(A-p)]\frac{(A-p)'}{(A-p)^2}$$

$$+\left[\left(\frac{A'+B-q}{A+p}\right)' - A' + \frac{B'-r}{A-p} - B - \frac{A'+B-q}{A-p}A + A^2\right]$$

$$+\frac{1}{A-p}[(B'-r-(A-p)B]$$

la quale $F'(r)$ è annullata dalle condizioni (∂) : come dovevamo provare.

I teoremi dimostrati conducono a molte proprietà delle funzioni determinanti, che stimo non osservate: argomento che esaminerò con altro lavoro. Noterò solamente che supposto

$$p_1 = e^{ax} , \quad p_2 = e^{bx} , \ . \ . \ . , \ p_{m-1} = e^{vx}, p_m = e^{ux} ,$$

la equazione differenziale

$$y^{(m)} - A_1 y^{(m-1)} + \ . \ . \ . \pm A_{m-r}\, y^{(r)} \ . \ . \ . \pm A_m y = 0 ,$$

i di cui coefficienti A_1, A_2 ... A_{m-r} .... sono le somme dei prodotti delle quantità a, b, c ... una ad una, due a due .... , quella equazione ne insegna che

$$S(ab^2c^3 \dots k^{r-2}\, k^{r-1}\, l^{r+1} \dots u^m) = A_{m-r}\, S(ab^2c^3\partial^4 \dots u^{m-1}),$$

dove nella prima determinante manca l'esponente r, nella seconda l'esponente m.

§. 5.° Reco in questo luogo qualche equazione integrata, che può risolversi con molta speditezza.

Sia data

$$y'' + y'^n f(x) + y'^{n+1} F(y) = 0,$$

e ne caveremo

$$y''.y'^{-n} + f(x) + y'F(y) = 0,$$

$$\frac{1}{1-n}\, y' + \int f(x)\, dx + \int F(y) dy = C.$$

Se $n = 1$, come suppone l'illustre Liouville (*) si avrà

$$y'' + y'f(x) + y'^2 F(y) = 0, \quad \frac{y''}{y'} + f(x) + y'F(y) = 0,$$

$$\text{og}\, y' + \int f(x) dx + \int F(y) dy = C, \quad \int dy.e^{\int F(y) dy} = C \int e^{-\int f(x) dx} dx + D$$

Esaminiamo, con brevità, alcune equazioni di Abel (**).

$$(a) \qquad y' + p + \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r} - \frac{p'}{p}\right) y + ry^2 = 0$$

onde

$$y'\frac{p}{r} - \frac{1}{2}\, y \left(\frac{p}{r}\right)' + p\left(y^2 + \frac{p}{r}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{p}{r}}}\right)' + p\sqrt{\frac{p}{r}}\left[1 + \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{p}{r}}}\right)^2\right] = 0$$

(*) Giorn. del Sig. Liouville 1842.

(**) Opere di Abel. T. 2. pag. 228. 237.

(b) $y' - \frac{\beta'}{\alpha} y^2 + \frac{\alpha'}{\beta} = 0$ da cui, col porre $y = \frac{u - \alpha}{\beta}$,

deriva $\frac{u'}{u^2} + \frac{\beta'}{\beta} \frac{1}{u} - \frac{\beta'}{\alpha\beta} = 0$;

(c) $y' - y^2 + \frac{p''}{p} = 0$ da cui, col porre $y = u - \frac{p'}{p}$,

deriva $\frac{u'}{u^2} + 2\frac{p'}{p}\frac{1}{u} + 1 = 0$.

(∂) $(y + s)y' + qy + ry^2 + qs - rs^2 = 0$

si integra togliendo il fattore $y + s$

(e) $(y + s)y' + (2rs + s')y + ry^2 + p = 0$,

ossia

$$(y + s)(y' + s') + r(y + s)^2 + (p - ss' - rs^2) = 0,$$

cioè

$$[(y + s)^2]' + 2r(y + s)^2 + 2(p - ss' - rs^2) = 0.$$

§. 6.° Nei trattati di calcolo integrale, dalle equazioni lineari, propriamente dette, progredendo alle più complesse, si considerano quelle lineari soltanto rispetto al coefficiente differenziale dell'incognita, e fra queste si prende a studiare la famosa equazione di Riccati alla quale conducono le stesse equazioni lineari del secondo ordine. Proverò con varii esempii rimarcabili, come in moltissimi casi la detta equazione di Riccati venga integrata col soccorso delle trascendenti ellittiche.

Considero la equazione modulare del celebre Sig. Iacobi (*) che, scritta colle lettere di Legendre (**), è la seguente

$$2.dc.d^3c - 3(d^2c)^2 + \left(\frac{1 + c^2}{c - c^3}\right)^2 .dc^4 = 0;$$

essendo la variabile primaria

$$t = \frac{mF + nF^1}{F + pF^1};$$

(*) Fundamenta nova theor. funct. elliptic. pag. 78, 79.

(**) Traitè des funct. ellipt. pag. 61, 62.

m, n, p costanti; F ed F' le funzioni complementarie complete di prima specie, e di modulo c. Considerate t, c come dipendenti da una terza variabile, si ha

$$2\frac{dc}{(dt)^2}\left[\frac{d^3c.dt - d^3t.dc}{(dt)^3} - 3\,\frac{d^2c.dt - d^2t.dc}{(dt)^4}d^2t\right]$$

$$-3\left(\frac{d^2c.dt - d^2t.dc}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{1+c^2}{c-c^3}\right)^2\left(\frac{dc}{dt}\right)^4 = 0;$$

fatto $dc = 1$, ne viene

$$3(d^2t)^2 - 2.dt.d^3t + \left(\frac{1+c^2}{c-c^3}\right)^2.dt^2 = 0,$$

ossia

$$2\frac{dt.d^3t - (d^2t)^2}{(dt)^2} - \left(\frac{d^2t}{dt}\right)^2 = \left(\frac{1+c^2}{c-c^3}\right)^2;$$

e supposto

$$\frac{d^2t}{dt} = 2y,$$

ottengo per ultimo la riduzione notabile

$$(\alpha) \qquad dy - y^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1+c^2}{c-c^3}\right)^2.$$

Questa equazione di Riccati ha per integrale

$$y = \tfrac{1}{2}\,d.\log(dt),$$

e siccome

$$dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{mp - n}{(c-c^3)(F + pF')^2},$$

come abbiamo dalle note formule di Legendre, quindi l'integrale completo della (α) sarà

$$(\beta) \qquad y = -\tfrac{1}{2}d.\log(c - c^3) - d.\log(F + pF')$$

$$= \frac{(1+c^2)F - 2E + p(2E' - b^2F')}{2cb^2(F + pF')}$$

ove E, E' sono le funzioni complementarie complete di seconda specie.

Dalla equazione (α) possiamo desumere varii integrali della equazione modulare. Sia e il modulo di una funzione φ della specie F, e la relazione analoga ad (α) corrispondente alla φ sia

$$d_e z - z^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1+e^2}{e-e^3}\right)^2 .$$

Se le φ, F sono trasformabili l'una nell'altra, avrà luogo la equazione del Sig. Jacobi

$$\frac{mF + nF'}{F + pF'} = \frac{\mu.\varphi + \nu.\varphi'}{\varphi + \pi.\varphi'} ;$$

ove μ, ν, π sono costanti. E siccome

$$2z.de - 2y.dc + \frac{d^2e}{de} - \frac{d^2c}{dc} = 0,$$

in forza della equazione

$$y = \frac{d_c^2 t}{d_c t}$$

e dell'analoga fra z ed e; quindi mediante la equazione (β) e l'altra simile fra z, e, φ ed φ', avremo

$$\frac{de}{(e - e^3)(\varphi + \pi\varphi')^2} = \frac{dc}{(c - c^3)(F + pF')^2} .$$

La equazione di Legendre più volte ricordata

$$d^2y + \frac{1 - 3c^2}{c - c^3}\, dy - \frac{1}{1 - c^2} y = 0$$

si scrive

$$d\left(dy + \frac{1}{2}\,\frac{1-3c^2}{c - c^3}\right) + \left(dy + \frac{1}{2}\,\frac{1-3c^2}{c - c^3} y\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1+c^2}{c-c^3}\right)^2 = 0 ;$$

e per tale maniera è ridotta direttamente a quella di Riccati. Ma se vi pongo $c = \operatorname{sen} t$, ne deriva

$$d_t^2 y.\operatorname{sen}2t + 2.d_t y.\cos 2t - y \operatorname{sen}2t = 0 ,$$

e fatto

$$y\sqrt{\operatorname{sen}2t} = e^{-\int r dt} ,$$

si ha

$$d_t r - r^2 = \frac{1}{(\operatorname{sen}2t)^2} .$$

Siccome $y = F$, quindi

$$d(F.dy - y.dF) + \frac{1 - 3e^2}{c - c^2}(Fdy - ydF) = 0,$$

l'altro integrale particolare della equazione di Legendre sarà

$$y = F\int\frac{dc}{(c - c^3)F^2} ;$$

ed avremo poi

$$r = -\frac{1}{y}d_t y - \cot.2t = -\frac{b}{F}d_c F - \cot.2t = \frac{1}{2bc}\left(1 - \frac{2E}{F}\right).$$

Consideriamo la equazione generale

$$(\beta) \qquad dy - P.y^2 = Q$$

nella quale c è la variabile primaria; P, Q funzioni date di essa. Affinchè quella equazione sia soddisfatta da

$$(\gamma) \qquad y = \frac{A.E + B.F}{E + C.F} ,$$

le A, B, C dovranno essere formate con c come esigono le equazioni

$$dA + \frac{B - AC}{b^2c} = A^2.P + Q,$$

$$C.dB - B.dC + \frac{B - AC}{c} = B^2.P + C^2.Q$$

$$C.dA - A.dC - 2\frac{B - AC}{c} + dB = 2.ABP + 2CQ$$

dalle quali eliminate P, Q; tolto dalla risultante il fattore

B — AC si ricava

$$A.dC - C.dA + dB = \frac{2}{c}\left[A(1 + C) + B\left(1+\frac{C}{b^2}\right)\right]$$

integrabile rispetto a ciascuna incognita in essa contenuta. Potremo col suo mezzo avere infinite equazioni della forma (β) integrabili colla formula (γ).

Se $A = m.\alpha$, $B = m$ costanti, $C = -b^2 = c^2 - 1$, avremo la equazione

$$dy + \frac{c}{1+\alpha b^2}\, y^2 = \frac{1+2\alpha b^2+\alpha^2 b^2}{cb^2(1 + \alpha b^2)}, \text{ e l'integrale } y = \frac{\alpha E+F}{E-b^2F}.$$

Se $\alpha = -1$, $dy + \frac{1}{c}y^2 = \frac{1}{b^2c}$, $\qquad y = -\frac{1}{b^2 \cdot dF}\, dE$.

Se $\alpha = 0$, $\quad dy + cy^2 = \frac{1}{b^2c}$, $\qquad y = \frac{F}{E-b^2F}$.

§. 7.° L'ultimo metodo di integrazione è quello delle serie: In questo bisogno può talvolta giovare un processo diretto, che accennerò, il quale può istruire sul resto. Si abbia

$$d^2y + a.dy + by = c,$$

essendo a, b, c funzioni note di x. Da quella equazione ricavo di seguito

$$d(dy.e^{\int adx}) = ce^{\int adx} - b.y.e^{\int adx},$$

$$dy.e^{\int adx} = dy_0 + \int_0 ce^{\int adx}.dx - \int_0 b.e^{\int adx}.y.dx,$$

$$y = y_0 + \int_0 (dy_0 + \int_0 ce^{\int adx}.dx)e^{-\int adx}\, dx - \int_0 e^{-\int adx}\int_0 be^{\int adx}.y.dx.$$

Suppongo

$$y_0 + \int_0 (dy_0 + \int_0 ce^{\int adx}.dx)e^{-\int adx}.dx = p,\ e^{-\int adx} = q,\ be^{-\int adx} = r;$$

e siccome

$$y = p - \int q \int ry.dx = p - \int q \int r(p - \int q \int ry\, dx)dx$$

$$= p - \int q \int r.p.dx + \int q \int r \int q \int ry.dx.$$

fatto

$$\int_n q \int_{n-1} r \int_{n-2} q \int_{n-3} r \cdots \int_2 q \int_1 rp.\mathrm{d}x = \Delta_n ,$$

dove i numeri scritti al piede degli integrali ne indicano il loro numero, avremo

$$y = p + \sum_{n=1}^{n=m} (-1)^n \Delta_n + (-1)^{m+1} \int_{m+1} q \int_m r \int_{m-1} q \cdots \int_2 q \int_1 r.y.\mathrm{d}x$$

Così dalla equazione

$$\mathrm{d}^2 y + hx^m.y = 0$$

caviamo

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}y_0 - h\int_0 x^m y.\mathrm{d}x , \quad y = y_0 - x.\mathrm{d}y_0 - h\int_0^2 .x^m.y.\mathrm{d}x^2$$

$$= y_0 - x.\mathrm{d}y_0 - h\int_0^2 (y_0 - x\mathrm{d}y_0) x^m.\mathrm{d}x^2 + h^2 \int_0^2 x^m \int_0^2 x^m.y\mathrm{d}x^2,$$

$$y = (y_0 - x\mathrm{d}y_0) - h\left(\frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} y_0 - \frac{x^{m+3}}{(m+2)(m+3)} \mathrm{d}y_0\right)$$

$$+ h^2\left(\frac{x^{2m+4}}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)} y_0 - \frac{x^{2m+5}}{(m+2)(m+3)(2m+4)(2m+5)} \mathrm{d}y_0\right)$$

$$- h^3\left(\frac{x^{3m+6}}{(m+1)(m+3)(2m+3)(2m+4)(3m+5)(3m+6)} y_0 - \text{ec.}\ldots\right)\ldots$$

serie trovata da Eulero col metodo dei coefficienti indeterminati.

Lo sviluppo della funzione completa

$$y = \mathrm{F} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \mathrm{sen}^2 \varphi)}}$$

ha costato qualche fatica allo stesso Legendre il quale otteneva ingegnosamente una serie doppia con difficile artifizio. Vediamo come si possa pervenire ad altra rappresentazione.

Dalla

$$d^2y + \frac{1-3c^2}{c-c^3}\,dy - \frac{1}{1-c^2}y = 0\,,$$

fatto $y = \text{sen}t$, abbiamo già desunta l'altra

$$d_t^2 y\,\text{sen}2t + 2.d_t y.\cos 2t - y\,\text{sen}2t = 0\,.$$

Ora suppongo $y = u.v$, per cui avremo

$$d_t^2 u.v\,\text{sen}2t + 2.d_t u(d_t v.\text{sen}2t + v.\cos 2t)$$
$$+ u(d_t^2 v.\text{sen}2t + 2.d_t v.\cos 2t - v.\text{sen}2t) = 0\,.$$

Sia

$$d_t v.\text{sen}2t + v.\cos 2t = 0\,,$$

onde

$$d_t^2.u.\text{sen}^2 2t + u = 0\,,$$

ovvero, fatto $2t = x$,

$$(1) \qquad 4.d_x^2 u.\text{sen}^2 x + u = 0.$$

Questa equazione ne insegna potersi fare

$$u = A_0 + A_1\cos 2x + A_2\cos 4x + A_3\cos 6x + \ldots.$$

per cui

$$4.d_x^2 u.\text{sen}^2 x = 2^2.A_1 + (4^2.A_2 - 2.2^2.A_1)\cos 2x$$
$$+ (6^2.A_3 - 2.4^2.A_2 + 2^2.A_1)\cos 4x$$
$$+ (8^2.A_4 - 2.6^2.A_3 + 4^2.A_2)\cos 6x + \ldots;$$

e sostituito il valore di u nella equazione (1), eguagliati allo zero i coefficienti di $\cos 2x$, $\cos 4x$, ... (*) avremo le relazioni

$$2^2.A_1 + A_0 = 0\,,$$
$$4.^2A_2 - 2\cdot 2^2.A_1 + A_1 = 0\,,$$
$$6^2.A_3 - 2.4^2.A_2 + 2^2.A_1 + A_2 = 0\,,$$
$$8^2.A_2 - 2.6^2.A_3 + 4^2.A_2 + A_3 = 0\,, \text{ ec. } \ldots$$

(*) L'applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati in questo caso è sicura. A persuaderci basta ricordare la serie trasformata che si ordina secondo le potenze dell'arco x.

di calcolazione assai facile : e troviamo speditamente

$$\frac{A_1}{A_0} = -0,25; \quad \frac{A_2}{A_0} = -0,109375 ;$$

$$\frac{A_3}{A_0} = -0.06640624 ; \quad \frac{A_4}{A_0} = -0,04632546 ;$$

$$\frac{A_5}{A_0} = -0,034927087; \quad \frac{A_6}{A_0} = -0,02767852557, \text{ ec...}$$

Per determinare A_0, osservo che

$$\varepsilon = \operatorname{sen}\frac{x}{2}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{sen} x)}},$$

epperò

$$y = F = \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{sen} x)}}(A_0 + A_1\cos 2x + A_3\cos 3x - \ldots\ldots).$$

Se poniamo $c = \operatorname{sen} 75^\circ$, ossia $x = \pi - 30^\circ$ (*), avremo

$$\operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2}, \quad \sqrt{(\operatorname{sen} x)} = 0,7071065$$

$$\cos 2x = \cos 8x = \cos 10x = \ldots\ldots = \tfrac{1}{2},$$

$$\cos 4x = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos 6x = -1,$$

$$\cos 12x = 1, \quad F = 2,7680631$$

$$F\sqrt{(\operatorname{sen} x)} = A_0 + \tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2 - A_3 + \tfrac{1}{2}A_4 + \tfrac{1}{2}A_5$$
$$= 0,9954675.A_0,$$

$$A_0 = 1,9662208 ; \quad A_1 = -0,49155525;$$
$$A_2 = -0,2150554 ; \quad A_3 = -0,13056926;$$
$$A_4 = -0,09008597 ; \quad A_5 = -0,068674397 ;$$
$$A_6 = -0,054422101 ; \quad \text{ec} \ldots\ldots$$

che convergono con lentezza. Notiamo a compimento, che essendo

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2(2n)^2 - 1}{(2n+2)^2} - \left(\frac{2n-2}{2n+2}\right)^2 \cdot \frac{A_{n-1}}{A_n},$$

(*) Traitè des fonct. ellipt. T. I. pag. 63, 67, 91.

ed i quoti dei termini prossimi seguenti tutti positivi, supposto n grandissimo, avremo

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = 2 - 1 : \frac{A_n}{A_{n-1}} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 \text{ etc.}}} = 1$$

$$-[A_n \cos(2nx) + A_{n+1}\cos(2n+2)x + A_{n+2}\cos(2n+4)x + \ldots] <$$

$$< - A_n \Big[[1 + \cos 2x + \cos 4x \ldots] \cos(2nx)$$

$$+ [\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x \ldots\ldots] \operatorname{sen}(2nx) \Big] = - \tfrac{1}{2} A_n \frac{\operatorname{sen}[(2n+1)x]}{\operatorname{sen} x}.$$

Ma non mi trattengo più a lungo su tale argomento esaurito dal sommo Legendre.

I Geometri del secolo XVII studiarono anche la integrazione geometrica delle equazioni differenziali; intorno a che parmi meritevole di molta attenzione l' operetta del Manfredi: « *De costructione aequationum differentialium* » Eulero rappresentò la equazione di Riccati colla tractoria (*) di una curva, la natura della quale dipende dal termine tutto noto: Ma possiamo conseguire altre rappresentazioni. La equazione sia ridotta alla seguente

$$dr = \tfrac{1}{2} r^2 . dv - \tfrac{1}{2} \varphi^2(v) . dv .$$

Siano v l'angolo polare; $\varphi(v)$ il raggio vettore corrispondente di una linea, che suppongo descritta; r quello della curva che si vuole disegnare: $A(v)$, $\Delta(v)$ le aree dei settori mistilinei che comprendono l'angolo v nell'una e nell'altra linea: per cui la equazione data fornisce $dr = d\Delta - dA$, ossia $r = \Delta - A$. Onde ottenere una rappresentazione prossima della curva, delineata intorno al polo la circonferenza di raggio uno, vi segno tanti archi piccolissimi consecutivi che indico con ω: descrivo il poligono della equazione polare $\rho_n = \varphi(n\omega)$, e formo la equazione

$$r_{n+1} - r_n = \tfrac{1}{2} r_n . r_{n+1} \operatorname{sen}\omega - \tfrac{1}{2} \rho_n \rho_{n+1} \operatorname{sen}\omega .$$

(*) Comentarii Acad. Petropol. T. 8.

Sia

$$\frac{2}{\operatorname{sen}\omega} = p,$$

e suppongo determinati i punti le cui equazioni polari sono

$$\rho = \rho_n\,,\ v = n\omega\,;\ \rho = \rho_{n+1}\,,\ v = (n+1)\omega;\ r = r_n,\ v = n\omega\,;$$

e per conoscere il vertice seguente del richiesto poligono, nella retta ρ_{n+1} prendo la parte ρ_n; sulla corda $\rho_{n+1} - \rho_n$ descrivo la circonferenza che passa per il vertice n^{esimo} del poligono cercato, e determina sul raggio r_n un altro punto per il quale sia $r = \lambda_n$, onde

$$\rho_n \cdot \rho_{n+1} = r_n \cdot \lambda_n\,,\quad p(r_{n+1} - r_n) = r_n(r_{n+1} - \lambda_n),$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{\lambda_n - p}{r_n - p}\,.$$

Disegnata intorno al polo la circonferenza di raggio p, avremo immediatamente nella figura le rette $r_n - p$, $\lambda_n - p$, e se formeremo su la $r_n - p$ il triangolo che comprende fra i lati $r_n - p$, $\lambda_n - p$ l'angolo ω, il terzo lato di esso triangolo sarà parallelo al lato incognito del poligono richiesto.

§. 8.° Il Sig. Jacobi ha integrata una equazione differenziale (*) che comprende altra notabile di Eulero. Studiando la bella analisi di quel celebre Geometra, seguendo i principii generali di Condorcet (**) mi venne fatto di notare altre equazioni analoghe, le quali possono integrarsi. Consideriamo la seguente

$$(1)\quad (ay^2 + bxy + cx^2 - y).dx + (fx^2 + x)dy = 0.$$

Vi pongo

$$x = \frac{v-u}{m-n}\,,\quad y = \frac{mv - nu}{m-n}\,;$$

dove u, v sono due nuove variabili; m, n costanti: fatta la sostituzione, ottengo

(*) Giornale di Matematica del Sig. Crelle T.° 24.

(**) Essais d'analyse: pag. 53.

$$[a(mv-nu)^2+b(mv-nu)(v-u)+c(v-u)^2+(m-n)(mv-nu)](dv-du)$$
$$+[f(v-u)^2+(m-n)(v-u)](mdv-ndu)=0.$$

Supposte m, n radici della equazione

$$az^2+(b+f)z+c=0,$$

avremo

$$[2amn+b(m+n)+2c]uv(dv-du)+2fuv(mdv-ndu)$$
$$+(m-n)^2(udv-vdu)=0\ ,$$

ossia

$$\left[A+\frac{(m-n)^2}{v}\right]dv-\left[B+\frac{(m-n)^2}{u}\right]du=0\ ,$$

dove ho posto

$$2amn+b(m+n)+2fm+2c=\frac{4ac-b(b+f)}{a}+2fm$$
$$=h+2fm=A\ ;\quad h+2fn=B.$$

Quella equazione integrata fornisce

$$Av-Bu+(m-n)^2\log\frac{v}{u}=h(v-u)+2f(mv-nu)$$
$$+(m-n)^2\log\frac{v}{u}=\text{Cost.}$$

ossia

$$\frac{y-nx}{y-mx}=Ce^{\frac{hx+2fy}{m-n}}.$$

Se $m=n$, questo integrale è insignificante, però ne induce a supporre

$$y+\frac{h}{2f}x=\omega$$

nuova variabile; e siccome nel caso attuale

$$ac=\frac{1}{4}(b+f)^2,$$

la equazione data equivale alla

$$[a^2y^2+\frac{1}{4}(b+f)^2x^2+abxy]\mathrm{d}x+afx^2.\mathrm{d}y+a(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=0,$$

ovvero, introdotto ω in scambio della y,

$$a\omega^2\mathrm{d}x+(1+fx)(x\mathrm{d}\omega-\omega\mathrm{d}x)=0;$$

ed avremo per ultimo l'integrale

$$1+fx=\mathrm{C}e^{\frac{2fx}{2ay+(b+f)x}}.$$

Esaminiamo la equazione

$$(2)\qquad (\mathrm{A}y^2+\mathrm{B}xy+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}y+\mathrm{E}x+\mathrm{F})\mathrm{d}y$$
$$+(ay^2+bxy+cx^2+\partial y+ex+f)\mathrm{d}x=0.$$

Vi pongo

$$x=u+v+n,\quad y=pu+qv+r:$$

dove u, v sono variabili; n, p, q, r costanti indeterminate. Siano per brevità

$$\mathrm{A}p^2+\mathrm{B}p+\mathrm{C}=(1),$$
$$2\mathrm{A}pq+\mathrm{B}(p+q)+2\mathrm{C}=(2),$$
$$\mathrm{A}q^2+\mathrm{B}q+\mathrm{C}=(3),$$
$$2\mathrm{A}pr+\mathrm{B}(np+r)+2\mathrm{C}n+\mathrm{D}p+\mathrm{E}=\alpha,$$
$$2\mathrm{A}qr+\mathrm{B}(nq+r)+2\mathrm{C}n+\mathrm{D}q+\mathrm{E}=\beta,$$
$$\mathrm{A}r^2+\mathrm{B}nr+\mathrm{C}n^2+\mathrm{D}r+\mathrm{E}n+\mathrm{F}=\gamma,$$

ed indichiamo con $(1)'$, $(2)'$ . . . β', γ' le quantità che si cavano dalle (1), (2) . . . β, γ cambiandovi A in a, B in b,.... F in f. Eseguita la sostituzione di u, v in luogo di x, y nella (2), si ottiene

$$\Big[[(1)p+(1)']u^2+[(2)p+(2)']uv+[(3)p+(3)']v^2$$
$$+(\alpha p+\alpha')u+(\beta p+\beta')v+(\gamma p+\gamma')\Big]\mathrm{d}u$$
$$+\Big[[(1)q+(1)']u^2+[(2)q+(2)']uv+[(3)q+(3)']v^2$$
$$+(\alpha q+\alpha')u+(\beta q+\beta')v+(\gamma q+\gamma')\Big]\mathrm{d}v=0.$$

Se saranno

$$(1)p + (1)' = 0\,, \quad (3)q + (3)' = 0,$$

$$(3)p + (3)' + (2)q + (2)' = 0, \quad (2)p + (2)' + (1)q + (1)' = 0,$$

la equazione (2) sarà integrabile col metodo immaginato dal Sig. Jacobi : cioè p, q devono essere radici della

$$Ap^3 + (a + B)p^2 + (b + C)p + c = 0\,,$$

Se quelle radici sono eguali la terza e quarta condizione sono soddisfatte per se stesse : altrimenti da quelle avremo

$$3A.pq + (a + B)(p + q) + (b + C) = 0\,,$$

$$(a + B)pq + (b + C)(p + q) + 3c = 0,$$

vale a dire p, q saranno radici comuni alla equazione del terzo grado assegnata di sopra, e ad altra del secondo di cui la somma ed il prodotto delle radici $p + q$, $p.\,q$ sono i valori di queste quantità che vengono date dalle altre due condizioni. Avremo per tale maniera fra i coefficienti A, a; B, b; C, c due relazioni essenziali e sufficienti perchè la equazione (2) possa integrarsi coll'analisi del sommo Geometra di Königsberga.

NOTA. La importante conseguenza ottenuta sul fine del §. 1.° si può enunciare concisamente sotto forma di

Teorema : Se le due equazioni algebriche

$$b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n = 0$$

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n = n b_0 z^{n-1} + (n-1) b_1 z^{n-2} \ldots + b_{n-1}$$

hanno alcune radici h_1 , k , ... comuni, la equazione differenziale

$$(a_0 + b_0 x)\mathrm{d}^n y + (a_1 + b_1 x)\mathrm{d}^{n-1} y + \ldots + (a_n + b_n x) y = 0$$

ammetterà altrettante integrazioni , le quali se conseguiranno coi moltiplicatori e^{-hx} ; e^{-kx} . . . . .

Pavia, 20 *Decembre* 1849.

(Sarà continuato.)

SULLA MANCANZA DI RAPPORTO FRA LE APPARIZIONI DELLE STELLE CADENTI IN FREQUENZA DELLE AURORE BOREALI, DELLE METEORE LUMINOSE, E DEGLI AEROLITI E PIOGGE TERROSE; E SULL'ORIGINE DI QUESTI FENOMENI.

NOTA

DI FRANCESCO PISTOLESI

DI PISA

Per discutere l'argomento mi valgo dei quattro anni 1840, 41, 42 e 43 di osservazioni, i quali sono i più forniti di fatti nella Raccolta cronologica che vado facendo di fenomeni meteorologici, e di fisica del globo ricorsi dall'era volgare in poi

Stelle cadenti in frequenza ed aurore boreali.

È stato annunziato, che le apparizioni delle stelle cadenti siano più frequenti nelle sere di aurore boreali. Ecco ciò che offre il suddetto quadriennio

	1840.	1841.	1842.	1843.	
Giorni di stelle cadenti in frequenza e di aurore boreali . . . . . n.°	6.	14.	7.	4	= 31.
Giorni di stelle cadenti in frequenza isolate . . . »	17.	53.	53.	32	= 155.
Giorni di aurore boreali isolate . . . . . »	38.	43.	22.	26	= 129.

Questi numeri mostrano chiaramente l'indipendenza dell'apparizione dell'un fenomeno da quello dell'altro, e rispondono negativamente al suddetto enunciato.

Meteore luminose [1].

Il seguente prospetto indica parimente che l'apparizione delle Meteore luminose è indipendente da quella delle stelle cadenti in frequenza e da quella delle aurore boreali.

	1840.	1841.	1842.	1843.	
Giorni di metore luminose isolate . . . . . n.°	19.	28.	24.	19.	= 90.
Giorni di meteore luminose, e di stelle cadenti in frequenza . . . . . »	4.	12.	8.	3.	= 27.
Giorni di meteore luminose e di aurore boreali. . . »	5.	8.	3.	0.	= 16.

Aeroliti e pioggie terrose.

L'apparizione di questi fenomeni è pure indipendente da quella delle stelle cadenti in frequenza, delle aurore boreali e delle meteore luminose. Se ne abbia la prova dagli appresso numeri, che comprendono il quadriennio

Giorni di aeroliti e di piogge terrose isolate. . .	n.°	17.
Giorni di aeroliti e di aurore boreali	»	2.
Giorni di aeroliti, di aurole boreali, e di stelle cadenti in frequenza	»	2.
Giorni di aeroliti e di meteore luminose	»	2.

(1) Si noti che per meteore luminose intendiamo i così detti *globi di fuoco*, ed altre grandiose apparenze lucide, e non le stelle cadenti cospicue, le quali, quantunque sogliono esser chiamate ancor *bolidi*, noi ritenghiamo per *stelle cadenti* propriamente dette, e ciò non senza ragione, poichè nella famosa apparizione di stelle cadenti accaduta in America la notte del 12 al 13 Novembre 1833, le stelle cadenti e i *bolidi* uscirono insieme da una e identica posizione della volta celeste.

Inoltre ogni idea di rapporto fra le stelle cadenti e gli altri fenomeni luminosi cesserà assolutamente, ove sia certo il ritorno periodico delle stelle cadenti, perchè ciò le costituisce per fenomeno cosmico. Pertanto a me sembra ora mai sicuro il ritorno periodico del 10 agosto, che mai è mancato senza interruzione in quattordici anni dal 1833 al 1846. Ebbene in detto giorno 10 agosto, secondo i miei dati, dall'Era volgare non ricorsero che due volte sole, siano le aurore boreali, siano le meteore luminose, siano gli Aeroliti e le piogge terrose.

Anche il 13 novembre sembra da tenersi per giorno di periodico ritorno delle stelle cadenti in frequenza, essendosi riscontrato di seguito in anni otto; ed in questi otto anni nel giorno della medesima data si presentarono le aurore boreali solo tre volte, quattro le meteore luminose, ed una sola volta la pioggia terrosa. E a datare dall'Era cristiana fino a tutto il 1846, trovo notata ne'miei appunti, come apparse nel 13 novembre, che solo 10 volte le aurore boreali, dieci volte le meteore luminose ed una sola volta gli aeroliti.

Ho enunciato esser cosmiche le stelle cadenti, e per tali le indicano indubitatamente altre circostanze che io non enumererò qui [1], oltre quella del loro periodico ritorno. Ma con ciò non intendo dire che tutto quello che apparisce sotto la foggia di stella cadente sia tale, e però cosmica. Quella, per esempio, che mi accadde di vedere una sera abbassarsi più delle case che mi stavano dirimpetto, e quindi dileguarsi prima di giungere a terra, esser non poteva che un'accensione nell'aria di materia non conosciuta, ovvero un fenomeno elettrico [2].

Così all'inverso tutte le meteore luminose non hanno da

---

(1) Possono vedersi nel Cosmos di Humbold, tomo 1, pag. 115 della traduzione italiana pubblicata in Venezia l'anno 1846.

(2) Nell'antologia italiana, tomo 2, p. 143 si legge quanto appresso, che conferma ciò che dico: « Un mio amico, il quale mi assicurò di » aver visto, alcuni anni fa, una stella cadente a cielo nuvoloso; simili » fatti approverebbero la piccola altezza di queste meteore, inferiore » a quella delle nubi. »

tenersi per fenomeno meteorologico; le più innegabilmente lo sono, ma non al certo quelle grandiose che si vedono contemporaneamente in tanti paesi e regioni fra loro lontanissime, che passano con inconcepibile rapidità senza alcun rumore o detuonazione, e delle quali in alto sono istantanee l'apparizione come il cessare, dopo di aver percorso uno spazio del cielo [1].

E gli aeroliti e le piogge terrose sono eglino fenomeni cosmici, ovvero meteorologici? Il fatto della caduta per più giorni ed in paesi i più distanti di piogge terrose non si combina coll'idea della caduta di un corpo cosmico sulla terra per attrazione. Questo fenomeno indicherebbe piuttosto l'elevazione dalla terra nell'atmosfera e la conservazione per un tempo più o meno lungo in essa della materia che poi è rigettata. Non sappiamo spiegare come ciò possa accadere, nè conosciamo qual sia la forza che operi. Ma che il fatto esista è indicato dalle piogge di sostanze vegetabili, di grani ed anco di rane e altri piccoli animali indubitatamente terrestri. L'accaduto poi nella famosa tromba di Monville li 19 agosto 1845, toglie ogni dubbiezza: dei frammenti di registri riconosciuti caddero due ore e mezza dopo alla distanza di dieci leghe dal luogo del disastro,

---

(1) Citerò in esempio una meteora luminosa sicuramente cosmica da me osservata il 9 agosto 1846 qui in Pisa. Circa le 9 e mezza di sera, a 4 o 5 gradi dallo Zenit verso l'ovest apparve in mezzo al cielo sereno la meteora, che percorse rapidissimamente dal NE al SO una breve retta parallela all'orizzonte. Prese, strada facendo, la foggia di un corno concavo, o meglio quella del Corno di Amaltea. Le pareti avevano un luccicore simile a quello della luna; ma la materia che l' uno sembrava contenere alla sua imboccatura era luminosissima, e dello splendore dei brillanti, con dar l'idea di una combustione. Il capo aveva l'apparente grandezza di un grosso pugno, il corpo presentò un movimento giratorio, e fu seguitato da una traccia o coda diritta, lunga la metà del cammino percorso dalla meteora. L'apparizione fu momentanea, ed il tutto disparve istantaneamente, cioè ad un tratto il capo tondo (arrivato allora al massimo dello splendore), il corpo e la coda, col presentare il capo al momento dell'estensione una specie di scintillamento, senza però che la meteora scoppiasse o si dividesse.

e alla medesima distanza cadde in egual tempo una pesante tavola che era stata sollevata sì in alto da perdersi interamente di vista. Questi fatti provano: 1.° che anco dei corpi pesanti possono esser sollevati in aria a grandissima altezza; 2.° che vi possono sussistere per un tempo lungo e ritenervisi da una forza la quale si oppone a quella della gravità; 3.° e che la piccola distanza che dei corpi leggerissimi percorsero in tanto tempo esclude l'azione meccanica del vento [1].

Dietro questa esposizione, e dopo i riscontri che si hanno di esser talvolta tuonato nelle oscure nubi per lunghi minuti prima che le pietre ne sieno giù precipitate, più certa che probabile apparisce l'elaborazione degli aeroliti e delle piogge terrose nell'atmosfera. Amiamo di trascriver qui un frammento di lettera del celebre Chladni al Barone di Zach (Correspondance Astronomique, tomo 2.° p. 310) sugli aeroliti e la pioggia terrosa del 14 marzo 1813: « ... Ma di tutte queste pietre quella » a cui metto il più gran prezzo ed a cui annetto il maggiore » interesse, sono quelle cadute dal cielo in Calabria li 14 marzo » 1813. Questo fenomeno era sì straordinario, era accompagnato » da circostanze così singolari, che io sono portato a prenderle » per dei frammenti di qualche massa planetaria. Questa me- » teora ha traversato una parte della Calabria presso Gerace, » Catro, Crotone, Catanzaro ec. Si vide una nuvola rossa che » veniva dall'est dalla parte del mare, e che sparse le tenebre » dappertutto. Si intese nell'aria un rumore spaventevole, un » ruggito *continuo* come quello del mare in burrasca. Si videro » dei *baleni*, delle *strisce di fuoco*. Delle grosse gocce di acqua

(1) All'inverso la specie d'infusori proprie all'America meridionale, al Chili ed alla Guiana, la quale si rinvennero tanto nella polvere spinta dal vento di Affrica nel mezzogiorno dell'Europa, come quella caduta senza uragano presso le isole di Capo Verde, provano che il vento può pure esercitare una meccanica influenza pel trasporto di tali polveri. Bensì l'influenza del vento non può estendersi alla manutenzione per tempo lunghissimo di quelle materie nelle elevate regioni dell'atmosfera.

» caddero, ed una sabbia rossa da cui tutto veniva ricoperto.
» Caddero nel medesimo tempo delle pietre a Cutro (fra Cro-
» tone e Catanzaro) . . . » Queste parole, le quali sono dell' autore stesso della teoria cosmica degli aeroliti, molto significano nel senso contrario, perchè chiaramente espongono l'elaborazione e la permanenza nel seno dell'atmosfera della pioggia terrosa e degli aeroliti de'quali si tratta. La contemporaneità poi de'due fenomeni ne mostra chiaramente l'origine comune; e la caduta seguita da quella pioggia terrosa per un tempo assai lungo in luoghi molto distanti fra loro, come lo sono Palermo, la Calabria, la Toscana ed il Friuli dimostrano che tal caduta di pioggia non derivò da cosmica discesa operata dalla gravità.

Mentre pertanto rimarrà alla scienza lo spingere il modo di produzione di questi fenomeni nel seno dell' atmosfera, ci crediamo autorizzati a concludere:

1.° Che le stelle cadenti propriamente dette, i bolidi o siano stelle cadenti cospicue, ed una gran parte delle meteore luminose sono indubitatamente di natura cosmica.

2.° Che diverse delle stelle cadenti non sono tali che apparentemente, e devono teuersi per semplici accensioni nell'atmosfera, le quali non hanno né la celerità planetaria delle vere stelle cadenti, nè il loro gran volume.

3.° Che gli aeroliti e le piogge terrose sono assolutamente fenomeni meteorologici, perchè abbiamo sovente assistito alla loro formazione e dimora nell'atmosfera [1].

4.° Che analogamente, sono pure di origine atmosferica e terrestre quelle meteore luminose.

a Che si vedono sorgere dalla superficie della terra (ciò accade frequentemente in occasione di terremoti.)

b Che si dividono, fanno esplosione, producono sibilo, fumo, odore.

---

(1) Indicammo poc'anzi la presenza degli infusorj nelle materie delle pioggie terrose: questo fatto, costatato da Ehremberg in moltissime polveri piovute in varie epoche ed in diversi luoghi, porge prova diretta dell'origine terrestre delle piogge terrose.

c Che si vedono patentemente cadere a terra;

∂ Quelle finalmente che hanno cagionato degli incendj, i quali operatisi in modo assai diverso da quelli che produce il fuoco, indicano chiaramente diversa, (forza elettrica), la loro materia ignea.

All'incontro non avendo esempj che siano caduti sulla terra dei corpi veramente cosmici per la loro ampiezza e la velocità planetaria, possiamo confermarci che tutti i fenomeni luminosi, i quali hanno fatta sentire sulla terra e sulla di lei atmosfera la loro influenza, sono sicuramente originarj del nostro globo o dell'inviluppo che lo circonda.

Non ho parlato dell'origine delle aurore boreali o australi, certi oramai essendo i fisici che la sede di essa è nell'atmosfera. Non ostante noterò, se occorre, ciò esser provato: 1.° dalla costante apparizione primitiva delle aurore dalle regioni polari; 2.° dal seguir esse il moto diurno della terra; 3.° dal loro rapporto colle perturbazioni magnetiche; 4.° finalmente dalla loro influenza sull'atmosfera, e sul di lei depuramento, poichè, prima il signor Forbes, poscia il signor de Saussure osservarono, che in Scozia non si vedevano scintillare le stelle, che quando aveva o aveva avuto luogo l'aurora boreale *(Bibl. Univ. de Genève, febbrajo* 1841*)*.

D'ALCUNE SINGOLARITA' RELATIVE AI CRISTALLI

NOTA

DI FRANCESCO ORIOLI

già Professore di Fisica nella Università di Bologna,
ora Prof. di Storia antica ed archeologia nell'Università Romana.

Il duro verno di questo incipiente anno 1850, e dell'antecedente dicembre, m'ha, già da qualche settimana, data l'opportunità di fare alcune osservazioni, le quali, sebbene di non molto momento, pur mi sono sembrate non indegne d' essere offerte alla erudita curiosità degli studiosi della natura. *In tenui labor.*

Ho l'abitudine di dormire, nella mia camera da letto, colle finestre chiuse dai soli cristalli, piacendomi, al partorirsi del giorno, il godere la luce dell'aurora nascente, e i primi raggi del sole mattutino che la discacciano. Così m'è stato facile è frequentissimo il vedere, in questo mezzo tempo, innanzi la mia levata, l'interna superficie di essi cristalli ricoperta, a volta a volta, or de'vapori della respirazione, condensativi sopra per potenza del freddo esteriore, or delle fioriture di brina o ghiaccio, che una temperatura più bella vi faceva apparire bizzarramente disposte e coagulate.

E fu al cominciare della stagione, che, contemplando la bianca vernice per sì fatto modo formata, m' è avvenuto una prima mattina d' accorgermi di cosa da me, fino a quel momento, non incontrata, o forse nón considerata mai; ed è che, in uno de'cristalli, la patina, più o manco opaca, si mostrava interrotta, lasciando uno spazio chiaro e diafano, ricordante colle forme l'impressione quasi d'un dito accidentalmente strisciatovi sopra, il quale v'avesse delineato a capriccio un suo rabesco. Supposi pertanto, che, in realtà, non altra fosse stata l'origine di quella singolarità; nella quale ipotesi, mi si presentò subito spontanea la ragione del segno conservato invisi-

bilmente, e poi fatto visibile, in mezzo alla semiopacità del velo vaporoso, per l'assenza di esso velo nello spazio che il dito aveva toccato. Tutto riducevasi a un fatto come dire di litografia. Un lieve trasudamento grasso della pelle, che mai non manca, forse aveva impercettibilmente unto il tratto del cristallo sul quale aveva premuto, e all'ora poi del condensarsi del vapore, quest'ultimo aveva fuggito le particelle pinguedinose, attaccandosi solo alla parte libera d' ogni untume. Nondimeno volli conoscere, per esperimento diretto, quanto ciò avesse verità, e, nettata prima con pannolino, e lavata, e asciugata una delle lastre, mi feci a delinearvi sopra, con un dito ugualmente lavato, e ben rasciutto, qualche carattere, calcando nè troppo, né troppo poco, ed aspettai che il seguente mattino verificasse o smentisse quella opinion mia. Né l'esito fu diverso da ciò che aveva immaginato. Così fui certo che, nel fatto, la cosa era com'io l'aveva supposta, e cessò qualunque maraviglia. Pur mi piacque seguitare le osservazioni, e variarle così come passo a dire.

Ho già narrato, che il campo delle medesime furono specialmente, fin da principio, i cristalli d'una mia finestra; e indi dell'altre, rivolte, quali a un dipresso a levante, quali a tramontana: ma san tutti che v' è cristallo e cristallo, e quelli de'quali parlo mi son sembrati appartenere alla categoria dei vetri bianchi d'una non molto omogenea pasta, con parecchie bolle e strie. Debbo però aggiungere, che, operando, allo stesso modo, sopra lastre di specchio colla stagnuola al di dietro, la differenza degli effetti, quantunque un pò meno apparenti, non mi è sembrata molto notabile.

Riflettendovi alquanto, compresi presto, che, a studiare questa maniera di fatti, non era poi necessario aspettare il freddo del mattino, e le condensazioni di vapori ch'esso adduce. Mi fu facile prevedere che doveva bastare a tanto la natural disposizione la quale hanno i vetri ad appannarsi, quando uno vi soffi sopra col fiato, massime ne'freddi mesi, in qualunque ora del giorno. Con ciò m'è stato dunque possibile di fare apparire i segni in pochi secondi, sino a trasformare tutto ciò

in una maraviglia degl'idioti, ed in una ghermiuella per fanciulli, massime operando in alcuna delle guise che dirò tra poco. Ma ripigliamo il racconto.

Narrai, che i segni del dito si manifestavano per l'assenza del vel vaporoso su loro: ma, quando massimamente, a farli apparire, in luogo della inalazione col fiato, se ne lascia l'incarico al vapore depositato del mattino, avviene allora spesso (posto che la deposizione sia molto abbondante), che la mentovata assenza non s'osservi, e che la manifestazione si riduca ad un diverso grado d'opacità, e perciò di velatura, tra gli spazi non toccati, e i toccati, a'quali ultimi non sempre appartiene l'opacità minore. E di ciò ancora non mi sembra che sia da stupire. Può e dee credersi, che gli atomi di materia grassa lasciati dal dito sian discontinui sul vetro, come lo è la porosità donde trasudano. Allorchè pertanto il freddo è più intenso, avviene alla fine che, pur alcune stille di vapore s'intercalino e si depositino nelle discontinuità, sotto la lor forma globulare, tra un atomo grasso e l'altro, ed attraendo esse le lor compagne, al successivo abbassar della temperatura, formin goccie sempre più grosse, che soverchino da ultimo in mole, e sopravanzino in volume, quelle della sostanza untuosa, minutissimamente zigrinando la superficie dove ciò fanno, e colle alternate differenze di diafaneità operando le apparenze di opacità maggiore che pur mostrano.

Ancora ho veduto, che, secondo il più o il meno del premere e del trasudare, la materia litografica, o si depone più abbondante verso i lati, e lascia quasi immune il mezzo, o si sparge equabilmente senza differenza tra il mezzo e i lati, o si dispone come dire in più correnti o striscie. Intanto è bene di notare, che, quando il vapore non s'aggiunge, i segni (almen colle lenti di mezzana potenza ch' io mi trovo avere) non è possibile distinguerli, nè manco operando su cristalli di specchio, a fin che la differenza nella linpidità dell' immagine avvisi di quel che in altro modo è impercettibile.

Ma sin quì, com' io testè avvertiva, non s' è trattato che d'un esperimento litografico Bello mi parve l'indagare fino a

qual segno ogni altra maniera d'impressione fosse tollerata, o conservata. Perchè nacquemi il dubbio, che, in più modi, potesse ciò accadere, conosciuta la natura del corpo sul quale sperimentava, ed altri particolari che ogni superficie polita risguardano.

E, per vero, io sapeva, che, tra le molte apparenze di struttura, e di modo d'aggregazione, le quali assumono vetri e cristalli, un'apparenza domina, ed è l'apparenza lamellare, che si manifesta quando l'azione lenta del tempo disgrega le parti, rispetto a che tutti sanno la portentosa tenuità delle minime lamine, in cui, per così dire, si risolvono, e si sfarinano essi, riconoscibile a occhio di fisici pei colori d'iride che prendono. E diceva a me stesso. — Com'esser non può, con tale struttura, che corpi, anche mediocremente duri, i quali non sarebbero capaci di scalfire profondamente la grassezza delle lamelle sovrapposte a lamelle, valgano però a lasciar, per così dire, sopra l'estrema epiderme alcuni lor segni, posto che ivi tanto minore esser dee la tenacità, ed il legame? E richiamava, in questo proposito alla memoria le compressibilità parziali riconosciute da lungo tempo nel fatto delle così dette figure entoptiche; e ricordava le induzioni che trar si possono dalle figure stesse di Lichtenberg, dall'altre di Kestner, e simili. Nè la sola ragione suddetta mi faceva così congetturare; ma un'altra eziandio, la quale si riferisce alla specie di velo uniforme, ed estremamente sottile, che, sopra ogni superficie unita e liscia, e perciò sopra le lastre da me sottoposte, o da sottoporsi, ad esame, deposita alla lunga, non pur dirò il pulviscolo atmosferico, studiato da Raffinesque, ma eziandio la congerie delle esalazioni vegeto-animali e vaporose, che, per così dire, infangano le più basse regioni dell'aria. Perchè ho sempre pensato, e penso, che, in realtà, tutte le superficie de'corpi, ma più regolarmente poi quelle de' corpi politi, abbian sempre aderente ed accumulata al di sopra una specie di gromma, vogliasi dire una vernice più o men tenue, depostavi dall'atmosfera, ne' suoi contatti, gromma, o vernice, impercettibile, tra per la sua tenuità portentosa, tra per la na-

turale diafaneità; e tale, che non si distrugge nemmeno con molte lavande. Ciocchè però non deve impedire, ch' essa non possa essere solcata da corpi anche di minima durezza, nel modo delle cere con che i calcografi cuoprono certi rami da esser poi trattati con punta per le loro delineazioni, le quali infine l'acido mordendovi farà penetrare nel fondo del metallo. E mi par certo, che da esse nasca la facilità con che anche la sola luce ne'vetri co'quali cuopriamo le stampe messe in cornice, lascia a poco a poco formarsi le figure modernamente indicate e studiate dal Bizio e dal Cini. Dirò di più, che la teorica diviene così la stessa, rispetto a questo sottilissimo velo naturalmente applicato, che rispetto a'veli artifiziali del Daguerre, e de'numerosi imitatori suoi: perchè, tanta essendo la sottigliezza, non può non avvenire che con molta facilità si lasci essa intaccare dalle azioni inegualmente esercitatevi sopra per urti locali, o pressioni, o irradiazioni più o men forti di luce, di calore, d'elettricità, o per chimici lavori di quali si vogliano agenti. Infine, indipendentemente da ciò che la lievissima patina mentovata in ultimo luogo può soffrire dalle anzidette cagioni, i corpi stessi che meccanicamente rotano o strisciano sopra un piano ridotto a polimento, rivestiti come debbono spesso essere ancor essi di una patina di pari genere, non si vede come non abbiano il più sovente a lasciarne in parte spogliare le prominenze loro per virtù della confricazione cedendo al corpo sottoposto la porzione tolta.

Tanto io andava tra me a me ragionando; e allora io ne traeva di leggieri la conseguenza, che, per qualunque delle sopraddette cause, la superficie de'miei cristalli fosse per trovarsi più o meno alterata in alcuni de'punti della estrema sua corteccia, l'alterazione avrebbe in tutti i casi a rendersi più o meno impercettibile coll' uno o l' altro degli artifizii ricordati nel principiare di questa nota. Imperciocchè sì fatte alterazioni necessariamente turberebbero la conducibilità pel calore negli spazii dove sarebberi operate, e con ciò la disposizione a fare depositare sopra di sè più o meno presto, e in più o meno abbondanza, la specie di rugiada, della quale favelliamo.

A che s'aggiungerebbero ne'diversi casi altre differenze secondarie facili ad indovinarsi, secondochè entrerebbero in giuoco anche le azioni capillari, e le lotte delle diverse forze aggregative tra materie e materie e simili. Premesse le quali dottrine, io m'accinsi alle prove: nè mi sembra ch'esse abbiano ingannate le mie previsioni.

Ho cominciato mettendo a cimento i metalli; e non dico l'acciaio, ma, per esempio, il rame comparativamente sì poco duro, e da ultimo lo stagno ed il piombo, e i segni sono stati evidenti, e piu o meno durevoli. Incoraggiato da questi esempi ho provato il tagliente d'un comune bottone di madreperla, poi d'un altro d'osso col successo medesimo. Ho indi operato coll'estremità rotondata d'un porta-penna d'ebano; poi con una bacchetta di legno duro, poi con un'altra di legno dolce, e i segni non per ciò non s'imprimevano. Ho sostituito a questi diversi corpi la mia propria unghia, o scoperta, o coperta or d'un fazzoletto di seta, or d'un fazzoletto bianco da sudore, e le impressioni, dal più al meno, non sono mancate. Lo stesso è stato adoperando l'angolo vivo d'un libro legato alla rustica, la punta un pò forte d'una penna non bagnata in inchiostro od in altro: cosicchè ho dovuto conchiudere che realmente, o alcuno degli esteriori veli, de'quali ho parlato di sopra, o la più esterna delle corteccie lamellari delle sostanze vetrose, quanto al permettere la scalfitura, entrano nella categoria dei corpi i più teneri. Non che qualche volta l'effetto non paia mancare. Ma con un pò di destrezza e di pazienza, generalmente parlando esso non fallisce all'aspettazione.

Il tempo distrugge il più di questi segni più o manco sollecitamente. Que' del dito si conservano alle volte due o più giorni. Que'co'corpi tagliati in punta sono ancor più pertinaci. Alcuni diventano per così dire indelebili.

M'è avvenuto, in una giornata secca e freddissima, soffiando la tramontana, d'osservare, che, nell'atto di scrivere sopra uno specchio di piccole dimensioni con un bastone di ceralacca (stropicciato ben bene innanzi tratto, per elettrizzarlo, coll'avvertenza d'usare il bastone suddetto in modo che toccasse

il cristallo per un solo punto) ho udito uno sgretolio, come d'una minima scarica elettrica, e il segno capillare d'un grande O delineatovi sopra rimase questa volta solcato in guisa, che non vi fu bisogno di vapore a farlo visibile, e dura indelebile anche oggi per provarmi, che casualmente mi venne allora ripetuto l'esperimento della caraffa di Leyda troppo carica, la quale si scarica da sè rompendo il vetro.

Quanto finalmente alle piccole soperchierie, che, col mezzo fin quì esposto, possono talora eseguirsi per trastullo, io le ho praticate con un nepotino e con altri facendo apparire per arte di magia bianca scritto sulle lastre della finestra, or *sì*, or *nò*, con aspirarvi sopra fingendo di recitare parole cabalistiche, e ciò in risposta ad alcun quesito che altri proponesse; e riuscivami non di rado, nel pulir poscia il vetro colla mano coperta di fazzoletto, d'usare intanto l'unghia a segnare come risposta nuova; non senza svelare alfine l'inganno perchè l' errore non prendesse possesso dell'intelletto.

Certo tutto ciò è assai poca cosa, nè guari insegna qualche importante vero (volentieri torno a dirlo), del quale la fisica possa dirsi arricchita. È un articolo da carnovale, e come tale mi basta che s'accetti.

Nota bene. Le prove quì sopra narrate dello scrivere col dito le ho eziandio tentate sopra legno levigato, e su varie sostanze ridotte a pulimento, anche sopra una lastra d'argento, e una di marmo, e sopra una pelle liscia; infine sopra una moltitudine di corpi d'opposta natura, e gli effetti furono non diversi, quantunque non sempre ugualmente visibili. Le conseguenze e le spiegazioni sono le stesse.

SULLA MATERIA FOSFORESCENTE DEI PESCI E SULLA FOSFORESCENZA DEL MARE

ARTICOLO

DEL PROF. MATTEUCCI

(Annales de Chimie et de Physique. Tom. XXIV. Nov. 1848.)

Durante il mio soggiorno sulla costa del Mediterraneo nel 1847 avendo avuto occasione di fare delle nuove esperienze sulla fosforescenza de'pesci, ho creduto cosa utile per i fisiologi il pubblicarle.

La luce de'pesci fosforescenti dura per buona pezza, e senza diminuire sensibilmente, in mezzo ad alcuni gas che non contengono la minima quantità d'ossigene, e nei quali il fosforo ordinario non risplende. I gas de'quali ho fatto uso in queste esperienze sono l'idrogene, l'azoto e l'acido carbonico. Ho provato ancora con apposita esperienza, che la luce de'pesci non devesi per nulla al fosforo. Se in una boccia piena d'aria contenente una piccolissima quantità d' etere solforico s' immerga il fosforo, questo all'istante si spegne, ma la sostanza fosforescente al contrario continua a risplendere.

Agitando de' pesci fosforescenti nell' acqua, questa diventa d'apparenza lattiginosa e molto rilucente. Se si lasci riposare nell'oscurità, la luce svanisce a poco a poco, e si restringe in certo modo verso la superficie dove in seguito cessa del tutto. Alla menoma agitazione l'acqua ritorna lucente come prima, e cessa di nuovo nel modo che abbiamo già detto. Ho posto quest'acqua fosforescente in un tubo di vetro assai lungo, versandovi sopra dell'olio in modo che formasse una superficie di circa un metro di lunghezza. Dopo che l'acqua è rimasta in riposo la luce al solito è svanita, ed è riapparsa in seguito dell'agitazione. Gli stessi fenomeni si sono manifestati in una certa quantità d' acqua lucente che ho introdotto nel vuoto d'un barometro. Quest'acqua fosforescente riluce nei gas privi

d'ossigene, non meno che i pesci fosforescenti. V'è però una differenza che merita d'esser notata, che cioè coll'agitare molte volte l'acqua lucente sia nel vuoto, sia nei gas privi d'ossigene, la luce s'indebolisce notabilmente; e alla fine cessa del tutto.

Citerò anche un'altra esperienza che può servire a spiegare la natura di questi fenomeni. Se si ponga un pesce ancor vivo in un gas privo d'ossigene non diviene fosforescente, neppure dopo parecchi giorni; e, ciò che è più singolare, se in appresso si pone nell'aria, non dà più luce. Bisogna notare ancora che questo pesce non presenta i fenomeni dell'ordinaria putrefazione. L'acqua rilucente deve il suo splendore ad una sostanza che vi si tiene sospesa: difatto filtrandola, la materia fosforescente rimane sul filtro. Tutte le soluzioni acide o alcaline, e così l'alcool e l'etere solforico, distruggono istantaneamente la fosforescenza de'pesci, la quale cessa parimente a due o tre gradi sotto lo zero, e ricomparisce alla temperatura ordinaria sebbene un poco meno splendente; m'avvenne anche taluna volta di non vederla più comparire. La fosforescenza cessa per sempre quando la temperatura s'alza dai 38° ai 40° cent.

Da tali esperienze si potrebbe concludere che la luce dei pesci fosforescenti è prodotta da una sostanza che si sviluppa nella putrefazione, e che esige perciò la presenza dell'ossigene, ma che risplende indipendentemente dal medesimo quasi per un'azione fisica. Finalmente farò osservare che studiando la fosforescenza del mare, ho trovato che era in genere come quella de'pesci, con due notabili differenze. Primo, portando l'acqua del mare ad una temperatura di + 3, o 4 gradi cent. la luce de'punti lucenti si fa più viva e più durevole; e versando sull'acqua del mare l'ammoniaca, l'alcool o gli acidi essa diviene lucentissima: esperienza che è molto bella a vedersi. Questi due risultati possono far credere, come è opinione de'fisiologi, almeno a mia cognizione, che la fosforescenza del mare ha un'origine differente da quella de'pesci.

A. L.

DELL'INFLUENZA DEL MAGNETISMO SUL POTERE ROTATORIO DI ALCUNI CORPI

MATTEUCCI

In queste esperienze mi sono servito dell'apparecchio notissimo in Francia immaginato da M. Rumkorff con una pila di Grove di 8, o 10 elementi. Ho cercato d'investigar da principio quale influenza esercitasse lo stato di compressione del corpo sottomesso all'azione magnetica, e traversato dal raggio polarizzato, sull'esperienze abbastanza note di Faraday. Per comprimere un tal corpo ho fatto uso della morsa con cui sogliono ripetersi le esperienze di Brewster e di Soebed nella quale aveva sostituito due piani d'acciaio alle lamine curve che vi sono ordinariamente, e ciò per ottenere una compressione più uniforme in tutta la lunghezza. Aveva già fatto preparare alcuni corpi trasparenti in forma cubica come il crown, il flint, lo spato calcareo, il quarzo ecc. Per gentilezza del sig. Faraday ho potuto operare su d'un bel pezzo del suo vetro pesante, ed ho veduto, come tutti quelli che hanno studiato questo soggetto, che l'azione del magnetismò sui corpi polarizzati è nulla, se s'impiegano i corpi dotati di doppia refrazione. E dopo aver più o meno compresso tali corpi l'ho sottoposti all'azione del magnetismo; ma l'effetto è stato come se non fossero stati compressi.

Sottoponendo ad una tal'esperienza il crown allorchè viene compresso si vede che non vi è più rotazione sensibile sul raggio polarizzato dalla presenza del magnetismo; usando però il flint, e meglio il vetro pesante l'influenza della compressione si fa rimarchevole.

A misurare esattamente la rotazione del raggio polarizzato mi son servito con buon successo della doppia lamina di quarzo di M. Soleil. Ecco l'esperienza descritta colle sue particolarità.

M'accerto dapprima che la deviazione del raggio polarizzato, la quale ha luogo talvolta a destra e tal altra a sinistra dell'osservatore, in quel senso è la medesima, qualunque sia la direzione della corrente che percorre l'elettromagnete. Tenendo l'apparecchio a zero ed il circuito aperto comprimo fino a un certo punto il vetro pesante; si veggono allora comparire diversi colori nelle due immagini, ed io faccio tornare a zero l'apparecchio tenendo sempre il vetro compresso. Appena si fa passare la corrente la rotazione tosto si manifesta; ma, non è più la medesima a dritta o a sinistra secondo la direzione della corrente, e la differenza nasce senza dubbio dalla compressione. Se dopo la compressione è stato necessario girare a dritta o a sinistra l'apparecchio per rimetterlo a zero, la deviazione che produce il magnetismo è più forte se questa succede nel senso in cui è stato girato l'apparecchio dopo la compressione, che non nel senso opposto.

La differenza è molto notabile: operando col vetro pesante compresso, ho osservato una rotazione che era di 5, 6, o 8 gradi in un senso, e solo di 3, o 4 nell'opposto. Tostochè cessava la compressione le due rotazioni divenivano esattamente eguali. Questi risultati si verificano ancora nel flint quantunque non tanto distintamente.

Bisogna notare che la differenza di rotazione nei due sensi prodotta dal magnetismo sul vetro compresso, varia a seconda che la rotazione la quale si sviluppa in forza della sola compressione, è maggiore o minore di quella che è prodotta dal magnetismo sui vetri non compressi.

Il massimo di rotazione che ha luogo col vetro compresso è più grande di quella che accade senza la compressione, se la rotazione prodotta dalla compressione è minore di quella che il magnetismo sviluppa sui vetri non compressi, e viceversa.

Mi sembra ancora di qualche importanza l' aver osservato che la rotazione prodotta dal magnetismo nel vetro pesante o nel flint, aumenta considerabilmente insieme alla temperatura di queste sostanze.

Operando sempre colla stessa corrente, ho osservato una rotazione quasi doppia, facendo uso del vetro pesante alla temperatura all'incirca dell'olio bollente. E quando il corpo si era raffreddato la rotazione ritornava la medesima.

Questi fatti provano ad evidenza la relazione de' fenomeni scoperti da Faraday colla condizione molecolare de'corpi sottoposti all'esperienza, e mi sembra che debbano dar qualche lume sul difetto di facoltà rotatoria mediante l'azione magnetica, nei corpi dotati di doppia refrazione.

Terminerò questa nota coll'esporre alcuni risultati ottenuti sullo stesso soggetto, i quali sebbene negativi mi sembrano nondimeno di qualche importanza. Dopo molte esperienze ho dovuto conchiudere che non v'era azione alcuna sensibile frai corpi diamagnetici, così i fenomeni diamagnetici che presenta un ago di bismuto alla presenza d' un elettro magnete molto forte, sono gli stessi alla presenza d'un altro corpo diamagnetico, o ancora senza di esso.

Ho osservato egualmente che la disposizione delle linee nodali formate su d'una lamina di ferro dai diversi suoni che le si faceva produrre non soffriva la menoma modificazione per la presenza d'un forte elettromagnete.

Finalmente mi sono posto tutt'uomo ad investigare se l'azione diamagnetica misurata col numero delle oscillazioni di un ago di bismuto, alla presenza d'un elettromagnete; fosse modificata dalla presenza dei gas o dell'aria atmosferica. Ho potuto ottenere il mio ago sospeso ad un filo di borzolo in una piccola palla di vetro soffiata all'estremità superiore d'un tubo parimente di vetro. In tal guisa tenendo chiusa la palla fra due poli d'un elettro magnete di Rumkorff ho potuto contarne le oscillazioni, sia nel vuoto barometrico, sia nell'aria o negli altri gas. In tutti i casi ho ottenuto gli stessi risultati, in modo che mi sembra impossibile di potere spiegare i fenomeni di diamagnetismo coll' azione del magnetismo la quale sarebbe più forte sui gas, di quello che sui corpi cui s'è dato nome di diamagnetici.

A. L.

NOTA III.ª CONCERNENTE ALCUNE VISTE PRINCIPALI DI GEOLOGIA ATTE A FISSARE L'ATTENZIONE DEGL'INGEGNERI ED AGRICOLTORI

DI ANTONIO TOSCHI

Non può ritenersi di avere a sufficienza analizzate le proprietà idrografiche ed agronomiche del suolo quando unicamente si considerano i terreni nel loro insieme di una classificazione geologica, e si escluse qualunque dettaglio risguardante la qualità intima delle terre agrarie. — Lo studio speciale della composizione di queste terre, che prende il nome di Geonomia, importa ben altra profondità di sconoscenze chimiche e mineralogiche che quella comune alla generalità degl'Ingegneri Agricoli, ma ciò non esclude però la possibilità di basare sopra conosciute esperienze alcuni sani criterii di pratica utilità.

Nemmeno può ritenersi di essere preparati a studiare i materiali atti alle costruzioni architettoniche, quali vengono forniti dai diversi terreni classificati geologicamente, se prima non si fissò qualche norma che richiami le proprietà, ed i caratteri più rimarchevoli di questi medesimi materiali; il che è quanto dire di fissare qualche fondamento di Litologia.

Sembra quindi che il presente scritto, concernente le *Terre Agrarie*, e le *Pietre da costruzione*, possa a buon diritto porsi a seguito della nota II.ª inserita alla pag. 213 della *Raccolta Scientifica Anno IV*, come pure precedere lo studio dei terreni geologici riferibilmente ai materiali da costruzione che somministrano.

Delle terre agrarie.

La primaria ed essenziale destinazione delle terre per rapporto alla vita vegetale, quello si è di prestarsi come corpo

intermedio fra la pianta ed i principii nutritivi a lei destinati, offrendosi come base ed appoggio meccanico per mantenerla in posizione conveniente al di lei sviluppo, e prestarsi come serbatoio dei sopradetti elementi nutritivi, i quali possono comprendersi nelle due classi generiche di *humus* ed *umidità*. Distinto così accuratamente l'elemento primordiale della terra semplice vegetale, il di cui studio resta interamente del dominio della mineralogia, degl'altri principii occorrenti alla vita vegetale, quali sarebbero gl'ingrassi organici animali e vegetali, i sali minerali, l'acqua ed i gaz, non sarà malagevele il comprendere che qualunque specie di detrito terroso, come la pura sabbia, i lapilli e perfino il vetro pesto, possono prestarsi come base allo sviluppo ed incremento di alcune piante. Nulladimeno è notissimo che la composizione puramente mineralogica del terreno influisce grandemente sull'attitudine sua alla vegetazione, anzi non sarà mai abbastanza divulgato, che inutile riesce il somministrare anche ad esuberanza gl'ingrassi o l'umidità a certi terreni, che per l'originaria loro composizione minerale trovansi del tutto od in parte inetti alla coltura delle piante. Hannovi per così dire nel suolo due specie distinte di fertilità; e cioè quella chimica proveniente dall'abbondanza, e favorevole composizione degl'elementi assimilabili alle piante: e la fertilità meccanica che deriva dall'attitudine che ha una terra a sudividere minutamente gl'ingrassi e le acque per mezzo dell'assorbimento: a facilitare alle radici la permeabilità nell'interno del suolo, difendendole dal pericolo di corrompersi ec., e questi sono ufficii che non possono essere resi dalle terre tutte, qualunque sia la loro natura ed il modo vario di struttura. Quindi è che i versati cultori di Agronomia molto accudirono allo studio delle basi terrose, e delle dosi in che queste il più di sovente s'incontrano miste; anzi dalla nomenclatura mineralogica di queste basi improntarono in parte le espressioni più, o meno acconcie per classificare le terre stesse. Noi desumendo da quanto ci è noto su tale soggetto, crediamo di proporre e disadottare per nostra particotare maniera di espressione quella nomenclatura che in primo luogo allude al

modo di formazione geologica che dette origine agli estesi depositi di terra vegetale. In secondo luogo poi sembraci di dovere seguire la generalità degli agronomi nel denotare le qualità speciali di terre figuranti in questi depositi, dal nome della sostanza minerale che vi predomina. Distinguiamo quindi:

I. Terre vegetali provenienti da roccie ignee. . .	di trabocco di metamorfismo
II. Terre vegetali provenienti da roccie di sedimento acqueo.	Quarzose Argillose Calcaree

I. Le prime non sembrano potersi sudividere in classi parziali, derivate dalla loro natura mineralogica, attesa la moltiplicità degl'elementi che racchiudono, ed avuto riguardo alla poca estensione dei depositi loro frastagliati, e per così dire, eccezionali. Giova però il fare distinguere le roccie da cui provengono, in ordine alla maniera colla quale i fuochi sotterranei agirono, sia producendo dei veri trabocchi d' impasti terrosi, come reagendo sui depositi preesistenti e motamorfosandoli. — Intendesi per terre di trabocco quei depositi di suolo moticcio coltivabili che formasi coi detriti terrosi delle roccie cristalline di fusione, o colle lave, ceneri e scorie polverizzate che furono anticamente, o che vengono al dì d' oggi erutate dai valcani. Quindi è che possonsi citare in prima classe, riferibilmente alla composizione mineralogica, le terre di detrito granitico e porfirico, come quelle della Protogina, della sienite, della pegmatite, dell'Eurite, della trachite, delle pumiti ec., le quali passono col tempo, e sotto circostanze favorevoli, allo stato argilloso; imperciocchè il feldspato che ne è un primario ingrediente dà luogo colla decomposizione sua a ricchi depositi di Caolino, di cui la base è argilla. Tali terre granitiche, che occupano fra quelle tutte di trabocco un estensione rimarchevole, sono primieramente distinguibili per le moltiplici pagliette brillanti di mica che fanno parte della loro massa sabbiosa; sono ordinariamente limitate in prossimità delle montagne gra-

nitiche da cui derivano, e si lavorano facilmente, ma hanno poca profondità; nulladimeno conservano sufficientemente l'umidità e sono sciolte e fertili, benchè la proporzione grande di potassa o di soda che entrano nella composizione chimica del feldspato dieno alle terre che ne risultano una viva tendenza ad impadronirsi dell'acqua, e quindi proprietà nocive alla vita vegetale. — Figurano quindi le terre di detrito serpentinoso o steatitoso, come quelle della magnesite, della giobertite, del Talco, della Steatite, del Dialaggio, della Clorite ec., e queste derivando da roccie tutte magnesiache, affettano sempre e rendano sensibile, sia nelle acque che sopra vi trascorrono, come in certe efflorescenze che vi si formano alla superficie, l' elemento predominante della magnesia. — Altrettanto potrebbe dirsi delle roccie di trabocco silicee, ed anche dei silicati o d'allumina, o di potassa o di magnesia che formano la categoria delle roccie semplici, granato, disteno, ossidiana, perlite, amfibolo, Pirosseno, ec.

Hannovi inoltre le terre propriamente dette volcaniche, perchè sono il prodotto diretto di fuochi sotterranei, che attualmente od in epoche non molte remote, danno luogo a copiose erruzioni di materie terrose quasi sempre cristalline e spesso vetrose o scoriacee. Tali depositi comunque ricadino per la loro essenza minerale nella categoria delle precitate roccie di trabocco, delle quali non sono che gli ultimi rappresentanti, a confronto della primaria volcanicità terrestre, possono essere considerati, e come lave e come sabbie volcaniche. — Le prime sono veramente impasti di svariate materie minerali, fuse per azione ignea e colate dai crateri e scoscendimenti dei volcani, fino a lasciare alla loro base degli estesi sedimenti consolidati, i quali sono generalmente suscettibili alla lunga di produrre superficialmente uno strato friabile e moticcio di un detrito bruno, o rossastro assai fertile. Queste terre volcaniche sono spesso metallifere, e specialmente ferruginose, si riscaldano sotto l'azione del sole sensibilmente, ed alla profondità di qualche police, in causa forse della loro tinta bruna. Lo spessore di questo strato terroso va di continuo aumentando a misura che la de-

composizione della lava progredisce; ma il più di sovente l'alterazione di questa, occasionata semplicemente dagli agenti atmosferici è così lenta e poco sensibile, che occorrono anni e secoli per convertirla in terreno agrario. Colà però ove l'industria umana trova di che appagare le indagini sue, sia per una favorevole ubicazione agronomica, o per un clima propizio, veggonsi praticate dalla mano stessa dell' uomo escavazioni e trebbiature attivissime sulla nuda lava approfittando della superiore scoriacità che gli è propria. Veggonsi con palese profitto triturare a martello e con tanta arte polverizzare e rimuovere i duri massi di un suolo ineguale e quasi affatto pitreo; finchè appena uguagliato e per qualche tempo esposto alle intemperie, prestasi poi all' ordinaria coltura come una delle migliori terre agrarie. —

Oltre alle Lave, come si disse, trovansi anche le sabbie volcaniche, le quali constano in massima parte di scorie, ceneri, e detriti di lave antiche gittate ben lungi dai crateri e indurite prima di giungere (nell'epoca nostra per mezzo della degradazione) a quello stato di deposito superficiale e mobile che le costituisse terre vegetali. Esse sono aride da prima, ma prontamente si cambiano, e nel volgere di pochi anni forniscono un suolo sabbioso che bene indenizza le cure impiegate dall' agricoltore che ne aiutasse lo scioglimento. —

Concludiamo circa alle terre provenienti da roccie di trabocco, che in generale fra le sostanze minerali, che entrano nella costituzione di queste roccie, il feldspato è il più suscetibile d'entrare in decomposizione; ed il feldspato si trova in quantità più o meno abbondante nella maggior parte delle roccie primitive che danno luogo a depositi terrosi di qualche rilievo. Basta poi che egli perda la sua tenacità perchè gli altri elementi componenti la roccia si lascino trascinare dagl' agenti atmosferici e cedino alle più piccole cause di degradazione. Solo che la quasi totale mancanza di materia calcare in mezzo a queste terre di trabocco, le rendesse uno dei primari elementi che vedremo figurare con tanto profitto nelle terre provenienti da roccie di sedimento. La silice originaria va pure

citata tra le sostanze che più figurano nella costituzione delle roccie di trabocco, anzi unicamente per azione ignea può essa venire disciolta; talchè quando noi la vedremo figurare nelle terre sedimentarie quarzose, è dà aversi sempre presente alla mente che vi si trova sotto forma di relitti o granelli triturati che mai fanno corpo fra di loro ne si collegano.

In prossimità alle roccie di trabocco trovansi costantemente quelle di metamorfismo, poichè all'epoca in cui gl' impasti incandescenti delle roccie di trabocco comparvero al contatto dell'atmosfera necessariamente occasionaronsi delle ricotture e diseccazioni negli strati delle roccie sedimentarie che venivano sollevate, fesse e tormentate in mille guise. — Hannosi adunque in primo luogo i Gneis, la Quarzite, le Filadi o lavagne o schisti ora talcosi, ora micacei, ora argillosi ; e da questi ne provengono poi delle terre disseminate di scagliette o piccole pietruzze fogliettate e brillanti ; e tali terre sono poco fertili ma assai precoci, sia in ragione di loro tinta bruna che vi attiva la vegetazione, sia per la presenza della magnesia che vi è spesso comune. — Trovasi conveniente di citare quì altra varietà di roccie altrettanto modificata da agenti emanati in dipendenza di azioni ignee, quanto gli schisti , ma di una maniera di metamorfismo ben differente. Tali roccie sono la Dolomite, la vacca, il gesso, ec, Queste forniscono terre ben distinte da qualunque altra preveniente da roccia ignea, e ciò in causa della presenza della calce, sia carbonata, sia solfata. Anzi l'abbondanza in che vi figura, e l' originaria formazione di queste roccie che fu per via di sedimento acqueo, potrebbe indurre a classificarle fra le terre sedimentarie calcaree. Però volendo noi rimanere fedeli alla classificazione adottata, considerando le Dolomiti, la vacca ed il gesso come roccie metamorfiche, citeremo quì (come anello di passaggio fra le rocce ignee e le sedimentarie) le proprietà loro caratteristiche. Siccome la calce vien facilmente disciolta e trasportata dalle acque correnti, così le sorgenti ed i corsi di acqua praticati nei depositi dolomitici e gessosi affettano sempre dei caratteri distintivi, quali sarebbe di lasciare ovunque dei depositi, d'essere spesso gazose

o termali, di corrodere con facilità i tessuti organici, attivare la vegetazione consumando gl'ingrassi,e finalmente d'essere poco potabili, giacchè è opinione accreditata che dal uso di tali acque provenga l'alpina malattia del gozzo e Cretinismo.

II. I depositi terrosi o anche ghiaiosi che si formano a carico delle roccie sedimentarie, quando queste per lungo spazio di tempo vennero assoggettate alle azioni distruttive degli agenti atmosferici e degli animali, possono comprendersi in tre gruppi principali, fra di loro distinti, e denotati, come già facemmo, dalla predominanza in essi della Silice o Quarzo, dell'Allumina o Argilla, e della Calce o carbonato calcare. In fatto osservando con occhio geologico i conglomerati, le Arenazie ed i marmi o pietre fine, che in fondo sono le tre maniere di essere di qualunque siasi roccia di rimpasto o di sedimento, noi troviamo mai sempre predominanti e ripetute le medesime tre qualità di componenti mineralogici, sia che riguardiamo i noccioli o grani impastati, sia che si ricerchino i cementi che li colegano. Il geologo ravisa in fatto nelle roccie sedimentarie, che all'epoca attuale mostransi consistenti ed allo stato di durezza lapidea, gli elementi disgregati e terrosi che in epoche geologiche assai anterieri costituivano delle vere terre vegetali. Nè in questo giudizio può darsi che egli sia colto in errore, poichè i depositi carboniferi ligniferi e conchigliferi che sempre si trovano frammisti alle roccie di sedimento ne fanno chiara ed indubitata testimonianza. Vivevano piante e nutrivansi animali analoghi, se non affatto simili a quelli di oggi dì: morivano e rimanevano sepolte le loro spoglie in grembo al suolo medesimo che loro aveva dato ricetto, dunque le condizioni di quei terreni dovevano in tale epoca essere nella maggior parte conformi all' odierno nostro soprassuolo popolato di piante e di animali. Non è ora del nostro istituto di arrestarci ad indagare le cause che consolidarono queste roccie, nè l'epoche distinte in cui si formarono, ma è certo abbastanza chiaro che gli elementi mineralogici che da prima le costituivano venendo di bel nuovo dagl'agenti esterni restituiti allo stato disgregato e sciolto sono quei d'essi che costituiscono le migliori

nostre terre agrarie. Così le acque pluviali, i venti e le valanghe agendo periodicamente sulle montagne accumulano i detriti, che si formano continuamente dalla decomposizione lenta ed indefessa della superficie delle roccie; formano dilami, e torrenti che precipitando logorano e polverizzano tutte le pietre che ingombrano i loro letti, e finalmente portano nelle vallate le ghiaie o sassi rotondati, la beletta, i fanghi, le sabbie e la torba. I grossi fiumi perdendo poscia in parte il loro impeto allorchè si stendono in più larghi spazi e scorrono in pendio meno ardito, depongono al mare le minute arene e la melma che tenevano in sospensione. Quà formansi cordoni litorali di rigurgito marino, tomboli, e dune: altrove con argini naturali sostenendo le acque torbide si colmano le campagne di vera terra vegetale, ma infine sono sempre quei medesimi elementi, che predominavano nelle roccie di sedimento, silice, allumina e calce, ora modificate da qualche ossido metallico, ora no. — Molti sono i criterii fissati dalla scienza per distinguere nella terra vegetale questi componenti, o almeno determinare la dose con che vi sono mescolati; come è assai studiata dagli agronomi la maniera di coregger mineralogicamente quelle terre che trovansi di cattivo miscuglio agrario, ma non è qui dato a noi di estenderci su tale argomento. — Citeremo però come le terre quarzose sono quelle, ove predomina l'arena o sabbione siliceo a granelli durissimi e spesso rilucenti, che sempre rimangono disgregati, e danno al suolo una scioltezza e permeabilità per parte dell'acqua e del calore, che lo caratterizzano terreno *leggiero* e *caldo*. Formandosi nella massima parte, queste terre quarzose, ai lidi del mare ed in prossimità ai grandi corsi delle acque ove risultano anche spesso ghiaiose. Ciò è in causa dell'essere le sabbie le prime a venire depositate dalle acque, sia perchè la silice è la più pesante di tutte le terre prese in eguale volume e diseccate, sia perchè essa non viene mai trasportata in minute particelle come le altre, ma conserva sempre le dimensioni di granelli distinti ed angolosi. Le roccie sedimentarie che somministrano le terre quarzose sono principal-

mente le arrenarie silicee, la *granvaccha*, le Psamniti, il macigno, la Anagenite ec.

Le terre Argillose sono spesso colorate in giallastro od in rosso dall'ossido di ferro, e sono quelle ove predomina l'Allumina, dalla quale ritraggono la proprietà caratteristica di comparire al tatto sdrucciolevoli, e per così dire ontuose, come anche di tramandare un particolare odore allorchè vengono bagnate. Sono difficilissime ad imbeversi di acqua, altrettanto che a spogliarsene quando una volta ne sono sature; quindi ne dipende la loro grande importanza agraria, sia per mantenere l'umidità necessaria alle piante come per fornire i fonti ed i pozzi. Vanno soggette ad indurirsi in impasti tenaci e a crepolarsi quando sieno diseccate; onde è da queste ultime proprietà e dalle sopra accennate, che acquistano i nomi di terre *forti* e *fredde*. I depositi argillosi formansi principalmente nei luoghi ove le acque ristagnano, o dove corrono lentamente; imperocchè restando le argille assai ben sospese, sia per loro leggerezza come per la tenuità delle parti in che si suddividono sono sempre le ultime a depositarsi. Le roccie sedimentarie da cui più abbondantemente provengono sono in primo luogo i grandi depositi caratterizzati col nome di argille Subapennine, nei quali la roccia stessa non possedendo la consistenza lapidea, per poco che venga superficialmente rimossa e corretta può nel luogo stesso utilizzarsi come terreno agrario. Derivano pure da molti schisti argillosi, da ogni maniera di depositi marnosi, dalle argille a fucoidi e scagliose, come da ogni altro deposito di simil nome. Finalmente terre calcaree sono dette quelle, ove abbonda la calce carbonata, sia poi in impasto terroso con altri detriti di roccie, sia in forma di sabbie gialle e conchiglifere, sia anche in banchi bianchissimi di materia farinaccia assai fina, che si caratterizza col nome di *creta*. Sotto qualunque forma in che si rinvenghino, le terre calcaree si distinguono dalle altre per la loro tinta chiara, che si mantiene anche quando sono fortemente umetate, e per la particolarità di fare effervescenza con tutti gli acidi. Le proprietà di che godono di assorbire e di lasciare trascorrere le acque con facilità, costituendo

un suolo sciolto e permeabile, se rende esse pure alquanto *calde*, ma certamente poi superiori ad ogni altra terra vegetale nell'attitudine a consumare e dissipare prontamente i relitti di sostanze organiche; quindi è che possono venire considerate per terre le più attive della coltivazione. Formansi sovente depositi di esse in prossimità dei volcani estinti e nei paesi ove abbondano le scaturigini di acque termali, le quali assai spesso godono della proprietà di dissolvere, e seco loro trascinare le particelle di calce carbonata, estorte dai canali sotterranei che percorrono, le quali poi sono astrette a depositare allorchè esposte all'atmosfera, dette acque fumano per l'evaporazione e soffrono un notevole abbassamento di temperatura. Esempi chiarissimi di tale modo di formazione si hanno nei moderni travertini, e nei depositi che lasciano le acque provenienti dai terreni della creta bianca e da quelli detti a *calcinello*, cioè contenenti delle specie di nidiate della così detta *Farina minerale*. Le roccie di rimpasto, o sedimentarie a cui possonsi riportare in massima parte gli elementi atti a produrre le terre calcaree, sono, in primo luogo tutti i marmi propriamente detti, cioè i carbonati di calce a grana fine e lapidei: quindi le roccie da taglio come il calcare grossolano, il pissolitico, l'oolitico, lo schistoso, il carbonifero, la Panchina, qualche arenaria e sabbia calcare, la creta verde e la bianca, la quale non formando roccia lapidea può venire coltivata in posto.

Termino questi cenni sulle terre agrarie esponendo in riassunto due quadri, dei quali: il primo mostra alla maniera dei Geologi in quale ordine e proporzione figurino le sostanze minerali predominanti più d'ogni altra nella composizione della corteccia solida della terra che fornisce il vero terreno agrario: il secondo reca un esempio agronomico della composizione minerale di terre agrarie di cui vennero per lunga serie d'anni sperimentati i gradi relativi di fertilità; ed esso è *tolto* dall'opera di *Geologia* e *Chimica Agraria* di *G. F. Johnston*. Il primo quadro fu da me stesso raccolto dalle lezioni verbali date dal Sig. Constant Prevost nel 1846 alla Sorbona, ed è in fondo ba-

sato sulle dottrine segnalate del Sig. *De La Bèche* nelle *Researches in theoretical Geology*, quindi adottate ed approfondate dal Sig. *Elie De Beaumont* nel *Bulletin de la Société géologique de France* 1847. Devesi però quì rilevare come i Sigg. La Bèche e Beaumont classificando chimicamente i corpi semplici che più abbondano nella parte della corteccia terrestre che ci è accessibile includono anche gli amassi liquidi e gazosi, quindi dei 60 corpi semplici noti alla Chimica riconoscono essere 16 i predominanti; anzi rilevano come tutti 16 entrino anche generalmente nella composizione dei corpi organici, e come la natura proveda, che pel sostegno della vita, essi tutti trovinsi contenuti nelle attuali produzioni volcaniche, e delle acque minerali. Ma il Geologo che risguarda unicamente la *corteccia solida* della terra, e riconosce per elementi semplici i minerali classificati dalla mineralogia, può limitare, come noi facciamo nella 1.ª colonna, il numero degli elementi minerali predominanti a 10, e dirà per modo d'esempio che la Silice stimasi costituire almeno i 45 centesimi della corteccia minerale del globo, senza curarsi poi che la Silice stessa è composta; secondo Berzelius, da 48, 4 di metallo siliceo, e 51, 6 di gaz ossigene. Per altro esempio della 2.ª colonna, si esprime che il carbonato e solfato di calce (minerali composti dagli elementi Calce, Carbonio e Solfo) figurino per 10 centesimi nella massa solida della corteccia terrestre. — Da questo ravvicinamento della composizione minerale dei terreni col vario grado di loro fertilità emergono le conclusioni seguenti: = che le linee di separazione delle diverse culture corrispondono alle linee di separazione dei terreni: che la fertilità o sterilità del suolo possono dipendere dalla natura mineralogica delle roccie, ma non già dalla loro età geologica: che nella linea di giunzione di due roccie rispettivamente sterili possono prodursi dei mescugli minerali da costituire delle striscie di suolo eminentemente fertile: che non tutti i terreni addattati ad una specie vegetale si confanno a tutte le altre: che finalmente esiste un complesso di studii che può definirsi *botanica geologica*.

Minerali che predominano nella composizione della corteccia solida e terrestre.

ELEMENTI DEI MINERALI	MINERALI CHE NE RISULTANO	
Silice	Quarzo.....	60 per °/o
Allumina	Feldspato.....	
Potassa	Mica.....	10 per °/o
Soda	Talco.....	
Magnesia	Anfibolo.....	
	Pirosseno.....	
Calce	Calce carbon.ta	10 per °/o
Carbonio	» Solfata	
Solfo	Carbone.....	10 per °/o
Metalli { Ferro	Solfo.....	
Metalli { Manganese	Metalli.....	

Composizione di terre agrarie aventi diverso grado di fertilità.

	FERTILE con concime	FERTILE senza concime	STERILE
Silice (in arena o nell'argilla)...	648	833	778
Allumina (nell'argilla)..... ...	57	51	91
Calce (carbonata e solfata).....	59	18	4
Magnesia (in carbonato e solfato)	8½	8	1
Potassa.....	2	trac	cia
Soda.....	4	—	—
Acidi { Carbonico.....	40	4½	—
Acidi { Solforico.....	2	—3/4	—
Acidi altri diversi.....	6½	1 3/4	—
Ossidi { di ferro.....	61	30	81
Ossidi { di manganese.....	1	3	—½
Materie organiche.....	97	50	40
Perdita.....	14	—	4½
	1000	1000	1000

Delle pietre di costruzione

Le nozioni che riportiamo sulla natura e caratteri più rimarchevoli dei materiali atti alle costruzioni architettoniche saranno qui rilevati riferibilmente ai principii geologici che in tutto il corso delle presenti note tentiamo di connestare alla scienza degl'Ingegneri. E tanto più importa premettere queste avvertenze in quanto chè intendiamo coi presenti cenni di farci scala come già da prima promettemmo all' analisi sistematica dei terreni, secondo la divisione geologica da noi proposta ed adottata. Apprezzando quindi e rispettando grandemente dotti e voluminosi scritti che vertono estesamente sui materiali relativi all' arte di edificare, e sulla mineralogia applicata alle arti, non troviamo in essi che delle citazioni e descrizioni isolate di sostanze minerali, spesso locali e non mai considerate nel loro insieme di formazioni geologiche, non mai studiate per rapporto all' epoca e maniera di loro origine, non distinte per fisica produzione e struttura, ma solo analizzate chimicamente. Sembra mancare, diremo così, l'inquadratura sistematica dello studio Litologico, nei trattati ove leggonsi anche dottamente espresse le descrizioni, per esempio, dei basalti, dei porfidi, e dei graniti, poi dei marmi e delle pietre ordinarie dette da taglio ; come pure riesce insufficiente il prendere a trattare sconnessamente prima delle pietre calcaree, poi dei graniti , delle arenarie, delle pietre volcaniche, ec. Troviamo invece opportuno alla cultura scientifica dell'ingegnere una preventiva nozione teorica dei materiali da costruire, la quale sia basate sull'originaria produzione dei materiali stessi, ed abbia per fondamento di classificazione quei caratteri fisici che più d' ogni altro si rapportano all' arte di costruire. Così l' ideato ravvicinamento dello studio dell'Ingegnere alla geologia avrebbe effetto, perchè questa studiando l'origine e la classificazione dei materiali di cui è fabbricata la scorza terrestre, l'Ingegnere Architetto studia in essa l'origine e la classificazione dai materiali che gli servono a costruire edifizii. E come quella

scienza si rapporta al chimico, al fisico ed al mineralogista per indagare l' intima natura di questi materiali, così l' Ingegnere potrà rivolgersi ai sopra citati scritti scientifici allorquando solamente gli occorra di conoscere le specialità che si rapportano a tale o tale altro materiale. Anzi a questi voluminosi trattati dovrà egli interamente ricorrere quando a caso abbisognasse di notizie topografiche sulla ubicazione delle cave da pietre, o sulle citazioni di esemplari già eretti, sia ne'monumenti antichi come nei moderni; argomento che noi ci proponiamo di evitare interamente per non divergere troppo dal nostro assunto.

Dietro le viste geologiche potrà dunque l'Ingegnere architetto prendere a distinguere le pietre da costruzione a seconda della presente classificazione.

ROCCIE

I. Ignee.....	Cristalline antiche Lave Attuali
II. Sedimentarie.....	Brecie e Conglomerati Arenarie Marmi
III. Metamorfiche.....	Schistose Dolomitiche

I. Circa alle primarie tre distinzioni delle roccie fu già dato un cenno nella *IIª nota* allorquando occorse di esporre la classificazione sistematica dei terreni geologici che volevamo esaminare nel loro insieme di possenti depositi massivi e terrosi. Ma furono allora definiti genericamente i prodotti delle formazioni geologiche piuttosto che la causa e la maniera stessa di produzione. Piaceci, ora che trattiamo delle pietre o roccie consistenti, di far rimarcare come le Ignee provvengono da una reale fusione di sostanze minerali svariatissime, avvenuta o nella totalità della massa terrestre originariamente, o nelle profonde cavità rimaste in tempi assai posteriori fra strato e strato della cresta terrestre che veniva di continuo raffred-

dandosi. Nel primo caso trovasi spiegazione agl'imponenti massi delle roccie cristalline primitive che certi si è di riscontrare in ogni punto della periferia terrestre anche dove di per se stesse non sono a nudo purchè non si venga meno a perforare la crosta della terra indefinitamente ; e ciò è tanto vero che ritengono i geologi che esse di per se sole costituischino il nucleo del nostro pianeta, del quale tutte le altre roccie non sarebbero a loro confronto che tenui pellicole derivanti dalla loro denudazione. Nel secondo caso, di fusioni minerali operatesi in profonde cavità della crosta terrestre, si dà spiegazione della formazione postuma delle roccie di trabocco per iniezioni, e filoni, o delle volcaniche vomitate dai crateri in forma d'impasti scorrevoli, sia pure all'epoca attuale come in epoche geologiche assai anteriori.

Tanto le prime, che noi chiamiamo roccie cristalline originarie, quanto le seconde, che possono comprendersi col nome di lave volcaniche, constano nella loro struttura di un impasto di cristalli sodamente rattenuti dalla sostanza minerale che forma la base della roccia, e che ne è essa medesima parte cristallina, e non già cemento , come appositamente dimostreremo delle roccie sedimentarie. Riscontrasi pure il caso di roccie di fusione interamente costituite da una sola sostanza minerale, la quale in simile circostanza figura nell'insieme della sua massa come per così dire, una sola ed isolata cristallizzazione; tale è il caso del quarzo e del feldspato nativo di cui ogni ciottolo staccato può considerarsi come un frammento di cristallo ; così è dell' Ortose o l'Albite che sono frammenti di Feldspato. Non può dirsi altrettanto del Basalto e del Trapp, i quali quantunque affettino un'apparenza di roccie semplici sia per l'unitezza del loro fino impasto come per la regolarità di divisione prismatica che presentano, pure furono dai moderni riconosciute roccie composte.

Di tutte queste roccie d'origine ignea vengono accreditate particolarmente per uso delle fabbricazioni, e della decorazione i Graniti, le Sieniti, le Pegmatiti, il Porfido, la Trachite, il Melafiro, la Diorite, l'Affanite, il Basalto, e le varie lave che si di-

stinguono per tante denominazioni. Queste sono fra le roccie cristalline le più dure e le più pregievoli, sia per la difficoltà di lavorarle come per la durata del pulimento che in loro resiste alle più violenti influenze degl'Agenti atmosferici, sia in fine per le imponenti masse che d'un solo pezzo e di qualunque forma possono staccarsene. Per questo sono prescelte nella formazione delle colonne ed obelischi, come pure nei grandi *zoccoli* e piedestalli dei monumenti, ed insomma nelle decorazioni massive ove non hanno a praticarsi grandi rilievi od incisioni minute. Vengono pure utilizzate nella fabbricazione le Serpentine, il Gabbro, l'Amfibolite, il granitone, l'Oficalce ec., roccie pure cristalline, ma di durezza assai inferiore alle precedenti, quindi non suscettibili di una perfetta e durevole levigatezza. Di tali pietre veggonsi formati i muramenti dei ricchi edificii e qualche lavoro di scultura destinato a non rimanere interamente esposto all'esterno. La maggior parte delle fin qui citate roccie trovansi adoperate nei selciati, e particolarmente di Basalto il granito, e la trachite, ma tutte poi senza eccezione veggonsi messe in opera nei lastricati dei marciapiedi e nei luoghi coperti, come pure nei pianciti dei tempii e dei loggiati ove per la varietà delle loro tinte sono trascelte alla combinazione di disegni qualche volta ricchissimi, ed aggradevoli all'occhio quanto i mosaici. E su tale proposito giova qui rimarcare quanto sia interessante che il costruttore conosca il grado di durezza delle diverse roccie che si propone d'impiegare in detti pianciti, e nelle costruzioni tutte ove richiedendosi varietà di tinte richiedonsi anche roccie di diversa natura. Imperocchè è chiaro che esponendo alla medesima azione logorante, delle pietre di diversa durezza, in breve tempo le più friabili saranno consunte e scalzeranno le più dure, oltre a rendere ben tosto mostruosa ed ineguale la costruzione primitiva. Sembra quindi in simili casi doversi rinunziare piuttosto all'avvenenza della decorazione di quello che alle sane pratiche della stabilità.

Ma se a noi qui si chiedessero i cataloghi di dette pietre da costruzione, le scale numeriche delle rispettive durezze, e le ubicazioni rinomate di estrazione, noi crederessimo fuori di pro-

posito il ripetere gl'estesi insegnamenti del Rondelet di Pilla di Brard e distinti altri autori, i quali avendo forse trascurato di coonestare le loro dottrine colle viste puramente geologiche, rimangono però sempre classici per queste specialità. Aggiungeremo solamente riguardo alle roccie di produzione ignea, che queste sono compagne indivisibili dei filoni metallici, e che anzi è solo all'epoca della loro comparsa all'esterno, che si mostrano le vene e le incrostazioni dei varii metalli in natura. Diciamo le vene, e le incrostazioni dei metalli nativi per escludere gli ammassi ed i pezzetti di metallo che possonsi trovare anche dispersi nei terreni sedimentarii e che vengono per la diversa loro natura distinti coi nomi di pipiti, pisoliti, ed in generale metalli erratici. Questi non sono formati originariamente in seno alle roccie ed alle terre sedimentarie ma vi si trovano accidentalmente depositati come i ciottili, le arene ed i frammenti di roccie assai più antiche, le quali ebbero come i metalli e le cristallizzazioni di pietre preziose un origine di formazione ignea. Così, per farci intendere con un esempio, le sabbie aurifere del Ticino consolidandosi in processo di tempo ed assumendo per le leggi fisiche la natura di una roccia arenaria, presenteranno nelle future epoche geologiche il fenomeno di contenere delle pagliette, o forse anche (per le presunte leggi dell'affinità chimiche) delle pipiti e dei cristalli di oro nativo, ma certamente oggi dì non si forma l'oro a Pavia. È nel massivo del monte Rosa e di tante altre montagne circonvicine, costituite interamente delle roccie ignee Pegmatile, Granito ec. che esistono filoni di questo prezioso metallo, e colà estratti dalla mano dell'uomo nelle miniere di Pestarena, e del Turlo, e degli agenti atmosferici instancabilmente minati e tormentati, cedono ai venti ed al corso delle acque queste pagliette che poi si depositano allo sbocco del Ticino in sufficiente copia da promuovere l'industria degl'operai detti *cavalori*. — Di simile esempii potrebbersi citare in grande copia, ma quest'unico valga a farci scala alle osservazioni sulle roccie sedimentarie, che quì appresso esporremo. —

II. Se grandemente figura in geologia la maniera di roccie

dette di formazione ignea, non e certamente meno estesa l'altra delle roccie di sedimento. Anzi questa scorgesi riprodotta in ogni angolo della superficie terraquea ed in tutte le epoche della storia della terra, mentre la prima formazione compare assai più circoscritta, e riprodotta ad intervalli di tempo assai bene distinti. Il disgregarsi delle parti costituenti le roccie, anche le più compatte e tenaci, è opera di tutti i tempi e di tutte le regioni; come fu incessante ed universale il depositarsi ed il condensarsi di questi sciolti relitti terrosi.

Ora la varietà delle roccie tutte sedimentarie risiede in questo, che cert'une vennero costituite da grossi frammenti o giottoli di roccie che furono fra di loro cementati prima di avere subite tutte quelle modificazioni che li avrebbero inevitabilmente polverizzati, e perciò riescirono pudinghe conglomerati, o breccie. Altre formaronsi al momento che i relitti di roccia in decomposizione erano ridotti alla tenuità di granelli di arena, o cenere o sabbia, e riescirono roccie arenarie, o come dicono i francesi, *Grès*. Finalmente le minute particelle minerali capaci a rimanere sospese o solute nelle acque, costituirono all'epoca della loro deposizione finale le roccie a grana fine ossia marmi.

Riportandoci a quanto si disse circa l'atto materiale di formazione delle roccie sedimentari, allorchè si trattò delle terre agrarie da esse provenienti, aggiungeremo soltanto ch'è sempre in seno alle acque che si formano questi lapidei depositi, e particolarmente nei grandi bacini sia lacustri come marini. Dai resti fossili che sempre racchiudono, distinguonsi quindi le roccie di sedimento d'acqua dolce e d'acqua salsa; e come la somministrazione degli elementi destinati a formarle, veniva qualche volta interrotta, qualche altra volta variava la natura minerale degli elementi stessi, così ne riescivano le roccie sedimentarie partite in istrati ed incostanti di struttura e composizione. Sempre conservano però questo carattere di avere una sostanza minerale che cementa e collega fra di loro i frammenti delle roccie che contengono, e questo cemento è esso pure di provenienza sedimentaria. In fatto i grandi depositi delle arene marine e fluviatili, i banchi di belletta, gli ammassi di ghiaie ro-

tondate, le dighe delle morene a frammenti angolosi, non riescirono roccie compatte se non in seguito del perenne trapelare che fanno le acque, depositando le minute particelle minerali che tengono in soluzione o sospese. Queste minute particelle riempendo a poco a poco gl'interstizii ed i vani rimasti attorno ai frammenti primitivi, costituiscono alla lunga il vero cemento della roccia, il quale è in alcuni casi della medesima natura minerale dei frammenti, in altri casi di natura disparatissima, come alcune volte riesce più consistente dei frammenti stessi, altre volte meno. — Dal fin qui detto rilevasi di questa importanza sia all'ingegnere costruttore la conoscenza della struttura delle roccie sedimentarie, poichè anche fatta astrazione dalla loro natura minerale, le breccie e conglomerati sono sempre i meno omogenei, e d'impasto più grossolano, a meno che non si tratti di quelle breccie formate da frammenti della medesima natura mineralogica del cemento, quale sarebbe il *marmo breccia*, la *scrittura Arabica*, la *Pietra paesina* ec. Ma i veri conglomerati e pudinghe sono ordinariamente pietre grossolane, e perciò impiegate alla fabbricazione delle macine da molino, alla costruzione dl basamenti e di edifizii rustici, alla formazione delle scogliere e dighe dei porti di mare ec. Tale è il caso delle Anageniti, Prefiti, e Gonfoliti. Citansi però anche delle breccie, e conglomerati nobili, ossia suscettibili di un bel pulimento, e dotate della durezza e livigatezza delle pietre fine; questi sono la così detta *Breccia universale* formata da relitti di roccie ignee cristalline : i conglomerati graniti, e porfiritici, di cui il solo nome è sufficiente a darne idea · le breccie quarzose e silicee contenenti dei frammenti di diastro varicolare e della petroselce.

Le arenarie utilizzabili nella fabbricazione sono abbondantissime e spesso capaci di ottimi risultati ; esse distinguonsi nelle arti in seguito della natura dei loro elementi o del cemento che le costituisce, e molto più per il loro colore esterno. Ma trovandosi ordinariamente nelle escavazioni di questa roccia, tutti i gradi di passaggio fra lo strato di vera pietra da taglio e la sabbia o arena affatto sciolta, resta interamente

affidato dall' Ignegnere pratico la cura di prescegliere quella conveniente durezza di roccia che soddisfa alle varie circostanze. — Non basta l'avvertenza di scegliere, per modo d'esempio, il macigno apennino per la formazione dei gradini di una scala; conviene specificare quel macigno che presso gli artisti prende il nome di *pietra serena*. Le altre varietà dette *pietra forte*, *pietra morta*, gallestro ec. sono bensì utilizzabili, come nel pavimentare le strade, nella formazione dei piccoli o paracarri, degli abbeveratoi, dei muramenti ec., ma grossolani sarebbero per l'uso che prendemmo ad esempio. — Fra le arenarie meglio impiegate citasi la molassa, che è sovente di colore verdognolo e contiene delle pagliette di mica cementate da un glutine ora calcare ora argilloso. L'arenaria rossa, che per la vastità dei suoi depositi dà nome ad una serie di terreni geologici, al pari dell'arenaria screziata. L'arenaria lustrata singolarissima per la finezza di struttura e per la durezza che le proviene dal suo aumento siliceo: Le Psamniti o arenarie carbonifere, le quali accompagnano ordinariamente i depositi misti del terreno carbonifero, o antracitico. L'arenaria grossolana e la silicea di Parigi, l'una per la facilità del suo taglio che può farsi a sega, impiegata nella costruzione delle abitazioni, l'altra per la sua porosità o cavernosità, imgiegata nella costruzione dei grossi muramenti o baluardi. In fine i tufi volcanici, che veramente sono depositi di relitti scoriaci e granulari di diverse lave, impastate ed impietriti da un cemento argilloso e ferruginoso, e più di sovente calcareo; e questi tufi si distinguono particolarmente nelle arti per le varietà di peperino, di Piperno, di Tripulino, e di Trasso (*).

(*) Quantunque vincolati da una preventiva dichiarazione a non estenderci in citazioni di esempi locali dimostranti pratiche applicazioni, noi crederemmo mancare ad un brano di storia artistica patria passando sotto silenzio il bel lavoro architettonico ora compito nella facciata della Cattedrale d'Imola. — Questo sontuoso tempio eretto nel 1781 dietro disegno e direzione dell'illustre Cav. Morelli, imolese, venne decorato di facciata per munificenza del Fontefice PIO IX, che già

Cadrebbe qui in acconcio di trattare dei marmi, ed il costruttore giudicando della loro grande importanza artistica e dalle estese conoscenze che li risguardano, potrebbe forse attendersi ad una dettagliata esposizione delle medesime. Ma se egli riflette che i Litologi, e noi con loro, ascrivono questo nome di marmi alle sole roccie sedimentarie a grana fina e levigabili, che constano nella loro minerale composizione di un aggregato di particelle calcaree pure cementate da un carbonato di calce, troverà grandemente semplificata la loro storia geologica, e noi potremo a giusto titolo esonerare delle specialità artistiche descritte da tanti autori antichi e moderni, specialità che sortono dal rango delle *viste principali di Geologia atte a fissare l' attenzione degl' Ingegneri*. Le molte classi che

---

vi tenne la Sua Sedia Vescovile. — Il vivo del muramento, seguendo lo stile di tutto l'edifizio è eseguito in mattoni cotti, lavorati a cortina o come noi diciamo a superficie rasa, e cementati da un tenuissimo straterello di fiore di calce, la quale nel nostro paese si trae dai frammenti della roccia Apennina detta Alberese, frammenti che ci pervengono rotondati e sotto forma di ghiaja perchè trascinati nella nostra pianura dalle acque del Santerno e suoi confluenti. Gli aggetti tutti, ed i pezzi sculpiti che figurano in questa facciata sono eseguiti in roccia arenaria, o *grès* della località di Vergnana e del Vergato, ambedue poste nell'appennino bolognese. Queste arenarie si lavorano a punta di scalpello e non già a sega, perchè entrano nella classe delle pietre da taglio compatte e resistenti, quantunque non suscettibili della levigatezza dei marmi. La loro tessitura è uniforme, benchè un poco rilasciata : la grana è fine ed omogenea : nascondono superficialmente le falde di cava e sono piuttosto soggette al deterioramento di superficie che a quello di sfaldatura. Constano di un impasto di arene quarzose miste ad alcune altre calcaree e micacee, finamente cementate da calce carbonata e da pochissima argilla. Fra di loro si distinguono perchè quella di Vergnana è più calcarea dell'altra e contiene meno argilla, quindi è di tinta più chiara ed è meno dura : non rende fuoco all' acciajo, ne sembra potere essere della durata di quella del Vergato. Fossero pure ambedue inatte ad imbeversi d'acqua, che così i geli, gli agenti atmosferici, ed il fuoco non avrebbero alcuna presa sopra gli edifizii che se ne eriggono.

quindi si fanno nel commercio di marmi venati, omogenei, variotinti, conchigliferi, moderni ed antichi, marmi breccie e marmi pudinghe, ec. restano estranee al nostro soggetto dal momento che più non si rapportano a varietà di formazione nè di natura, ma unicamente ad accidentalità parziali che traggono origine, sovente dalle tinte occasionate nella roccia dai varii ossidi metalli e da bitumi; altra volta dall'intromissione di resti fossili che constano della medesima sostanza minerale del marmo: finalmente dalla presenza di frammenti o grossi noccioli di marmo che trovansi rimpastati in un deposito pure marmorico. Solamente ripeteremo di passaggio come questa specie di roccie, sia la vera riservata in ogni tempo storico e presso tutti i popoli all'arte nobile della scultura, escludendo bene l'abbusiva idea che altre pietre trattabili allo scalpello, come il porfido, il granito, il Diaspro, ec. sieno pure da chiamarsi litologicamente marmi. Ai sopra definiti carbonati calcarei levigabili null'altra pietra puossi aggiungere che meriti in alcuni casi il nome di marmo fuori dell'Oolite, della pietra litografica, dell'Alabastro e del Travertino. La prima per la sua grande abbondaza dà nome ad una serie di terreni geologici, ma non fornisce che materiali grossolani alle arti. La seconda come rilevasi dalla nomenclatura non può interessare che l'arte del disegno.

La terza è il risultato d'incrostazioni o deposizioni, calcaree formatesi nelle caverne o fenditure dei depositi pure calcarei in conseguenza delle lente e continue infiltrazioni delle acque. E mentre gli alabastri sono in processo di formazione costituiscono aderentemente alle pareti delle cavità quelle incrostazioni che prendono il nome di *stalatili* o *stalagmiti*, le quali alla lunga crescendo per i sempre nuovi intonacchi sfogliati di che periodicamente si ricoprono, alla perfine riempiono il vano che loro era accordato e danno all'alabastro che si sega in tavolati quelle venature ondulate e a chiaro scuro che formano il pregio di un tale marmo. Questi tavolati sono ordinariamente semi-trasparenti, venati o macchiati come si disse, e finalmente di una durezza superiore ad ogni altro marmo,

ed in special modo superiore alla durezza di certa altra pietra abusivamente chiamata Alabastro gessoso, la quale non è della natura dei marmi, non ha frattura cristallina come il vero Alabastro calcare, ma è sempre d' un bianco latte, si lascia incidere coll'unghia, ha frattura granulare, e viene denominata più volentieri Alabastrite. Di questa però come di quella roccia si ricavano materiali atti alla fabbricazione ed alla scultura, massimamente in lavori delicati e di lusso. — Hannovi in alcune località delle scaturigini di acque termali o gazose che compaiono esteriormente al contatto dell'atmosfera sopracariche di carbonato di calce sospeso o soluto: e queste acque lasciando precipitare prontamente la sostanza terrosa alla superficie del suolo e degli oggetti tutti che bagnano, pervengono a costituire in processo di tempo la roccia Travertino; la quale comunque ordinariamente grossolana o cavernosa, pure riscontrasi in alcuni casi suscetibile di un perfetto pulimento. Quindi è che avuto riflesso a questa suscetibilità ed alla natura sua minerale, può giustamente chiamarsi un marmo, e per rapporto all'arte di fabbricare merita un riguardo speciale quand'anche si faccia astrazione dai prodotti di curiosità che ne derivano. Come meglio potrebbersi vantare le interessanti proprietà architettoniche del travertino, e quali osservazioni aggiungere sul suo conto, allorchè si riflette che di tale marmo furono fabbricati il colosseo, la Basilica di s. Pietro, e quasi tutta l'eterna Roma ?! —

III. La comparsa istantanea o lenta delle roccie ignee alla superficie della crosta terrestre è un'avvenimento troppo grave e violento per supporre che si compia senza conseguenze rimarchevoli nella storia fisica e minerale del suolo. Le imponenti masse di materia, capaci a sollevarsi dal fondo di un mare e fracassando quanto v'ha di depositi stratificati sopra di loro dare origine a vaste isole e continenti: le straordinarie elevatissime temperature accorrenti alla fusione ignea di queste masse: gli sviluppi incalcolabili dei gaz è le tenzioni delle forze messe in giuoco, sono cause tutte seguite da fatti geologici rimarchevolissimi. La geologia studia in essi l'origine e

la maniera di formazione delle roccie metamorfiche, le quali concisamente possono definirsi, depositi originariamente sedimentarii, e poscia modificati da una succedanea azione ignea. In ogni epoca geologica ed in qualunque regione avvennero trabocchi di roccie ignee, l'osservatore riscontra costantemente una serie di strati sedimentarii metamorfizzati in diverso grado e maniera, a seconda che sono più o meno distanti dal deposito cristallino che comparve incandescente, ed a feconda della rispettiva natura minerale tanto degli strati quanto della roccia di trabocco. Qualche volta però occorre di rinvenire estesissime roccie sedimentarie palesemente modificate nella loro composizione o struttura da un'azione ignea, senza che nel soprasuolo appaia la menoma traccia di roccia metamorfizzante. Questa eccezione non disturba menomamente la regola generale, sapendosi dal geologo che quand'anche la roccia ignea non compaia in un sollevamento, non è per questo meno efficace l'influenza dei gaz del calorico e delle pressioni che essa sviluppa e concentra sulla stratigrafia del suolo che gli si oppone. Anzi questa eccezione di metamorfismo operatosi a distanza e per influenza di emanazioni in una roccia sedimentaria, dà argomento alla classificazione delle roccie metamorfiche in *Schistose* e *Dolomitiche*. — Le prime accompagnano costantemente, anzi stanno a contatto delle roccie ignee, ed hanno per carattere esenziale una struttura fogliata, e fina, una durezza sempre superiore a quella degli Schisti sedimentarii non metamorfizzati, finalmente racchiudono qualche volta dei fossili o delle impronte di resti organici. Comunque dissidenti fra loro i Litologi, sulla realtà ed estensione del metamorfismo in alcuni schisti, citeremo fra i principali utilizzabili nell'arte di edificare il Gneiss, la Quarzite, ed i micaschisti, che furono originariamente psamniti o arenarie quarzose e micacee, le quali poscia dal calore, dai gaz, da forti pressioni e da azioni chimiche, assunsero quella durezza e tutte quelle altre proprietà che le rende atti al pari del granito e del macigno a pavimentare, e formare muramenti, pioli, gradini, basamenti, parapetti e recipienti ec. Vengono quindi le filandi o ardesie,

chiamate appo noi dal paese Ligure di loro principale derivazione *Lavagne;* e questi sono i pregevoli schisti che forniscono i tavolati atti alla ricopritura degl'edificii, alla formazione di muramenti e di pianciti rustici, non che le tavole da disegno, e qualche volta anche la pietra stessa da disegnare; nei quali casi ricevono il nome distintivo di grafoliti. — Nei primi uffizii esse sono messe in opera in tavolette, tali quali si estraggono dalle cave senza previo pulimento; per uso di pietra grafica vengono tirate con pomice ad acqua e ad olio, ad una quasi perfetta levigatezza. In questo stato le lavagne servono anche ai lavoratori di pietre dure, i quali praticano di unire con apposto mastice alle lastre o tavolette, per esempio di Lapis Lazoli, di agata, di diastro, ec., una simile lamina di Lavagna, sulla quale tracciano col lapis i contorni dell' intaglio che vogliono praticare nella pietra dura, e quindi colla sega a smeriglio effettuano l'intaglio contemporaneamente della pietra dura e della lavagna. — Mi è pure occorso di vedere in questi ultimi mesi un magnifico magazzeno di deposito d'olii aperto modernamente dal governo a Livorno, nel quale magazzeno sono costrutti a muramento tante cisterne, o recipienti cubici della capacità di 50, a 100 barili d' olio; e questi recipienti sono formati da cinque tavole ben riquadrate di lavagna, cui una sesta forma copertura, affine di costodire l'olio che vi si deposita. Il piancito ed i laterali dei corridori ove sono fabbricati tali recipienti, sono pure ricoperti di lavagna, pietra che godendo della proprietà di non imbeversi di olio, è la meglio adatta a mantenere nitido il locale, oltre a permettere che venga raccolto tutto quello che si spargesse. Però stante la levigatezza della lavagna sempre aumentata dall'ontume che si produce, è introdotta la pratica di spargere nel pavimento un leggero strato di polvere di calce, la quale impedisce agl' operai di scivolare. — Molti altri sono gli usi cui è destinata questa pietra (perfino alla fabbricazione di pozzolane artificiali) oltre a quelli or'ora citati anche in maniera più estesa del nostro proposto; ma ci sembrò che l'applicazione a recipienti da olio meritasse una particolare menzione. Aggiungeremo pure

che questi tavolati di Ardesie, come degl'altri schisti, qualche volta si estraggono dal suolo già formati e divisi dalla natura, ed in molti altri casi si estraggono dalle cave in blocchi presso a poco cubici, dai quali in appositi stabilimenti si ricavano le tavolette o lamine a mano d'operai, prima che detti blocchi si sieno disseccati, o abbiano perduta, come si dice, l' acqua di miniera. Con queste lamine, e particolarmente colle meno riquadrate, gli alpigiani formano la ricopritura degli edificii, dando loro una grandissima inclinazione (45 gradi) affinchè le nevi non si sormontino, e praticando così ciò che dicono gli operai *coprire a metà*.

La natura minerale delle migliori Ardesie è quella di schisti argillosi o micacei o talcosi o bituminosi, sempre inalterabili dagl'acidi, sonovi, di un tatto dolce ed ontuoso, di grana fina e spesso framista di punti allungati scintillanti al sole, e tutti disposti nel medesimo senso della fibbrosità dello schisto. Il loro colore è vario, ma sempre uniforme in ogni tavolato preso separatamente, e la tinta che meglio prevale è il turchiniccio o il grigio specifico di Lavagna. — I Geologi chiamarono dolomizzazione una certa metamorfosi che si opera nella natura, e nella disposizione degl'elementi di alcune roccie, dietro l'azione diretta del calorico, o dietro l' azione di gaz e di altri agenti sviluppati in forza di azioni ignee. Un tipo esemplare della dolomizzazione è il cambiamento operatosi nella roccia calcarea volgarmente detta marmo statuario, la quale divenne per metamorfismo semitrasparente, di struttura interna lamellare e saccaroide, contenente alcune volte dei minerali cristallizzati ec. : e simili calcari d' altronde perdettero le traccie di depositi statificati, perdettero ogni relitto dimpronta o di corpo fossile, perdettero insomma il carattere dei sedimenti acquei, e vennerò allora distinti fra le roccie col nome di dolomie o dolomiti. Questo fatto geologico poi non è senza esempio nella pratica della scienza e delle arti umane, poichè il fenomeno della dolomizzazione si opera sotto i nostri occhi in prossimità dei vulcani, e nei laboratorii col fuoco a calore di porcellana si può convertire perfettamente il carbonato di

in polvere, o la creta bianca, in una vera roccia calcarea granolosa, o marmo saccaroide. Nella nostra analisi e classificazione delle pietre atte a costruire, crediamo di potere accettare il vocabolo dolomizzazione in significato più amplo, ascrivendo alla categoria delle roccie dolomitiche tutte quelle che, come dicemmo poc' anzi, trovansi metamorfizzate per azione ignea senza però assumere i caratteri di schisti, e senza che in loro prossimità si rinvenghino le traccie di roccia di trabocco metamorfizzante. Così oltre il calcare statuario saccaroide, il cipollino, e la dolomia, noi citiamo fra le roccie dolomitiche il calcare cloritoso, la Vacka, la Porcellanite, e finalmente il gesso. Queste ultime pietre, tranne il gesso, sono di poca utilizzazione nell'arte di edificare, ma a tutti è nota l'importanza del Saccaroide e Cipollino sia per la specialità della scoltura statuaria come pure per la più fina e sontuosa decorazione. In quanto al gesso, comunque tra gli autori sussistino delle discordanze circa l'origine sua e le distinzioni da farsene, noi ci atteniamo a riguardarlo come un sedimento originariamente calcareo, metamorfizzato quindi in forza di emanazioni gazose di solfo, che sorgendo dalle profondità terrestri lo attaccarono sotto circostanze particolari di temperatura, d' elettricismo e di pressione, e lo ridussero, o nella giacitura primitiva stratificata o sotto forma di grossi arnioni rinchiusi fra altre roccie sedimentarie, a quello stato di solfato di calce cristallino che ci serve nell'arti (*). Crediamo poi di dovere qui citare tale roccia, non solo per la nota ed estesissima applicazione che se ne fa a produrne uno dei migliori cementi da murature, ma ben anche pel buon profitto che può ritrarsene come pietra da taglio. Il gesso in fatto; quando è anidro (ossia della varietà chiamata kerstanite) e venga tagliato

(*) Non possiamo omettere di richiamare su tale oggetto un dotto scritto inserito dal Cav. Prof. A Sismonda nell'antologia Italiana (Torino. Giugno 1847) tanto più che l'illustre geologo piemontese si compiace di citare in detto scritto una nostra particolare opinione circa l'età geologica dei Gessi del Piemonte.

da strati minutamente cristallizzati ed a pasta fine, sostituisce benissimo in molti paesi il vero marmo da decorazione; talchè si possono vedere (come è il caso delle provincie nostre) le balavustre degli scaloni e delle chiese scolpite in questa pietra, non che altari, tavole e monumenti varii. Solo che fa duopo non esporlo all' azione violenta delle intemperie e del calore, come pure malamente resiste agli atriti forti, se venga impiegato nei selciati o gradini di scale. —

Imola, 19 Febbraio 1850.

SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI.

NOTA

DI P. TARDY.

Nell'ultimo numero del « *Dublin and Cambridge Mathematical Iournal* » il Sig. Malmsten professore nell' Università di Upsala ha enunciato il seguente teorema.

« Sieno $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ $n-1$ integrali particolari della equazione

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + Ty = 0 \;;$$

» quella equazione sarà anche soddisfatta da

$$y_n = y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_{n-1} z_{n-1} \,,$$

» ove si ha in generale

$$z_r = (-1)^{n-1} \int \frac{dR}{dy_r^{(n-2)}} \,.\, e^{-\int P dx} dx$$

» ed

$$\frac{1}{R} = \sum \left\{ \pm y_1 \cdot y'_2 \cdot y''_3 \ldots . y_{n-1}^{(n-2)} \right\} ,$$

» indicando con $y_r^{(n)}$ la derivata $(n)^{esima}$ d'y_r .

La dimostrazione che ora soggiungiamo poggia sopra un bellissimo teorema del sig. Libri. Cominciamo dal cercare l'equazione dell'ordine $n-1$ cui appartengono gli $n-1$ integrali particolari dati. Sia questa

$$(2) \qquad \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + B_1 \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \ldots + B_{n-1}\, z = 0.$$

Per determinare i coefficienti B_1 , B_2 , B_{n-1} abbiamo le $n-1$ seguenti equazioni

$$y_1^{(n-1)} + B_1\, y_1^{(n-2)} + \ldots . + B_{n-1}\, y_1 = 0 ,$$

$$y_2^{(n-1)} + B_1\, y_2^{(n-2)} + \ldots . + B_{n-1}\, y_2 = 0 ,$$

. . . . . .

$$y_{n-1}^{(n-1)} + B_1\, y_{n-1}^{(n-2)} + \ldots . + B_{n-1}\, y_{n-1} = 0 .$$

Il denominatore comune di queste incognite, cioè il *determinante* si può rappresentare dietro la notazione comunemente adottata con

$$D = \sum \left\{ \pm y_1 . y'_2 . y''_3 \ldots . y_{n-1}^{(n-2)} \right\},$$

ed il valore di B_1, che solo c'importa conoscere, è dato della formola

$$B_1 = \frac{\sum \left\{ \pm y_1\, y'_2 \ldots y_{n-2}^{(n-3)} \left(- y_{n-1}^{(n-1)} \right) \right\}}{\sum \left\{ \pm y_1\, y'_2 \ldots y_{n-2}^{(n-3)}\, y_{n-1}^{(n-2)} \right\}} ;$$

ed è facile convincersi che il numeratore è la derivata del denominatore presa con segno contrario; avremo perciò

$$B_1 = -\frac{D'}{D}$$

Ora le due equazioni (1) e (2) dovendo coesistere, mercè il teorema di Libri l'integrazione della proposta è ridotta a quella delle due

$$\frac{du}{dx} + \left(P + \frac{D'}{D}\right)u = 0 \ ,$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + B_1 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + B_{n-1}\, y = u \, .$$

La prima somministra

$$u = \frac{C_n}{D}\, e^{-\int P dx} \, ,$$

Per integrare la seconda osserviamo che essendo noti tutti gl' integrali particolari quando il secondo membro di essa è nullo, possiamo esprimere il valore generale di y, con

$$y = y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_{n-1} z_{n-1} \, ,$$

ove z_1, z_2, ... z_{n-1} sono funzioni che si determineranno dietro il noto principio della variazione delle costanti arbitrarie. Si ha

$$z_1 = \int v_1\, u dx + C_1 \ldots \quad z_r = \int v_r\, u dx + C_r \, , \ldots$$

$$z_{n-1} = \int v_{n-1}\, u dx + C_{n-1}$$

ed i valori di v_1, v_2, ... v_r ... v_{n-1} sono forniti dalla risoluzione delle

$$y_1^{(n-2)} v_1 + y_2^{(n-2)} v_2 + \ldots + y_r^{(n-2)} v_r + \ldots + y_{n-1}^{(n-2)} v_{n-1} = 1,$$

$$y_1^{(n-3)} v_1 + y_2^{(n-3)} v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_{n-1}^{(n-3)} v_{n-1} = 0,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_{n-1} v_{n-1} = 0 .$$

Il valore generico di v_r può mettersi sotto la forma

$$v_r = \frac{\sum\left\{\pm y_1 y'_2 \cdots y_{r-1}^{(r-2)} y_{n-1}^{(r-1)} y_{r+1}^{(r)} \cdots y_{(n-2)}^{(n-3)}\right\}}{\sum\left\{\pm y_1 y'_2 \cdots y_{r-1}^{(r-2)} y_{n-1}^{(r-1)} y_{r+1}^{(r)} \cdots y_{n-2}^{(n-3)} y_r^{(n-2)}\right\}},$$

ove si vede che il numeratore è la derivata del denominatore rispetto ad $y_r^{(n-2)}$; e però sarà

$$v_r = \frac{1}{D} \frac{dD}{dy_r^{(n-2)}},$$

quindi

$$z_r = C_n \int \frac{1}{D^2} \frac{dD}{dy_r^{(n-2)}} e^{-\int P dx} + C_r ,$$

e poichè

$$D = \frac{1}{R}, \qquad \frac{dD}{dy_r^{(n-1)}} = -D^2 \frac{dR}{dy_r^{(n-2)}}$$

ne segue, cangiando il segno di C_n,

$$z_r = C_n \int \frac{dR}{dy_r^{(n-2)}} e^{-\int P dx} + C_r ,$$

lo che dà il teorema di Malmstèn.

Firenze 8 Marzo 1850.

RETTIFICAZIONE DI UN ABBAGLIO PRESO NELL'ARTICOLO SULLE OCCULTAZIONI DI ALDEBARAN

DI GIUSEPPE BIANCHI

Letta all'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei
nella seduta del 10 Marzo 1850.

Io incorsi poc'anzi in un abbaglio, e di buon animo lo confesso, allorchè dal confronto dei tempi ottenuti in Padova e in Modena per una congiunzion vera di α Toro colla luna (Annali, T. I, pag. 44) dedussi e affermai che la differenza loro, e val a dire la differenza de' meridiani o di longitudine terrestre dei due luoghi di osservazioni, trovandosi espressa in quantità di tempo medio doveva convertirsi nella corrispondente di tempo sidereo, e perciò da $3'.45'',00$ ridursi a $3'.45'',65$ che più esattamente sarebbe $3'.45'',62$. Quest' asserzione, che è fallace, mi venne suggerita dal giudizio irreflessivo e precipitato delle prime apparenze per essere li due termini di confronto denominati dal tempio medio, senza considerare che, riferendosi essi all' indicazione di un solo e medesimo istante fisico, quello della congiunzion vera della stella colla luna, la differenza loro, unicamente dovuta alla diversa origine del tempo di qualunque specie dall'uno all'altro luogo di osservazione, deve perciò avere un valore assoluto e costante, indipendente cioè dalla specie di tempo equabile adoperato, e applicabile perciò ancora invariabilmente ad ogni specie particolare di tempo. E che le cose debbano intendersi e praticarsi in quest'ultimo senso, il calcolo ce ne porge una conferma di fatto,

Riduciamo i due tempi medii

$$7^h.20'.56'',70 \quad e \quad 7^h.17'.11'',70$$

dalla congiunzione, osservata rispettivamente in Padova e in Modena, ad espressione di tempi siderei, e troveremo facilmente che questi ultimi sono per Padova $0^h.35'.25'',56$, e per Modena $0^h.31'.40'',56$, colla stessa differenza dei primi dall'uno all'altro di $3'.45'',00$.

Ma per vedere anche meglio e in generale come il calcolo somministra per la differenza suddetta un valor costante e indipendente dalla specie del tempo equabile, qual dev' essere appunto la differenza de'meridiani. Sia m il tempo medio della congiunzione dei due astri osservato dal luogo più orientale, r la riduzione delle quantità m a tempo sidereo, t il tempo sidereo all'istante del mezzodì medio nel detto luogo, ed s il tempo sidereo corrispondente ad m; e siano per l' altro luogo e più occidentale di osservazione le analoghe quantità indicate con m', r', t', s'.

Avremo .... $s = t + m + r$, $s' = t' + m' + r'$; $t = t' + r' - r$.

Dunque ancora $s = t' + r' - r + m + r = t' + r' + m$,

e quindi . . . . . $s - s' = m - m'$,

cioè la differenza dei due tempi medii eguale a quella dei tempi siderei corrispondenti. E di quì ricavasi che la differenza dei meridiani o di longitudine, ridotta dall' arco di equatore in tempo nel rapporto di 15° per 1^h, dev'essere applicata, senz' alcun cambiamento di valore o di quantità, al tempo di qualunque specie che contasi in uno de'luoghi terrestri, per averne il tempo della stessa specie che contasi all'istante medesimo nell'altro luogo.

In applicazioni di questa fatta egli è assai facile, se ben non si avverte, di prender equivoco, ed io quasi mi compiaccio di averlo preso per trarne motivo di chiarirne il vero ed evitarne il pericolo dell'errore. Però non essendomi accorto da me stesso della mia fallace asserzione, vuole giustizia e gratitudine che io dichiari avermene avvertito la gentile amicizia del ch. Astronomo di Milano, il Sig. Cav. Carlini all' occhio del quale, perspicace e più linceo del mio, nel trascorrere su quel mio articolo non isfuggì tosto l' erroneo giudizio da me pronunziato. Nel mentre io gliene attesto pubblicamente la mia sincera e più sentita riconoscenza, egli mi permetterà che, a vieppiù rischiarar l'argomento, io quì riporti il brano della sua lettera che vi si riferisce.

» Le osservazioni (così egli mi scriveva in data 20 Febbraio anno corrente) pubblicate subito, e coi necessarii schia-

rimenti danno luogo ad utili considerazioni. Il vostro ultimo articolo mi dà occasione di presentarvene una che mi sembra importante, poichè non riguarda un errore di cifre, ma un punto di massima. »

« Voi dite, pag. 44, che la differenza di longitudine fra Padova e Modena è di 3′. 45″, 00, e diviene di 3′. 45″, 65 espressa in tempo siderale; io invece sono di parere che la differenza in tempo siderale è precisamente di 3′. 45, 00. Dico in generale che, se H è il tempo medio che si conta a Modena in un dato istante fisico, H′ il tempo medio che si conta a Padova nel medesimo istante, essendo $H' = H + D$; chiamando h ed h' i corrispondenti tempi siderei, si avrebbe matematicamente $h' = h + D$. Voi mi accorderete che la differenza dei meridiani in arco $= \partial$, essendo l'angolo che i due meridiani formano al polo, è quantità indipendente dal sistema orario che si adotta. Ora, quando volete ridurre ∂ in tempo medio, dovete fare la proporzione: se il sole medio a partire dal meridiano di Padova, ed a tornare al medesimo meridiano, ossia a percorrere 360°, impiega 24 ore medie, a percorrere l'arco ∂ impiegherà $\frac{\partial . 24}{360} = \frac{\partial}{15}$ ore medie. Parimente, se volete ridurre ∂ in tempo sidereo, farete la proporzione: se l'equinozio, a partire dal meridiano di Padova ed a tornare allo stesso meridiano, ossia a descrivere 360°, impiega 24 ore sidoree, a passare dal meridiano di Padova a quello di Modena impiegherà $\frac{\partial . 24}{360} = \frac{\partial}{15}$ ore sideree. »

» Se questo raziocinio non finisce di persuadervi, provate a ridurre il tempo medio di Modena $7^h . 17' . 11'', 7$ ed il tempo medio di Padova $7^h . 20' . 56'', 7$ in tempo sidereo, facendo uso d'una effemeride qualunque, per es. della *Connaissance des temps*, e vedrete che vi risulteranno due tempi siderei che differiranno precisamente di 3′. 45″, 00; giacchè sì all' uno che all'altro avete applicata la riduzione temp. sid. — temp. medio, calcolata per uno stesso istante fisico. »

Del rimanente l'origine e la spiegazione dell' abbaglio sta

nell'aver io considerati i due valori

$$7^h.\,20'.\,56'',7 \quad e \quad 7^h.\,17'.\,14'',7$$

come semplici e assolute quantità di tempo medio, la cui differenza immediata risponderebbe di certo a $3'.\,45'',62$ di tempo sidereo; e ciò avrebbe luogo nel caso che tali valori significassero due tempi medii contati sotto lo stesso meridiano, ossia col principio comune del tempo, e quindi indicassero due istanti successivi e diversi. Ma invece rappresentando essi un istante medesimo, e distinguendosi nel principio di numerazione o del tempo dall'uno dei meridiani all'altro, la differenza loro ne diviene una quantità generica e indipendente da ogni specie particolare di tempo, come si è veduto.

Attesa poi la piccola quantità dell' errore qui rilevato e corretto, le altre considerazioni e conclusioni del citato mio articolo ne restano inalterate. Valga però la presente appendice a mostrare come la buona critica, dichiarata ed accolta nei debiti modi torni utilissima a raggiungere o ad appurare la verità, onorandone per questa del pari chi ne riman superiore e chi ne è vinto.

Modena, 28 Febbrajo 1850.

LETTERA DEL SIG.

WILLIAM ROBERTS

di Dublino

AL COMPILATORE

Mon Cher Monsieur Tortolini.

La formule de M. Bordoni pour la quadrature des surfaces paralleles (*), que vous avez citée, peut se deduire très-simplement d'une expression donnée par M. Gauss, la quelle conduit immediatement, comme je l' ai remarqué dans le journal

(*) Questa citazione si riferisce alla mia Memoria, che trovasi in questi Annali al fasc. di Gennajo. B. T.

de M. Liouville à la formule rationelle pour la surface ellipsoidale qu'on doit à M. Jacobi.

En effet, il est evident, par des considerations geometriques, que les plans tangents aux points correspondans de la surface donnée et de la surface parallele sont paralleles entre eux : d'ou il s'ensuit, que si l'on designe par ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure à un point quelconque de la surface donnée, les rayons correspondans de l'autre surface seront $\rho_1 \pm k$, $\rho_2 \pm k$.

Soient aussi θ, et φ les angles que determinent la position d'une normale à l'une ou à l'autre des deux surfaces, et l'on aura, en vertu de la formule de M. Gauss pour l'aire (S_1) de la surface parallele l'equation suivante.

$$S_1 = \int\int(\rho_1 \pm k)(\rho_2 \pm k)\sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

ce qui est egal à

$$\int\int\rho_1\rho_2\sin\theta \, d\theta \, d\varphi \pm k\int\int(\rho_1+\rho_2)\sin\theta \, d\theta \, d\varphi + k^2\int\int\sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Pour faire voir l' identité de cette formule avec celle de M. Bordoni il suffira de nous rappeller que le premier terme est l'aire de la surface donnée, d'après M. Gauss, et que la troisième en donne la courbure entiere, et qu'on a de plus

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{[(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r]\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{rt - s^2}$$

$$\sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} dx \, dy$$

On doit remarquer, je pense que cette expression nous fournit une representation geometrique pour una surface quelconque de l'integrale double

$$\int\int(\rho_1 + \rho_2)\sin\theta \, d\theta \, d\varphi .$$

Veuillez agreer mon cher Monsieur les assurances les plus sinceres de mon estime

Dublin, le 15 Fevrier 1850.

William Roberts.

SUI TERREMOTI
MEMORIA

DI FRANCESCO PISTOLESI
di Pisa.

Negare che le elaborazioni vulcaniche siano occasione di terremoti, sarebbe un opporsi all'evidenza, perchè i paesi vicini ai vulcani o ove questi risiedono, sono esposti a frequenti tremoti, i quali precedono le eruzioni, e bene spesso le accompagnano e le seguitano.

Ma le scosse dei tremoti sono elleno l'effetto dell'urto meccanico delle materie che l'operazione vulcanica sviluppa? Ovvero l'operazione vulcanica risveglia essa quella forza che produce i tremoti?

È la presente memoria destinata a replicare alle suddette domande.

I terremoti hanno per precipua caratteristica il movimento di ondulazione, il quale patentemente indica il contrasto vicendevole e ripetuto fra una forza che urta nel senso superficiale o orizzontale, e la resistenza che fa la massa urtata per tornare al sito da cui é slogata. Se in questo contrasto ravvisiamo talvolta dei movimenti o succussorj, o vibratorj o giratorj, questi movimenti eccezionali dipendono dalle circostanze speciali in cui si trovano le masse urtate, le quali deviano dal movimento ondulatorio, quando la forza urtante non riesce a far vincere dalla massa urtata la resistenza che incontra, per cui la massa urtata trovasi costretta a variar direzione.

I tremoti generali non potrebbero derivare dall' urto meccanico delle materie eruttive prodotte dai vulcani:

1.° Perchè é incompatibile che un urto meccanico ed istantaneo possa produrre l' andare e venire oscillatorio nel senso orizzontale delle scosse dei tremoti, sopra una massa resistente,

poco o niente dotata di elasticità. E molto meno potrebbe concepirsi come un urto solo vaglia a produrre quell'azione che si manifesta istantaneamente in paesi i più lontani, come accadde nel famoso tremoto di Lisbona, risentito in quasi tutte le parti del mondo.

2.° Perchè l'oscillazione, sovente pertinace e terribile, non può derivare se non da una forza viva, permanente, che spinge la resistenza parimente permanente del corpo urtato.

3.° Perchè l'azione della forza viva di cui si tratta si manifesta nel senso di superficie, se essa operasse per urti prodotti nelle parti inferiori della terra, questa nei grandissimi terremoti soffrirebbe dei soqquadri tali di cui non si hanno gli esempi.

4.° Perchè se un urto vulcanico fosse la causa dei terremoti, i terremoti grandi e generali sarebbero sempre seguitati da eruzioni più o meno grandi. I più dei gran terremoti universali non furono succeduti da eruzioni; anzi si hanno esempi di terremoti grandi e generali risentiti anche nelle vicinanze dei vulcani, senza che questi abbiano dato alcun segno. Citerò l'orrendo terremoto di Riobamba del 4 febbraio 1797, all'occasione del quale i vicini vulcani non fecero movimento, e solo si formarono dei piccoli coni di moia (*).

(*) Amiamo pure di riportare un'osservazione del Sig. Mercier sull' indipendenza dei terremoti dai vulcani. Egli, dopo di aver descritta l' eruzione fangosa accaduta li 3 dicembre 1836 nel vulcano della Guadalupa, aggiunge : « I tremoti erano pur divenuti più frequenti; e questa osservazione era stata già fatta. Ma una circostanza che deve esser » notata, e che impedisce di rapportare alla montagna (vulcanica) il fo» colare delle forze messe in giuoco in questo scuotimento, si è che » i movimenti di traslazione conservavano la medesima direzione in » tutte le parti dell'isola ove facevansi sentire. È di tutta evidenza che » col far dipendere questo scuotimento dalla montagna come focolare, » si avrebbero avute al contrario altrettante direzioni quanti possono » concepirsi raggi menati da questo centro ai diversi punti della cir» conferenza dell'isola, lo che certissimamente non ha avuto luogo. » (Comptes Rendus, tom. 4, p. 294). Un'altra prova dell' indipendenza

5.° Perchè i terremoti generali, mentre sogliono ripetutamente percuotere più che altro certe regioni, in queste mai si svilupparono i fenomeni del vulcanismo in grande.

6.° Perchè l'urto meccanico, di cui è fatta parola, non si intende capace a produrre quel movimento singolare che l'acqua del mare prende nel terremoto, e che chiamiamo maremoto. Lo che viene nel senso inverso anche dalla sperienza confermato, non essendosi mai riscontrato il maremoto all' occasione di eruzioni vulcaniche sottomarine; è in tal caso molto diversa dal maremoto l'agitazione provata dalle acque che bagnano la località in eruzione, o che sono nelle di lei vicinanze (*). E l'accadere talvolta, e talvolta il non accadere il maremoto nel luogo stesso in cui si fa il tremoto, conferma che il maremoto non deriva da urti meccanici; se questi fossero la cagione costante del terremoto, costante pure ne farebbe il fenomeno del maremoto.

7.° Perchè la specie di urto che in occasione del terremoto ricevono i bastimenti in mare (si verifichi o non si verifichi il maremoto) è di una natura sua propria, differentissima da quella prodotta dagli urti burrascosi; è un urto da tutti descritto *secco*, come di tocco sopra uno scoglio. Ora l' urto di che si tratta non si potrebbe da un galleggiante ricevere mediante una scossa meccanica risentita dal fondo del mare. Nel famoso tremoto di Pisco del 10 febbraio 1716 il mare rimase

---

dei terremoti dal vulcanismo in quell'isola, io la trarrò dal gran tremuoto soffertovi li 3 febbraio 1843. Se esso fosse dipeso dall'azione del vulcano, questo contemporaneamente o poco dopo avrebbe fatta una grande eruzione, mentre a piccoli fenomeni vulcanici quà e là nell'isola il tutto si sostanziò; e questi fenomeni vulcanici hanno da tenersi per eccitati dall'azione del terremoto anzi chè per eccitatori di questo.

(*) La nascita dell'isola Iulia fu preceduta da molte scosse dal 24 giugno all'11 luglio, risentite anche in mare, senza che mai avvenisse il maremoto; eppure sotto le acque avevano luogo gli urti della materia vulcanica.

tranquillo; ma i vascelli che erano all'ancora furono violentemente agitati. Il vascello francese la *Ricerca*, in rada alla Martinicca, nel terribile tremoto degli 11 gennaio 1839 fu scosso in tutte le sue parti, e gli alberi di parrocchetto agitavansi *come dei Bambous* (Comptes rendus, tom. 8, p. 364) (*). Riceve dunque l'acqua del mare una modificazione particolare. È questa modificazione speciale è forse quella che può render ragione delle eruzioni acquose le quali hanno avuto luogo in alcuni terremoti, cagionando talvolta delle terribili inondazioni. Chi fornisce l'acqua? Che sia il mare è fatto innegabile, perchè talvolta furono ejetti di pesci ed altri prodotti marini. Queste eruzioni acquose pertanto, se non erriamo, vagliono pure a provare evidentemente che i terremoti non vennero cagionati da urti di vapori, perchè in tai casi le ejezioni sarebbero state di vapori, anzi che di acqua allo stato liquido. Ma cosa modifica l'acqua del mare? Chi le dà la ferza ejettiva? Questo ognuno potrà spiegarsi quando avremo parlato della materia produttrice i terremoti (**).

(*) Vedansi pure nei Comptes rendus, tom. 6. p. 514 e 515, molti altri esempi di terremoti sofferti da bastimenti in mare quieto, e senza intervento del maremoto. Le Gentil così descrive le scosse che soffrono i bastimenti nei terremoti: « . . « I bastimenti che trovansi al» l'ancora vengono agitati sì violentemente che sembra che tutte le » parti di cui sono composti vadano a disunirsi; i cannoni saltellano » sui loro carri, gli alberi per questa agitazione rompono le loro go » mene. . . . Concepisco bene che il fondo del mare è una continua» zione della terra; e che se questa terra è agitata, comunica le sue » agitazioni alle acque che sostiene; ma ciò che non concepisco è il mo» vimento irregolare del bastimento, di cui tutte le parti prese sepa» ratamente partecipano come se non notasse in un fluido, ma facesse » parte della terra (Indic. Pisano 10 settembre 1846. p. 93).

(**) Non crediamo occorrente di trattenerci a provare che questi flussi e riflussi del mare, talvolta meravigliosi, i quali accompagnano il tremuoto, non si potrebbero attribuire ad effetto di urti meccanici. Come avrebbero potuto esserlo, per esempio, tanti mari contemporaneamente agitati nel celebre terremoto di Lisbona del 1755?

8.° Perchè i terremoti sogliono anticipatamente alla loro manifestazione operare delle impressioni sugli animali. Nel mentovato gran tremoto di Pisco tutte le bestie furono prese da paura mezz'ora avanti che accadesse. Il Sig. I. A. King (Bibl. Univ. de Genève, 1846, tom. 2. p. 551) sul proposito narra quanto segue : « .... Allorchè un dopo mezzogiorno l' » eccessivo calore ci decise a prendere qualche riposo sulle » sponde del fiumo *Passaggio* (vicino a Salta, Repubblica Ar- » gentina) , le nostre mule mostrandosi restie contro la loro » abitudine, levammo loro da dosso selle e bagagli, e ci sdra- » iammo sotto un albero. Questi animali non furono appena » liberi, che si messero a correre qua e là , aspirando l' aria » in tutte le direzioni; ora ritornavano verso noi a galoppo , » tantosto si allontanavano di nuovo, poi si arrestavano tutt'a » un tratto, e tremavano in tutte le loro membra. Lo spavento » di queste due povere bestie mi ispirò un timore vago, e mi » levai per andare alla scoperta , quando fui rovesciato vio- » lentemente sul suolo da una convulsione sotterranea che mi » parea scuoter la terra ne'suoi fondamenti. » Anche l' uomo va soggetto alle anticipate impressioni del terremoto. Un mio dotto amico , incomodato da molto tempo in un calcagno , vi risentì fortissima convulsione un quarto d'ora avanti la piccola scossa accaduta nel Senese la sera del 15 aprile 1848. Ora tali manifestazioni anticipate come potrebbero cagionarsi da un urto non peranco avvenuto ? La causa di queste perturbazioni risiede nell'ambiente che ci circonda o agisce sul medesimo (*).

Ci sembra pertanto di aver riunito materiali bastanti da

(*) Il Pilla, che tiene i tremoti per *fenomeni vulcanici senza uscita*, si trova costretto da questa teoria a dare una spiegazione che tutt'altro lo è, dei segni precursori delle scosse. Ecco le sue parole : « *Egli* » *è molto probabile che l'azione sotterranea la quale prepara lo scuoti-* » *mento influisce sullo stato dinamico dell'atmosfera in un modo che non* » *conosciamo.* » (Tratt. di Geologia, tom. 1. Pisa 1847, in 8). Dunque anche secondo Pilla, o meglio a di lui malgrado, l'urto meccanico non è il solo tutto nei terremoti.

doverci costringere a confessare che la causa dei terremoti è una forza speciale di natura sua propria, ed interamente diversa dall'azione degli urti meccanici che possono cagionare le materie eruttive dei vulcani.

Di qual natura è ella questa forza? Essa certamente deriva da un imponderabile, tale mostrandolo l'istantaneità, la grandiosità e l'immensa estensione degli effetti che spesso produce, come la persistenza della di lui azione per un tempo più o meno lungo.

Sono le scienze fisiche oramai inoltrate tanto da far concepire che luce, calorico, elettricità e magnetismo non siano in realtà che una sola materia, la quale varietà subisce di modificazioni che la rendono capace di produrre effetti fra loro diversi. La medesima materia pertanto deve essere quella che opera i terremoti. Non conosciamo qual sia la modificazione che per produrre il terremoto la materia imponderabile prenda. Non potremmo chiamarla elettricismo puro, perchè mancano nei terremoti gli effetti grandiosi che si operano dalla elettricità accumulata, i quali effetti dovrebbero nel caso di tremoto essere sensibilissimi, e tali, che a fronte di essi nulla sarebbero quelli del fulmine.

Ma intanto potremo dire che la materia operatrice dei terremoti, più che alla luce, che al calorico, che al magnetismo, si rassomiglia all'elettricità. Ed in fatti se non siamo autorizzati a dichiarare che i di lei effetti sono elettrici, possiamo pur credere che vari degli effetti elettrici che nei terremoti si riscontrano, siano più da attribuirsi alla materia la quale agisce, che tenerli per una conseguenza di quello sviluppo di elettricismo che suole aver luogo in quasi tutte le operazioni o della natura o della mano dell'uomo.

La forza in questione parrebbe dunque da riguardarsi per una modificazione dell'elettricismo.

Ove opera ella? Al certo la sua azione si fa sentire, come esponemmo, nel senso della superficie terrestre; essa o non agisce o forse raramente nelle parti profonde del globo, e solo sembra affettare le prime parti della scorza terrestre. Se la

sede della forza che produsse il gran tremoto di Lisbona, sentito da quasi tutto il mondo, fosse stata nelle viscere della terra, dei grandi soqquadri, delle grandi eiezioni vulcaniche si sarebbero verificate, lo che non fu, mentre tutta la superficie venne agitata, e le acque di tutti i mari e di tutti i laghi, ed anco di semplici conserve, provarono delle forti impressioni.

Come opera? Pare che la materia produttrice dei terremoti sia una specie di corrente. Questo spiega perchè il movimento essenziale dei terremoti (e dei grandi senza eccezione), é l'oscillatorio, i moti di vibrazione, di sussulto, di vortice non essendo che modificazioni del movimento oscillatorio, cagionate dalle diverse resistenze locali, talchè questi movimenti nei terremoti sono da tenersi per accidentali; e si intende la ragione per cui non si riscontrano mai isolati dal movimento oscillatorio (*).

A noi è accaduto di essere testimoni della corrente di cui parliamo. Così descrivemmo il gran tremoto del 14 agosto 1846 sentito in Pisa (**): « A mezzo giorno e 47′ lungo e terribile » terremoto accompagnato da rumore spaventoso; la direzione » fu da ONO a ESE. Essendo io stato appunto nella direzione » del fenomeno, ecco cosa sentii: insieme colla romba comin- » ciò un lungo *tremolio*, o piuttosto una *sensazione di corrente* » sotto i piedi, che produceva un leggero informicolamento » nelle gambe: facendo scorrere della rena sopra una carta o » foglio retto colla mano, si avrebbe la sensazione di cui parlo,

(*) Le importantissime osservazioni dei sigg. Rogers sul tremoto sentito agli Stati Uniti di America li 4 gennaio 1844, mettono in essere l'esistenza della corrente cui accenno: il di lei urto fu simultaneo sopra una linea di 800 miglia, mentre potè calcolarsi il tempo che la materia del terremoto impiegò nelle sue propagazioni nel senso laterale. I predetti fisici hanno confermato le loro osservazioni dietro quanto accadde nel terremoto della Guadalupa degli 8 febbraio 1843 (Amer. Iour. vol. 45, p. 341).

(**) Questa nostra descrizione venne testualmente riportata dal chiariss. Sig. Professore Perrey nella sua Lista dei terremoti dell'anno 1846 (Memoires de l'Accad. de Djion).

» Mi avvidi esser questo un terremoto che passava, e che re-
» putai terminato in quel modo. Al tremolio successero tre
» scosse ondulatorie, assai estese e regolari, ciascuna delle quali
» interrotta momentaneamente dall'altra e preceduta da una
» sensazione di urto o di colpo all' istante che incominciava.
» Non solo notai che l'ondulazione era principiata dall'ONO, *ma*
» *in ogni ondulamento sentii esser più violenta la spinta che il*
» *ritorno.* Le imposte del mio finestrone segnavano coll' aprirsi
» e col serrarsi le ondulazioni e le fermate, come lo segnava-
» no i tocchi della campana del pubblico. Terminate le orribili
» ondulazioni, riprese il primitivo tremolio o sensazione di cor-
» rente sotto i piedi, il quale durò tanto che non ebbi la pa-
» zienza di attenderne la fine, e mi alzai da sedere. Furono sì
» regolari e sì orizzontali le scosse che, mentre si spaccavano
» i grossi muri della fabbrica e della stanza in cui ero, niun
» piccolo oggetto si scompose sulla mia tavola, nemmeno un
» vaso a base convessa che fa movimento a ogni piccolo ur-
» to. Si è parlato di movimento sussultorio provato in Pisa; que-
» sto è possibile per qualche circostanza locale, procedente
» dalla resistenza della fabbrica, come è accaduto che in una
» casa alcuni mobili ricevessero un movimento vorticoso, e de-
» scrissero un semicerchio. Ma la vera indole delle scosse in
» Pisa è quella che ho descritta. »

Non è questa la prima volta che ho sentito il tremolio. Lo provai pure a mezzo del fortissimo terremoto sofferto in Livorno li 3 aprile 1814, a 3 ore e mezzo di mattina. Ma essendo allora in letto, non potevo ben caratterizzare l'indole del tremolio che tramezzava le grandi scosse, ed attribuii quel tremolio ad un effetto di elasticità dell'edifizio che aveva ricevute le scosse. Insisto su tal tremolio, e richiamo su di esso l'attenzione dei fisici, perchè parmi indicare il passaggio o corrente direi infinitamente veloce di una materia fluida, lo che viene a confermarsi dalla da me notata distin zione fra la *spinta* ed il *ritorno* nelle scosse.

Se, dopo quanto ho esposto, mi sia dato di entrare nel dominio delle ipotesi o meglio delle congetture, dirò che come sul

globo terrestre costantemente esistono la materia elettrica e la materia magnetica, siamo autorizzati a credere che sempre vi sussista la materia produttrice dei terremoti, quantunque di questa la presenza non si faccia sentire, come di quelle non si fa, quando è allo stato di equilibrio. Soffre per altro essa, egualmente che la materia elettrica, e la materia magnetica, delle perturbazioni, delle quali la minima a noi sembra quando produce la semplice romba senza le scosse. Siccome la romba che accompagna il terremoto non deriva da rumore che si produca pel movimento che prendono gli oggetti, spero che non sarà tenuta per gratuita cosa, se prendiamo come un' attinenza dei terremoti anco le rombe isolate e senza scosse, che talvolta precedono ancora di due mesi il terremoto (Bibl. univ. de Genève, sept. 1840, pag. 115 e segg.); come attinenza certa dei terremoti sono le rombe che li precedono, li accompagnano, e quelle che hanno luogo dopo le scosse; e perciò pare che possiamo non senza ragione tenere la *romba sola senza scosse* come il minimo fra i fenomeni del terremoto (*).

Il *tremolio* di cui ho parlato sarebbe il secondo grado in forza della perturbazione della materia produttrice dei terremoti. Intendo prodursi il semplice tremolio quando la materia non è talmente ammassata da trovare ostacolo concludente nel suo passaggio, per lo che agiti soltanto leggermente i corpi a traverso dei quali percorre. L'irruzione di quantità maggiore o l'accumulamento di detta quantità incontrando la resistenza, produce gli urti e le scosse oscillatorie. La differenza nelle resistenze è poi la causa perchè uno stesso tremoto si presenti saltuariamente in più luoghi senza scuotere gli intermedi, e perchè i di lui effetti, anzi che diminuire progressivamente di

(*) Molti tengono la *romba* per il rumore prodotto dalle vibrazioni che soffre la massa urtata e messa in movimento. Ma se ciò fosse, come avremmo rombe e rumori senza scosse? Come la romba precederebbe (e spesso) le scosse, o sarebbe ad esse successiva? E come si avrebbero dei terremoti senza romba? Tale lo fu l' immenso tremoto di Lisbona.

intensità, provano sovente delle alternative di recrudescenza nel corso della materia produttrice il fenomeno.

Per quanto la corrente della materia de' terremoti si agiti e scorra nel senso della superficie terrestre, e forse a poca profondità si addentri nella terra (*), questa materia non agisce soltanto come motrice delle masse, ma può essere eziandio fomentatrice dei fenomeni chimico-mineralogici o vulcanici che si operano nel seno della terra. Così i terremoti sono spesso accompagnati da ejezioni gazose e minerali, e dallo sviluppo in piccola scala di fenomeni vulcanici.

Se inoltre si concepisca che le elaborazioni terrestri siano un mezzo atto a produrre il disequilibrio della materia dei terremoti, intenderemo facilmente: 1.° come i gran terremoti, eccitando maggiormente le materie in elaborazione, più facilmente le scosse si ripetano e si prolunghino, e talvolta si perpetuino anco a degli anni per l' effetto della reazione eccitata di tali materie, la qual reazione, come dicemmo, mette in azione la causa dei terremoti; 2.° come un gran tremoto generale (quello di Lisbona per esempio) possa esser seguitato per del tempo da parecchi terremoti, nelle parti più disparate

(*) Ecco un passo di Humbold che porge l'esempio di terremoto sentito soltanto al di sotto della superficie terrestre, e di altro unicamente sofferto alla superficie: « ... In principio di questo secolo nelle miniere di Mariemberg forti scosse si fecero sentire con tanta violenza, che gli operai sbigottiti si affrettarono di salire; sul suolo stesso non avevasi provato alcuna scossa. Ecco ora un fenomeno inverso: in novembre 1823 i minatori di Falun e di Pérsberg non provarono alcuna scossa nel momento stesso in cui sopra il loro capo un violento tremoto spargeva lo spavento fra gli abitanti della superficie.» (Cosmos, T. 1, pag. 389 nota 89 della versione italiana). — Secondo il Sig. Darwin la direzione delle scosse, ed il rovesciamento delle muraglie dietro la loro posizione per rispetto alla linea che percorse il gran tremoto del Chilì del febbraio 1835, proverebbero che le vibrazioni non vennero da una grande profondità, e che erano desse dovute alla rottura degli strati ad una debole distanza sotto la superficie del suolo (Hist. des progrès de la géologie, tom. 1, p. 635).

della terra; 3.° come certe località vadano più soggette alle scosse, e specialmente i paesi vulcanici; 4.° e come finalmente possa accadere che dei luoghi stati altrevolte soggetti ai terremoti, più non lo siano, come più non lo sono alle eruzioni vulcaniche, e viceversa.

Così, riassumendoci, diremo che la materia dei terremoti (probabilmente un elettricismo modificato) tende a percorrere con prodigiosa rapidità specialmente la parte superficiale della terra o i primi strati di essa; che le minime quantità della di lei corrente si manifestano colla semplice romba; che una quantità maggioro di corrente produce il tremolio; e finalmente che la massima corrente cagiona le scosse ondulatorie, le quali sono le sole caratteristiche del fenomeno, salve poche eccezioni derivate da località. La materia poi del terremoto mettendo in maggiore azione le materie vulcaniche esistenti nei primi strati terrestri, queste materie col subire una più energica elaborazione, vagliono ad eccitare il disequilibrio nella materia dei terremoti, e sono occasione delle ripetizioni locali delle scosse, fin quì attribuite alla semplice azione meccanica del vulcanismo. E le elaborazioni dei vulcani propriamente dette che si operano nelle maggiori profondità della terra, possono pure in esse profondità cagionare il disequilibrio della materia da terremoti; ma in tali casi la di lei corrente avendo luogo di sotto in su, i fenomeni che si producono possono essere grandiosissimi e terribili, come lo sono i terremoti attorno ai vulcani, per esempio, dell' America: ma questi terremoti non ricevono il più delle volte una grande estensione nel senso della superficie; mentre un terremoto superficiale, per quanto leggero, può affettare un'estesissima parte della terra.

Così non sarà più inesplicabile che dei grandi terremoti siansi sofferti nelle regioni vulcaniche, come furono, per esempio, quello di Sicilia del 1693, il terribile di Napoli del 1456, i famosi tremoti del 1783 nelle Calabrie, e l'orrendo che angustiò il Regno di Napoli li 26 luglio 1805, senza che producessero alcuna impressione nei vicini vulcani (*), mentre all'

(*) Nel gran tremoto del Chilì del 23 febbraio 1835, il quale si fece

incontro le eruzioni del Vesuvio del 16 dicembre 1631 e del 5 giugno 1638, e quella dell'Etna del 9 gennaio 1693 fossero concomitate da terremoti orribili, che si estesero a lontanissimi paesi. I precitati avvenimenti dell' una e dell' altra indole confermino quanto abbiamo esposto nella presente Memoria, cioè che mediante l'azione spontanea della materia operatrice dei terremoti, e mediante la di lei azione suscitata per mezzo delle operazioni vulcaniche, possono spiegarsi i primari accidenti del terribil fenomeno di cui ci siamo occupati.

ESTRATTO DELLA NOTA

DEL PROF. PAOLO VOLPICELLI

SULLA GENERALE SOLUZIONE IN INTERI DELLE

$$x^2 + y^2 = z\,, \quad x^2 + y^2 = z^2$$

letto dal medesimo il dì 31 del 1850 nell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei.

Nella sessione del 26 Agosto ultimo decorso ebbi l' onore leggere all'Accademia, per estratto, una nota sopra l'equazioni di secondo grado indeterminate, relative alla costruzione del triangolo rettangolo. Dimostrai nella nota stessa, che la

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

oltre alle intere soluzioni

$$x = \pm (a^2 - b^2)\,, \; y = \pm 2ab\,, \; z = a^2 + b^2,$$

altre ne ammetteva, pure intere, non comprese in queste, le

---

sentire sopra un' estensione eguale a quella che separa il mare del Nord dal Mediterraneo, il vulcano di Villarica, quello di cui in tutta la catena sono più frequenti le eruzioni, non diede segno alcuno, mentre i vulcani del centro del Chilì siano stati in grande attività alcuni giorni dopo (Hist. des progrès de la géologie, tom. 1, pag. 635).

quali perciò non possono riguardarsi come soluzioni generali della proposta. Pertanto nella presente nota (*), confermando per altra via quanto allora fu dimostrato, esporrò l'analisi completa della proposta medesima; dando le formole che comprendono tutte soluzioni intere di essa; e dimostrando le proprietà che loro appartengono. A questo fine dobbiamo prendere le mosse dal risolvere la

$$x^2 + y^2 = z.$$

Rappresentano adunque α, β, γ, ... w i fattori primi e diversi della z; cosicchè abbiasi

$$z = \alpha\ \beta\ \gamma^m\ \delta^{m'}\ \rho \ldots w\ ,$$

nel quale prodotto, per generalità maggiore, abbiamo supposto dei fattori primi ripetuti, come appunto sono le potenze γ^m, $\delta^{m'}$, ... Decomponendo il numero z nelle diverse somme di due quadrati ognuna, nelle quali esso può decomporsi, egli è chiaro che qualsiasi di queste somme fornirà, colle radici de' suoi due termini, quattro soluzioni della proposta.

Se abbiasi perciò

$$z = e^2_1 + g^2_1 = e^2_2 + g^2_2 = e^2_3 + g^2_3 \ldots = e_\nu^2 + g_\nu^2,$$

saranno evidentemente le soluzioni della proposta espresse come segue:

$$x = \pm (e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ ,\ .\ .\ .\ e_\nu\ ,$$

$$y = \pm (g_1\ ,\ g_2\ ,\ g_3\ ,\ .\ .\ .\ g_\nu.$$

Lo spezzamento completo di z in tutte le diverse somme, ognuna di due quadrati, si eseguirà valendosi di quanto fu esposto nei paragrafi VIII, IX, X, XII della nota che abbiamo già pubblicata sullo spezzamento stesso (**).

(*) Prosegue in questa nota la numerazione dei paragrafi dell'altra, pubblicata nella Raccolta di lettere ec. Roma 1849. Tom. V. p. 263 e segg; p. 313 e segg.; perchè la presente fa seguito a quella.

(**) Vedi, Raccolta di lettere ed altri scritti, ec. Roma, anno 1849. T. V, p. 263 e seg. p. 313 e seg.

Ciò premesso, potremo facilmente, seguendo il metodo dimostrato al citato paragrafo X, e col mezzo delle formole (2) della stessa nota, ottenere lo spezzamento di z nelle somme diverse di due quadrati ognuna, quantunque vi sieno fattori primi ripetuti come sono γ, δ.

Il numero ν degli spezzamenti di z in due quadrati viene determinato dalla

$$\nu = 2^{k-1},$$

essendo k il numero dei fattori primi della z stessa, niuno ripetuto nella medesima; e ciò fu dimostrato al §. X della citata nota. Se però la z contenesse due fattori primi ripetuti, come γ^m, $\delta^{m'}$, in tal caso, pel §. XII della nota stesssa, bisognerebbe all'esponente $k-1$ sostituire

$$\left(k-2+\frac{m}{2}+\frac{m'}{2}\right)-1,$$

se i numeri m, m' sieno pari; e

$$\left(k-2+\frac{m+1}{2}+\frac{m'+1}{2}\right)-1,$$

se i medesimi sieno impari; quindi avremo

$$(k_1)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{pel primo caso}\\ \qquad \nu = 2^{k-3+\frac{m+m'}{2}},\\ \text{pel secondo}\\ \qquad \nu = 2^{k-2+\frac{m+m'}{2}},\\ \text{e pel caso in cui la } m \text{ sia pari, e la } m' \text{ impari}\\ \qquad \nu = 2^{k+\frac{m+m'-5}{2}};\end{array}\right.$$

k essendo sempre il numero dei fattori primi di z tutti fra loro diversi.

Pertando, convenendo il doppio segno a ciascun valore numerico delle x, y soddisfacente alla proposta, è chiaro che,

avuto riguardo a tutte le combinazioni possibili dei segni fra loro, sarà il numero μ delle sue soluzioni espresso dalla

$$\mu = 4\nu.$$

Allora poi la proposta non potrà risolversi, quando il secondo suo membro z, fra'suoi fattori primi, ne contenga uno della forma $4n + 3$, con esponente impari; giacchè in questo caso il numero z non si potrà spezzare in due quadrati (*).

Ora veniamo alla soluzione generale della equazione

$$(k_2) \qquad x^2 + y^2 = z^2.$$

Primieramente sia la z spezzata in tutte le somme di due quadrati, nelle quali può essa rappresentarsi. Osservando che il quadrato z^2 uguaglia qualunque delle combinazioni binarie fra gl'indicati spezzamenti di z, comprese le *repliche*; chiaro apparisce che se

$$a^2_1 + b^2_1 \ , \quad a^2_2 + b^2_2,$$

rappresentino due qualunque di siffatti spezzamenti, delle formole (2), più volte citate, avremo per la proposta le seguenti soluzioni

$$(k_3) \quad x = \pm (a_1 a_2 \mp b_1 b_2) \ , \quad y = \pm (a_1 b_2 \pm b_1 a_2),$$

dalle quali sarà la medesima esattamente soddisfatta; poichè sostituendole in essa, otterremo la identità

$$(a^2_1 + b^2_1)(a^2_2 + b^2_2) = z^2.$$

Se nelle (k_3) facciasi

$$a_1 = a_2 \ , \quad b_2 = b_1 \ ,$$

si ridurranno esse alle

$$(k_4) \qquad x = \pm (a^2_1 - b^2_1) \ , \quad y = \pm 2a_1 b_1 \ ,$$

che forniscono solo quelle soluzioni della proposta, le quali derivano considerando la z^2 formata dal quadrato di uno qualunque degli spezzamenti noti di z.

Pertanto è chiaro, che tutte le soluzioni della proposta sono comprese nella (k_3); perciò queste debbono riguardarsi come

(*) Nota citata §. IX.

le sole generali soluzioni della medesima. Quindi le (k_4) non sono altro fuorchè soluzioni particolari della proposta medesima, come ora fu indicato; ed il numero di queste sarà sempre minore del numero di quelle, che derivano dal considerare la z^2 prodotta moltiplicando fra loro due qualunque spezzamenti diversi della z. Dunque le stesse (k_4) non a ragione furono riguardate sino ad ora come soluzioni generali (*) della (k_2), ed in vece questa proprietà deve solo riconoscersi nelle (k_3).

In quanto al numero delle soluzioni diverse e positive appartenenti alla proposta, è facile dimostrare, che questo non potrà essere maggiore di ν^2, essendo ν il numero degli spezzamenti di z ciascuno in due quadrati. E riguardando al doppio segno, dal quale può essere affetto qualunque valore numerico delle x, y soddisfacente alla proposta, egli è chiaro che il numero μ di tutte le soluzioni della medesima, comprese le ripetute, sarà dato dalla

$$\mu = 4\nu^2 = 2^{2k}.$$

Questa è la relazione fra il numero dalle soluzioni tutte della proposta, comprese le ripetute, ed il numero k dei fattori diversi contenuti nella z, delle quali ognuna starà nelle (k_3), ed alcune, in numero di 4ν, anche nelle (k_4).

Se z oltre ai fattori primi della forma $4n+1$, ne contenga degli altri della forma $4n+3$, si potrà sempre risolvere la proposta; giacchè rappresentando con α il prodotto di questi secondi fattori, si spezzi $\frac{z^2}{\alpha^2}$ in tutte le somme, di due quadrati ognuna, nelle quali può spezzarsi, e poscia si moltiplichino esse per α^2. che si avranno gli spezzamenti di z^2 nelle somme di due quadrati, e le soluzioni della proposta.

ESEMPIO

Sia data la

$$x^2 + y^2 = 455^2,$$

(*) Comptes rendus de l'academie des sciences de Paris, tom. 28, pag. 686, 755.

nella quale abbiamo

$$z = 7 \,.\, 5 \,.\, 13 = 7 \,.\, 65 \text{ , essendo } \alpha = 7 \text{ ;}$$

perciò poniamo

$$x^2_1 + y^2_1 = 65^2 \,.$$

avremo per la teorica precedente

$$x_1 = \pm(25 \text{ , } 39 \text{ , } 33 \text{ , } 63$$
$$y_1 = \pm(60 \text{ , } 52 \text{ , } 56 \text{ , } 16 \text{ ;}$$

Quindi moltiplicando per 7 questi valori, si otterranno le cercate soluzioni

$$x = \pm(175, 273, 231, 441,$$
$$y = \pm(420, 364, 392, 112.$$

La (k_2) non si potrà risolvere solo quando z sia un primo, od un prodotto di primi, ciascuno della forma $4n + 3$.

Ora passiamo a dimostrare le proprietà dei valori numerici soddisfacenti alla (k_2), e ciò per mezzo del teorema di Fermat sulle potenze prime degl'interi (*) pel quale abbiamo la

$$ab(a^{p-1} - b^{p-1}) = p(qb - q'a);$$

e facendo $\mu = 2, 3, 5, 7$, avremo le

$$\frac{ab(a-b)}{2} \text{ , } \frac{ab(a^2-b^2)}{3} \text{ , } \frac{ab(a^4-b^4)}{5} \text{ , } \frac{ab(a^6-b^6)}{7} \text{ ,}$$

tutte quantità intere.

Riprendiamo, dopo questa premessa, le (k_4); e considerando i soli valori numerici delle medesime, avremo

$$(k_5)\begin{cases} xyz = 2a_1b_1(a^4_1 - b^4_1) \text{ ,} \\ xy = 2a_1b_1(a^2_1 - b^2_1) \text{ ,} \\ xy(x+y)(x-y) = 2a_1b_1(a^6_1 - b^6_1) - 14a^3_1b^3_1(a^2_1 - b^2_1). \end{cases}$$

Quindi avuto riguardo alla forma dei secondi membri delle (k_5), e perciò alla esatta divisibilità dei medesimi pei primi

(*) Caraffa, Elem. di mat. comentati da Volpicelli, parte I, pag. 89, II. Roma 1836.

2, 3, 5, 7, possiamo concludere, che le soluzioni della proposta contenute nelle (k_4), posseggono le seguenti proprietà.

1.° Per la prima delle (k_5) il prodotto xyz sarà esattamente divisibile per 60; e perciò se tre numeri sieno tali, che il quadrato del più grande eguagli la somma dei quadrati degli altri due, sarà il prodotto dei numeri stessi necessariamente divisibile per 60. Questa verità fu già dimostrata dal sig. Lenthèrie (*), però con altri principii, ed in modo assai più lungo del presente. Sembra che il signor Binet sia stato il primo a dimostrare (**) la verità medesima, col mezzo del noto teorema di Fermat: lo che ci porse occasione a dimostrare col teorema stesso le altre seguenti.

2.° Per la seconda delle (k_5) sarà il prodotto xy sempre divisibile per 12.

3.° Per la terza delle medesime uno dei quattro numeri

$$x, \; y, \; x-y, \; x+y,$$

sarà sempre divisibile per 7.

È da osservare che le conseguenze dedotte nei numeri 1.°, 2.°, 3.°, quantunque dimostrate mediante le particolari soluzioni (k_4), e perciò limitate in forza della dimostrazione ai soli valori numerici delle soluzioni medesime, tuttavia si verificano anche pei valori delle soluzioni generali (k_3), come facilmente si può verificare negli esempi di questa nota pubblicata per esteso nel T. CXIX del giornale arcadico p. 20. Oltre a ciò tutte le proprietà enunciate precedentemente si verificano eziandio pei valori della x, y non primi fra loro; giacchè la dimostrazione delle medesime non dipende affatto da questa circostanza.

4.° Poichè dalla

$$x^2 + y^2 = z^2$$

abbiamo la

$$x^2 = z^2 - y^2,$$

(*) Iournal de M. Gergonne, vol. XX, p. 376, an. 1829—30.

(**) Comptes rendus, vol. 28, p. 687.

che si dimostra essere solubile in interi, per qualunque valore della x, purchè maggiore di 2 : così è chiaro potersi nella proposta

$$x^2+y^2=z^2$$

prendere per x qualunque intero, purchè maggiore di 2, che sempre si avranno per le y, z valori acconci a risolvere la proposta medesima. Ed infatti la equazione

$$3^2+4^2=5^2,$$

è quella che può aversi col più piccolo valore possibile della x; perciò essa è la più semplice di tutte le altre del suo genere.

5.° Con due spezzamenti qualunque di z, come per esempio

$$a^2_1+b^2_1\,,\quad a^2_2+b_2^2,$$

abbiamo sempre quattro coppie di valori numerici soddisfacenti alla proposta; due delle quali, che noi rappresentiamo con le

$$x_1\,,\ y_1\,;\quad x_2\,;\ y_2\,,$$

vengono particolarmente date anche dalla (k_4), mentre le altre due, che rappresentiamo con

$$x'_1\,,\ y'_1\,;\quad x'_2\,,\ y'_2\,,$$

si ottengono solo dalle (k_3), osservando che la soluzione x'_1, y'_1 si riferisce al segno superiore, mentre la x'_2, y'_2 si riferisce all'inferiore delle (k_3) medesime.

Pertanto con facile calcolo avremo le

$$2x'_1\,y'_1=y_2x_1+x_2y_1\,,\quad 2x'_2y'_2=y_2x_1-x_2y_1\,.$$

Queste formole stabiliscono una dipendenza fra le soluzioni, che mediante due spezzamenti di z si ottengono solo dalle (k_3), e quelle che si ottengono, mediante gli spezzamenti stessi, anche dalle (k_4).

6.° I prodotti

$$x'_1\,y'_1\,,\quad x'_2\,y'_2\,,$$

essendo, per quello si è dimostrato nel 2.° corollario, divisibili ognuno per 12, saranno i binomi

$$y_2\,x_1+x_2\,y_1\,,\quad y_2\,x_1-x_2\,y_1$$

divisibili ambedue per 24.

7.° I prodotti

$$a_1 b_1 , \quad a_2 b_2 , \quad a_3 b_3 , \ldots$$

sono sempre pari, e perciò i valori della y saranno sempre divisibili per 4, bene inteso che la z sia impari.

8.° I valori numerici delle x, y non compresi nelle (k_4), ma solo nelle (k_3), ed il valore numerico della z, sono numeri non primi fra loro.

9.° Per quello dimostrammo al §. VII della precedente nota (*), la z sarà un primo della forma $4n+1$, od un prodotto di primi ciascuno della forma stessa, quante volte nella proposta (k_2), le x, y, z non abbiano in comune alcun fattore. Questa proprietà, coll'altra del 3.° corollario, non è molto, furono enunciate senza più dal sig. Liouville, nell'Accademia delle scienze di Parigi (**). Concludiamo pertanto, che x, y, z essendo primi fra loro, potrà sempre la proposta risolversi, quante volte sia z un primo della forma $4n+1$, od un prodotto di primi della forma stessa.

10.° Se x, y, z sieno primi fra loro, i numeri 3, 4, 5, concorreranno come fattori a produrre od x, od y; od anche distribuendosi fra x ed y; mentre la z, o non conterrà veruno di questi fattori, o conterrà solamente il 5. Quindi è che x, y, z essendo primi fra loro, il maggiore z dei numeri stessi non sarà divisibile nè per 3, nè per 4. Tutto ciò discende facilmente dalla prima delle (k_5); cioè dalla proprietà enunciata nel 1.° corollario, e dal considerare che z dev'essere od un primo della forma $4n+1$, od un prodotto di primi della forma stessa, perchè possa (§. VII) in due quadrati primi fra loro spezzarsi.

La proprietà medesima, d'altronde già cognita (***), fu enunciata dal sig. Poinsot nella sessione dell'Accademia delle

(*) Vedi Raccolta scientifica, an. 1849. T. V, p. 263 e seg. pag. 313 e seg.

(**) Comptes rendus. Vol. 28, p.687.

(***) Memoires de l'acadèmie royale des sciences. T. V, p. 123 e 121.

scienze di Parigi del 7 maggio 1849 (*), per dare occasione ad altri di trovarne la dimostrazione. Il Sig. E. R. di Grenoble, secondando questo invito, produsse (**) una dimostrazione molto elegante e generalissima della enunciata proprietà, e totalmente diversa da quella che abbiamo qui data. Il ragionamento del Sig. E. R. di Grenoble, non diversifica però essenzialmente da quello istituito nel 1676 dal De Frenicle, per dimostrare la proprietà medesima (***).

A completare poi questa proprietà, noi aggiungeremo :

11.° Che se x, y, z sono primi fra loro, il numero x non potrà essere mai divisibile nè per 4, nè per 2; giacchè, nell' uno e nell'altro caso, non sarebbe primo con y, contro la ipotesi.

12.° Se a_1, b_1; a_2, b_2; ec. sono numeri due a due primi fra loro, lo saranno anche i corrispondenti valori delle x, y, z. Questa proprietà, che viene dimostrata per mezzo delle (k_4), fu enunciata dal Sig. Binet, senza veruna riserva (****).

Però a noi sembra che la proprietà medesima sarà vera, solo quando le a_1, b_1 ec. prese a volontà, come dice il nominato geometra, oltre ad essere prime fra loro, sieno inoltre una pari e l'altra impari; nel qual caso i valori delle x, z saranno sempre impari. Che se le a_1, b_1, e così dicasi delle a_2, b_2, ec., essendo prime fra loro, fossero ambedue impari, sarebbero i valori delle x, z ambedue pari insieme a quello della y; quindi sebbene le a_1, b_1, ec. fossero numeri primi fra loro, pure le x, y, z non lo sarebbero, perchè dovrebbero ammettere in comune il fattore 2.

Così, per esempio, data la

$$x^2 + y^2 = (5^2 + 3^2)^2,$$

abbiamo

$$a_1 = 5,\ b_1 = 3;\ x = 16,\ y = 30,\ z = 34,$$

(*) Comptes rendus, vol. 28, pag. 583.

(**) Comptes rendus, vol. 28, p. 665.

(***) Memoires de l'académie royale des sciences. Tom. V, pag. 123 e 124.

(****) Comptes rendus, vol. 28, p. 687.

nella quale si vede che, sebbene a_1, b_1 sieno primi fra loro, tuttavia le x, y, z non lo sono, perchè ammettono in comune il fattore 2.

Il sig. Liouville dice (*): « La condizione *necessaria* e *suffi-* » *ciente*, cui deve soddisfare un dato numero z, perchè l'equa- » zione $x^2 + y^2 = z^2$ abbia luogo in numeri primi fra loro, » consiste nell'essere z un numero primo della forma $4n-1$, » od un prodotto di più primi della forma stessa. » Però sembra questo asserto non essere generalmente vero; poichè il numero z sebbene abbia la forma qui assegnatagli, non di meno l'equazione

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

in moltissimi casi ha luogo per interi non primi fra loro. Così le soluzioni

$$z = 1105,$$
$$x = 1020,\ 975,\ 700,\ 1100,$$
$$y = 425,\ 520,\ 855,\ 105,$$

della

$$x^2 + y^2 = 1105^2,$$

sono ciascuna formate da tre numeri non primi fra loro, mentre la z è della forma richiesta, cioè un prodotto di primi ognuno della forma $4n+1$, poichè abbiamo

$$z = 1105 = 17.13.5 = (4.4+1)(4.3+1)(4.1+1).$$

Dunque la espressa condizione, quantunque sia necessaria (XVII, 10°), tuttavia non si può dire sufficiente.

Roma, il 5 marzo 1850.

(*) Comptes rendus, vol. 28, p. 687.

RICERCHE DI REOMETRIA ELETTRICA

MEMORIA

DI A. SECCHI

Professore nel Collegio Romano.

La teoria delle correnti elettriche ritrovata da Ampère, benchè sia certamente una delle più belle parti della fisica matematica, non ha in questi ultimi anni fatto progressi proporzionati alla sua importanza; anzi, mentre la parte sperimentale si è sommamente estesa, la matematica è rimasta quasi nello stato medesimo in cui la lasciò il suo autore e Savary. La difficoltà dell'analisi richiesta per la soluzione di tali problemi, e la mancanza di accurati mezzi onde verificare numericamente i risultati possono dare ragione di questo fatto. Si deve al celebre matematico Sig. Plana di Torino l' avere recentemente estese le formole di Ampère e dedottine nuovi ris ultati, alcuni dei quali sono publicati nella *Raccolta Scientifica di Roma* 1846 e nel Tomo CXI del *Giornale Arcadico*, molti altri sono inediti e se ne aspetta con impazienza la publicazione. Tra gli altri problemi da lui risoluti ve n'è uno assai notabile, e che formerà il soggetto del presente scritto : esso è il seguente. « Si immagini un globo circondato da correnti elettriche circolari tutte incrociantesi ai poli come i meridiani di una sfera ; se prendasi un elemento infinitesimo di corrente elettrica, e si metta dentro il globo in varie posizioni successivamente, il Sig. Plana dimostra che l'azione delle correnti su questo elemento è maggiore presso i poli che nel centro, e che a $9|_{10}$ del raggio polare cominciando a contare dal centro, la forza è tre volte più grande che nel centro stesso. » Questo risultato è certamente bellissimo, e presenta una precisione numerica a cui non facilmente si arriva nei problemi elettrodinamici. Avendo perciò il Sig. Professore mostrato desiderio che io cercassi

di verificarlo sperimentalmente, mi vi accinsi ben volentieri, e e credo che non senza qualche vantaggio sia riuscita questa ricerca.

Molte difficoltà però si presentavano alla esecuzione di queste esperienze, la massima delle quali sarebbe stata quella di operare sopra un elemento di corrente elettrica di lunghezza infinitesima. Ma a questo fu rimediato per consiglio del Sig. Plana medesimo coll'adoperare un piccolo ago magnetico, giacchè per tale sostituzione non si alterava il *rapporto* delle forze quantunque i loro particolari valori fossero differenti. I primi esperimenti che feci a questo proposito vennero publicati nella Raccolta scientifica precitata (anno 1847) con una breve esposizione del modo tenuto nello sperimentare e dei principii su cui era fondato. Ma per quanto plausibile fosse l' accordo dell'esperienza colla teoria in materia così complicata, pure rivedendo le antiche sperienze e facendone delle nuove parvemi vedere qualche costante irregolarità che a semplice difetto di osservazione non potevasi attribuire. Non avendo io veduto i principii della soluzione data dal Sig. Plana, difficilissimo mi riusciva scoprirne la causa, ed essendo tornati vani tutti i tentativi fatti per averne illustrazione dal medesimo, mi vidi nella necessità di ripigliare da me stesso la soluzione matematica del problema dal suo principio, e così tentare di scoprire quali potessero essere le sorgenti delle irregolarità osservate. Dopo un lavoro alquanto faticoso parmi esserne venuto fortunatamente a capo, ed avere realmente trovato le cause delle differenze predette. Per dare un idea del lavoro dirò soltanto per ora che il problema dell' ago magnetico messo dentro al globo non può prendersi come identico con quello in cui si considera un solo elemento di corrente, perchè quantunque sia vero ciò che ha dimostrato Ampère, che l'azione di una corrente sopra un elemento di corrente *è proporzionale* a quella sopra un polo magnetico, pure essendo in ogni ago magnetico due poli posti a distanza, deve considerarsi la doppia loro azione e diversa posizione che possono avere. Questa circostanza introduce come elemento indispensabile l'angolo di de-

viazione dell'ago dal piano della corrente, e dà risultati variabili per ogni filo che circonda il globo in diverso meridiano, e i risultati devono esser perciò differenti da quelli che si otterrebbero con un solo elemento di corrente. L'accordo che si vedeva tra il calcolo del Sig. Plana e le esperienze publicate nella precitata raccolta si deve a varie circostanze accidentali, e si vedrà come variate queste variano i risultati, sempre però in concordanza colla teorica generale. Il problema di cui presento la soluzione è quello di cercare l'azione di una corrente elettrica sopra un ago magnetico, e lo risolvo nel caso della corrente circolare ed ellittica: ma quest' ultimo essendo alquanto difficile a verificarsi sperimentalmente e di calcolo molto laborioso, non ne darò che l' analisi geometrica riserbando ad altra occasione le ricerche sperimentali cui finora non ho potuto eseguire che pel circolo. Da queste ricerche sono stato condotto ad una teoria del galvanometro che se non è tanto semplice quanto sarebbe duopo alla pratica, sarà almeno più esatta di quante sono finora a mia cognizione.

Questo scritto rimane naturalmente diviso in due parti; la prima contenente l'analisi matematica, e l'altra le ricerche sperimentali sulle correnti circolari.

Vedremo nel progresso di questa memoria il grand' uso che si fa delle funzioni ellittiche nell' integrare le formole, e avremo un altro esempio d' applicazione de'bei lavori di Legendre alla soluzione de'problemi fisici dell'elettricità dinamica come Poisson e Plana lo han già dimostrato in altri problemi.

PARTE I.

§. 1.

Formole generali per l'azione tra un polo magnetico, ed una corrente elettrica.

Consideriamo una corrente elettrica circolante in una curva chiusa MNQ (Tav. 1. Fig. I) che per semplicità supporremo piana: sia in P un polo magnetico ed *ab* un elemento qualunque

ds della corrente stessa : si cerca l' espressione della forza esercitata da P sopra quest'elemento.

È noto che Coulomb investigando le leggi dell' azione mutua di due aghi calamitati, trovò che questa poteva esprimersi da quattro forze agenti in ragione inversa del quadrato delle distanze, due delle quali fossero attrattive e due repulsive. Questa legge fu altresì presa per certa da Poisson, ed usandola qual base in alcuni dei suoi calcoli, le conclusioni che ne dedusse, si trovarono esser conformi all'esperienza. Savary nella sua memoria intorno all'applicazione del calcolo ai fenomeni elettro-dinamici (*) seguendo le tracce di Ampère, e riguardando gli aghi magnetici come cilindri elettro-dinamici fu condotto alla medesima conclusione. I calcoli di Savary però essendo solo approssimativi potevano lasciar dubbio se questo fosse vero, oltre i limiti di quella approssimazione. E infatti gli esperimenti mostravano qualche discrepanza dalle sue conclusioni : così per esempio esso trovava il centro di azione delle forze elementari dei cilindri, ossia i loro poli situati alle estremità, mentre negli aghi magnetici (a meno che non sieno sottilissimi) sono sempre un poco indentro. Ora però questa difficoltà più non sussiste, giacchè mi assicurò il Sig. Plana che spingendo le approssimazioni più in là di quello che ha fatto Savary trovasi che il polo realmente non sta più alla estremità ma un poco indentro come vuole l'esperienza.

Dopo tutto questo possiamo star sicuri che l'azione di un polo magnetico è una forza che opera in ragione inversa del quadrato delle distanze : e questo fatto è indipendente dalla maniera di concepire la natura del magnetismo, ma è un semplice risultato della esperienza. Di più Ampère (**) e Savary (***)

(*) *Memoire sur l'application du calcul aux phénoménes éléctro-dynamiques Bachelier. Paris* 1823. Vedi anche *Ampère recueil d'observations éléctro-dynamiques, pag.* 328, *ed Annales de ch. et Phys. T. XXII p.* 91.

(**) *Théorie des phénoménes éléctro-dynamyques p.* 96, 98.

(***) *Mem. cit.*

provarono che l'azione di un cilindro elettro-dinamico o sottile ago magnetico sopra un elemento di corrente elettrica può esser ridotta a due forze agenti in ragione inversa del quadrato della distanza di ciascun polo dell'elemento, ed in ragion diretta del seno dell'angolo compreso tra la direzione dell' elemento di corrente, e la linea che ne misura la distanza dal polo; la direzione di questa forza essendo normale al piano di queste linee. Essendo dunque P il polo magnetico, $ab = ds$ l'elemento di curva percorso dalla corrente, $Pb = r$ la distanza del polo all'elemento, $Pbt = V$ l'angolo che la linea r fa colla tangente in ds, la forza sarà perpendicolare al piano Pbt ed avrà per espressione

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . - \frac{K \sin V \, ds}{r^2}$$

ove K è un coefficiente dipendente dalla intensità della corrente nel filo conduttore, e del magnetismo nell'ago. Il segno negativo si usa supponendo la forza attrattiva. Per l'altro polo si avrà una espressione simigliante con segno opposto, e che per ottenerla basterà accentuare di un apice le lettere V, r, s, K. Prescindendo anche dalle dimostrazioni di Ampère, questa legge fu stabilita da Biot e da Pouillet, mercè una serie di delicate sperienze. Si potrà dunque prendere come più piace o come una ipotesi su cui basare il calcolo, o come una verità già stabilita, e che potrà ad ogni modo ricevere conferma dalle conclusioni che siamo per dedurne.

Per trasformare l'espressione della forza in un'altra più opportuna al calcolo, ci varremo della considerazione seguente. Si immagini una linea retta che avendo una delle sue estremità fissa nel polo P; vada coll'altra radendo continuamente il perimetro della curva MNQ: è chiaro che essa descriverà una superficie conica che sarà generalmente obliqua, avrà il suo vertice in P, e per base la direttrice MNQ, e le distanze notate sopra per r saranno i lati del cono. Immaginando un piano tangente alla detta superficie, questo passerà per uno dei lati e per l'elemento di curva ds a cui quel lato è terminato, cioè passerà per le linee r e ds e la forza del polo essendo

perpendicolare al piano di queste due linee, sarà anche perpendicolare al piano che tocca la superficie conica nel punto b della direttrice.

Sia dunque A (fig. 2) il polo o vertice del cono, ab l'elemento ds della direttrice MNQ, tirando per ba la tangente bt e sopra questa dal vertice A una perpendicolare AP, avremo

$$(2) \qquad AP = Ab \operatorname{sen} AbP = Ab \operatorname{sen} AbT$$

e sostituendo le denominazioni proprie, e facendo AP=A, si avrà

$$(3) \qquad A = r \operatorname{sen} V, \qquad \text{donde} \qquad \operatorname{sen} V = \frac{A}{r}$$

questo valore sostituito in (1) darà per valore della forza

$$(4) \qquad \frac{KAds}{r^3}$$

ove si lascia per ora il segno che si rimetterà a tempo opportuno. Questa formola fu già trovata da Ampère, e la quantità Ads è il doppio dell'area del settore infinitesimale di superficie conica che ha per base ds e per altezza A.

Quando si conosce la curva in cui circola la corrente, ds ed A si determineranno secondo la sua natura, e se chiaminsi x, y, z le coordinate di un punto qualunque della corrente, e p, m, n quelle del polo, prese parallelamente a tre assi rettangolari si avrà

$$(5) \ldots \quad r^2 = (x-p)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2.$$

Per trovare le tre componenti X, Y, Z della forza (4) parallele ai tre assi basterà ricordarsi, che questa è diretta secondo la normale alla superficie conica in ds: se dunque (Nx) (Ny) (Nz) indicano gli angoli fatti dalla normale cogli assi avremo

$$(6) \ldots \quad X = \Phi\cos(Nx), \quad Y = \Phi\cos(Ny), \quad Z = \Phi\cos(Nz).$$

I valori di questi coseni trovansi facilmente mediante la formole analitiche delle normali alle superficie coniche. Sia

$$(7) \qquad \mu = 0$$

l'equazione a questa superficie si avrà

$$(8)\quad \begin{cases} \cos(Nx) = \frac{1}{k'}\cdot\frac{d\mu}{dx},\ \cos(Ny) = \frac{1}{k'}\frac{d\mu}{dy},\ \cos(Nz) = \frac{1}{k'}\frac{d\mu}{dz} \\ \text{essendo} \qquad k' = \sqrt{\left[\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2\right]} \end{cases}$$

Quando la curva è piana, se facciasi passare per questa il piano XY, questa condizione richiede che si faccia $z = 0$ nelle equazioni (8) dopo trovati i valori dei coefficienti differenziali. Questa condizione medesima dà

$$(9)\quad \begin{cases} ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \\ r = \sqrt{[(x-p)^2 + (y-m)^2 + n^2]} \end{cases}$$

preparate così le formole generali veniamo al caso particolare di una corrente circolare.

§. II.

Formole differenziali per le correnti circolari.

Supporremo che la corrente circolare giaccia nel piano XOY (fig. 3) col centro all'origine delle coordinate: l'asse OZ rimane in questo caso perpendicolare al piano del circolo. Sia A il polo della calamita e vertice della superficie conica; AE il lato; calando da A una perpendicolare AB sul piano del circolo, questa sarà l'altezza assoluta del cono, ossia la distanza n del polo al piano delle correnti. Dal piede B della perpendicolare tirando un altra linea BC normale sopra l' asse OY, sarà

$$BC = p\ , \qquad OC = m.$$

Si tiri anche una tangente ET al circolo, e su questa da A si cali un altra perpendicolare AP e si congiunga BP, sarà AP l'altezza del settore conico avente per base $Ee = ds$; devesi trovare il valore di AP che abbiamo già fatto $= A$.

Il triangolo rettangolo ABP dà

$$AP^2 = AB^2 + BP^2:$$

si tiri dal centro del circolo il raggio OE che sarà parallelo a BP, e i due triangoli simili OTE, BTP rettangoli in E e P daranno

$$BP : OE :: BT : TO$$

quindi

$$BP = \frac{OE}{TO} BT = \frac{OE}{TO}(TO - BO) = OE - BO.\frac{OE}{TO}$$

dunque

$$AP^2 = AB^2 + \left(OE - BO.\frac{OE}{TO}\right)^2$$

ora

$$\frac{OE}{TO} = \cos TOE = \cos FOE = \cos(GOE - FOG)$$

l'arco GFE corrispondente all'angolo GOE è la distanza dell' elemento ds dall'asse OY contata sulla circonferenza del circolo, e rappresentando quest'angolo per ω, avremo

$$BO\frac{OE}{TO} = BO\cos(\omega - FOG) = BO\cos\omega\cos FOG + BO\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}FOG,$$

il triangolo rettangolo BOC dà

$$OC = BO\cos FOG\ ,\ BC = BO\operatorname{sen}FOG$$

quindi

$$BO\frac{OE}{TO} = OC\cos\omega + BC\operatorname{sen}\omega = m\cos\omega + p\operatorname{sen}\omega.$$

Sostituendo questi valori nella prima equazione e facendo $= R$ il raggio del circolo sarà

$$A = AP = \sqrt{[n^2 + (R - m\cos\omega - p\operatorname{sen}\omega)^2]}$$

Avremo ancora per valore delle coordinate

$$(1) \qquad x = R\operatorname{sen}\omega\ ,\quad y = R\cos\omega$$

donde si cava

$$(2) \qquad r^2 = R^2 + l^2 - 2pR\operatorname{sen}\omega - 2mR\cos\omega$$

essendosi fatto per brevità

$$(3) \qquad l^2 = m^2 + n^2 + p^2.$$

Il circolo dà inoltre

$$ds = R d\omega$$

per cui l'espressione della forza (4 §. 1) diventa

$$(4) \qquad \frac{kR\sqrt{[n^2 + (Rm\cos\omega - p\,\mathrm{sen}\omega)^2]}.d\omega}{(R^2 + l^2 - 2Rm\cos\omega - 2Rp\,\mathrm{sen}\omega)^{\frac{3}{2}}}$$

Per trovare le componenti di questa forza parallelamente agli assi coordinati basta seguire la regola già data (§. 1). Si prenda l'equazione alla superficie del cono obliquo a base circolare cioè (*)

$$\mu = (pz - xn)^2 + (mz - yn)^2 - r^2(z - n)^2 = 0$$

differenziata questa equazione successivamente per x, y, z e fatto $z = 0$ dopo le differenziazioni abbiamo

$$\frac{d\mu}{dx} = 2n^2x = 2n^2R\,\mathrm{sen}\omega$$

$$\frac{d\mu}{dy} = 2n^2y = 2n^2R\cos\omega$$

$$\frac{d\mu}{dz} = 2n(R^2 - px - my) = 2nR(R - p\,\mathrm{sen}\omega - m\cos\omega)$$

$$k'^2 = 4n^2R^2[n^2 + (R - p\,\mathrm{sen}\omega - m\cos\omega)^2]$$

quindi si dedurranno facilmente i valori dei coseni degli angoli fatti dalla normale cogli assi coordinati, e ne avremo le componenti per tutta la circonferenza della corrente

---

(*) Vedi Moigno traitè de calc. diff. T. I. pag. 422 ed altri autori.

$$(5)\quad \begin{cases} X = -\int \dfrac{knR\,\mathrm{sen}\omega.d\omega}{(R^2 + l^2 - 2Rm\cos\omega - 2Rp\,\mathrm{sen}\omega)^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] Y = -\int \dfrac{knR\cos\omega.d\omega}{(R^2 + l^2 - 2Rm\cos\omega - 2Rp\,\mathrm{sen}\omega)^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] Z = -\int \dfrac{kR(R - m\cos\omega - p\,\mathrm{sen}\omega)d\omega}{(R^2 + l^2 - 2Rm\cos\omega - 2Rp\,\mathrm{sen}\omega)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Gli integrali si prenderanno da $\omega = 0$ a $\omega = 2\pi$. Queste formole sono generali e racchiudono come caso particolare quelle date da Savary pag. 23 della memoria citata. Basterà per ciò fare $p = 0$ e le formole diventano identiche colle sue.

§. III.

Integrazione delle formole differenziali per le correnti circolari.

Gl'integrali delle formole (5) possono ottenersi esattamente per mezzo delle funzioni ellittiche di prima e seconda specie (*). Onde ridurli però a forma più comoda supporremo

$$\frac{p}{m} = \mathrm{tang}\,a$$

quindi avremo

$$p\cos a - m\,\mathrm{sen}\,a = 0$$

facciasi inoltre

$$\omega = 2\psi + a:$$

la quantità sotto il segno radicale

$$R^2 + l^2 - 2R(m\cos\omega + p\,\mathrm{sen}\omega),$$

dopo questa sostituzione, evoluzione e riduzione degli archi

(*) Legendre, Traité des fonctions elliptiques ec. T. 1, p. 255, 257 ed altrove.

doppi a potenze di archi semplici, diventa

$$R^2 + l^2 - 2R(m \cos a + p \operatorname{sen} a) + 4R(m \cos a + p \operatorname{sen} a)\operatorname{sen}^2\psi$$

quivi facendo di nuovo

$$\psi = \frac{1}{2}\pi - \varphi$$

avremo

$$R^2 + l^2 + 2R(m \cos a + p \operatorname{sen} a) - 4R(m \cos a + p \operatorname{sen} a)\operatorname{sen}^2\varphi$$

le due supposizioni precedenti danno

$$\omega = \pi - 2\varphi + a$$

e quindi

$$d\omega = -2d\varphi.$$

Facciasi ora per brevità

(1) $R(m \cos a + p \operatorname{sen} a) = h'$,

(2) $R^2 + l^2 + 2R(m \cos a + p \operatorname{sen} a) = R^2 + l^2 + 2h' = h^2$,

(3) $e^2 = \dfrac{4R(m \cos a + p \operatorname{sen} a)}{R^2 + l^2 + 2R(m \cos a + p \operatorname{sen} a)} = \dfrac{4h'}{h^2}$.

Sostituendo questi valori nei secondi membri degli integrali delle componenti, troveremo

(4) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{(R^2 + l^2 - 2R(m \cos\omega + p \operatorname{sen}\omega))^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\pi} \frac{-2d\varphi}{h^3(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Dalle stesse supposizioni otteniamo pure

(5) $$\begin{cases} \operatorname{sen}\omega = 2\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \cos a - \operatorname{sen} a + 2\operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen} a \\ \cos\omega = -2\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \operatorname{sen} a - \cos a + 2\operatorname{sen}^2\varphi \cos a \\ R(R - p\operatorname{sen}\omega - m\cos\omega) = R[R + (1 - 2\operatorname{sen}^2\varphi)(p\operatorname{sen} a + m\cos a)] \\ \qquad = R^2 + h' - 2h'\operatorname{sen}^2\varphi. \end{cases}$$

Quindi i valori delle tre componenti diventano

$$(6)\quad \begin{cases} X = \int_0^\pi \dfrac{2knR(2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos a - \operatorname{sen} a + 2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen} a)}{h^3\Delta^3} d\varphi, \\ Y = \int_0^\pi \dfrac{2knR(-2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen} a - \cos a + 2\operatorname{sen}^2\varphi\cos a)}{h^3\Delta^3} d\varphi, \\ Z = \int_0^\pi \dfrac{2k(R^2 + h' - 2h'\operatorname{sen}^2\varphi)}{h^3\Delta^3} d\varphi; \end{cases}$$

ove per brevità si è fatto

$$(7)\qquad \Delta = \sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\varphi)}$$

Facendo con Legendre

$$(8)\qquad \int \Delta d\varphi = E, \quad \int \frac{d\varphi}{\Delta} = F$$

Si avrà come è noto

$$(9)\qquad \int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{c^2}(F - E)$$

$$(10)\qquad \int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{b^2c^2}(E - b^2F) - \frac{\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi}{b^2\Delta}$$

ove secondo il solito è

$$(11)\qquad b = \sqrt{(1 - c^2)}, \quad e \quad c = \operatorname{sen}\theta, \quad b = \cos\theta \quad (12).$$

Gli integrali delle formole (6) dovendosi prendere tra i limiti 0 e π i valori di F ed E saranno il doppio delle funzioni ellittiche complete F^1, E^1 che si calcoleranno o colle tavole di Legendre T. II. p. 288 e 222, ovvero colle formole

$$(13)\quad F^1 = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 c^6 \ldots\ldots\right]$$

$$(14)\quad E^1 = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 3c^4 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right) 5c^6 \ldots\ldots\right]$$

Quindi gl'integrali delle formole (6) ridotte ai limiti diventano

$$(15)\begin{cases} X = \dfrac{4kn\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,a}{h^3b^2c^2}[(2-c^2)\mathrm{E}^1 - 2b^2\mathrm{F}^1] \\ \text{Similmente} \\ Y = \dfrac{4kn\mathrm{R}\cos a}{h^3b^2c^2}[(2-c^2)\mathrm{E}^1 - 2b^2\mathrm{F}^1] \\ Z = \dfrac{4k}{h^3b^2c^2}[(\mathrm{R}^2+h')c^2\mathrm{E}^1 - 2h'\mathrm{E}^1 + 2h'b^2\mathrm{F}^1] \end{cases}$$

Queste formole sono per uno de'poli dell'ago, e facile sarà formarne delle simili per l'altro pel quale le costanti saranno diverse. Nel caso più semplice che il mezzo dell'ago magnetico corrisponda col centro del circolo, avremo

$$p = 0, \quad m = \mathrm{L}\cos d, \quad n = \mathrm{L}\,\mathrm{sen}\,d, \quad a = 0 \quad h' = \mathrm{RL}\cos d$$

$$c^2 = \frac{4\mathrm{RL}\cos d}{\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}^2 + 2\mathrm{RL}\cos d}$$

ove L è la metà della lunghezza dell'ago. Vedremo presto il significato dell'angolo ausiliare a e il valore di h.

§. IV.

Formole differenziali per le correnti ellittiche.

Le formole trovate nel § precedente pel circolo sono già tanto difficili a calcolarsi che poca speranza resta di avere risultati semplici per l'ellisse, e molto meno per curve di ordini più elevati. L' ellisse però merita speciale considerazione perchè può con sufficiente accuratezza costruirsi in pratica, ed ha il vantaggio di avvicinare molto le correnti all'ago e così formare circuiti di forma assai prossima alla comune dei galvanometri ordinarii, il che non accade nel cerchio. Finora però credo che poca applicazione potrà farsene in pratica attesa la lunghezza dei calcoli numerici.

Quando la corrente è ellittica, la superficie conica del § 1

sarà pure ellittica, e in generale potrà avere doppia è semplice obliquità, ma noi supporremo che abbia soltanto obliquità semplice, cioè che l'asse del cono giaccia in un piano normale all'ellisse e passante per l'asse trasverso, potendo essere qualunque l'inclinazione dell'asse del cono all' asse maggior della curva.

Con questo veniamo a supporre che l'ago magnetico passi per l'asse maggiore dell' ellisse, ed il suo piano di rotazione sia normale al piano della curva, il che è appunto il caso pratico del galvanometro.

Bisogna primieramente trovare la espressione della perpendicolare A (§. 1) che misura l'altezza del settore infinitesimo di superficie conica, seguendo per ciò un metodo analogo all' usato pel cerchio.

Sia O (fig. 2) il centro dell'ellisse, A il polo, AB l'altezza del cono, TE*t* una tangente alla ellisse in E; tirisi la linea AP=A perpendicolare su la tangente e si congiunga BP; avremo

$$(1) \qquad AP^2 = AB^2 + BP^2$$

si tiri dal centro una linea OM perpendicolare alla tangente, che sarà parallela a BP: i due triangoli rettangoli TOM, TBP daranno

$$BP : OM :: BT : TO$$

quindi

$$BP = \frac{OM.BT}{TO} = \frac{OM}{TO}(TO - BO) = OM - BO\,\frac{OM}{TO}$$

ma dalla teoria dell'ellisse sappiamo che la OM è terza proporzionale dopo il semiasse trasverso b e la normale N cioè

$$OM = \frac{b^2}{N}$$

e che la distanza OT della tangente al centro computata sull'asse delle ascisse è

$$OT = \frac{a^2}{x}$$

a essendo l'asse trasverso dell' ellisse. Sostituiti questi valori

nella (1) e fatto

$$BO = m \ , \quad BA = n$$

avremo

$$A^2 = AP^2 = n^2 + \left(\frac{b^2}{N} - m\,\frac{b^2}{N}\cdot\frac{x}{a^2}\right)^2$$

facendo inoltre

$$a^2 - b^2 = e^2a^2$$

e introducendo il valore della normale nell'ellisse

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - e^2x^2)}\ .$$

il valore di A^2 diventa

$$A^2 = n^2 + \left(\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - e^2x^2)}} - m\frac{b}{\sqrt{(a^2 - e^2x^2)}}\cdot\frac{x}{a}\right)$$

presa l'equazione all'ellisse

$$(2)\ .\ .\ .\ .\qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

e fattovi

$$(3)\qquad x = a\,\mathrm{sen}\varphi\ , \qquad \text{si avrà} \qquad y = b\cos\varphi$$

che è la nota sostituzione circolare. Si sostituisca ora per x questo valore ed avremo

$$A = \sqrt{\left[n^2 + \left(\frac{ab - mb\,\mathrm{sen}\varphi}{\sqrt{(a^2 - a^2e^2\mathrm{sen}^2\varphi)}}\right)^2\right]}.$$

Dalle stesse supposizioni (3) si ha

$$ds = \sqrt{(a^2 - e^2a^2\mathrm{sen}^2\varphi)}.d\varphi$$

dunque

$$(4)\qquad Ads = \sqrt{[n^2(a^2 - e^2a^2\mathrm{sen}^2\varphi) + (ab - mb\,\mathrm{sen}\varphi)^2]}$$

Il valore di r^2 in questo caso avendo riguardo alla posizione

degli assi (*) diventa

$$r^2 = (x-m)^2 + y^2 + n^2$$

e fatto anche qui

$$l^2 = m^2 + n^2$$

e ridotte le coordinate rettangolari a polari per la (3) si ha

$$(6) \qquad r = \sqrt{(b^2 + l^2 - 2am \operatorname{sen}\varphi + e^2a^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}.$$

Quindi la forza esercitata dal polo magnetico su di un elemento di corrente è

$$(7) \qquad \frac{k\sqrt{[n^2(a^2-e^2a^2\operatorname{sen}^2\varphi) + (ab-mb \operatorname{sen}\varphi)^2]}}{(b^2 + l^2 - 2ma \operatorname{sen}\varphi + e^2a^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \, d\varphi$$

Per trovare le tre componenti rettangolari, si prenderà l'equazione alla superficie del cono ellittico

$$(8) \qquad \mu = b^2(mz-nx)^2 + a^2(pz-ny)^2 - a^2b^2(z-n)^2 = 0$$

ove supponendo $p = 0$ come vuole il caso della obliquità semplice, e fatto $z = 0$ dopo le differenziazioni, si avrà

$$\frac{d\mu}{dx} = 2b^2n^2x = 2b^2n^2a\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{d\mu}{dy} = 2a^2n^2y = 2a^2n^2b\cos\varphi$$

$$\frac{d\mu}{dz} = -2b^2mnx + 2a^2b^2n = 2a^2b^2n - 2b^2amn \operatorname{sen}\varphi$$

$$k'^2 = 4n^2a^2b^2[n^2(a^2 - e^2a^2\operatorname{sen}^2\varphi) + (ab - bm \operatorname{sen}\varphi)^2]$$

donde si hanno le componenti

(*) La posizione degli assi è diversa da quella del circolo, come si vede confrontando le fig. 2 e 3, ove ad OX, OY, OZ nella 3 corrisponde OY, OX, OZ. Non si è creduto necessario di conservare la stessa posizione onde non introdurre le formole della ellisse sotto aspetto diverso dall'ordinario.

$$X = -\int_0^{2\pi} \frac{kbn\,\mathrm{sen}\varphi\,d\varphi}{(l^2 + b^2 - 2am\,\mathrm{sen}\varphi + e^2a^2\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Y = -\int_0^{2\pi} \frac{kan\,\cos\varphi.d\varphi}{(l^2 + b^2 - 2am\,\mathrm{sen}\varphi + e^2a^2\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Z = -\int_0^{2\pi} \frac{k(ab - bn\,\mathrm{sen}\varphi).d\varphi}{(l^2 + b^2 - 2am\,\mathrm{sen}\varphi + e^2a^2\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. V.

Integrazione delle formole per la ellisse.

L'integrale

$$T = \frac{d\varphi}{(l^2 + b^2 - 2am\,\mathrm{sen}\varphi + e^2a^2\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

dopo la sostituzione di

$$\varphi = 90 - 2\psi$$

e le debite riduzioni darà

$$T = \frac{-2d\psi}{(l^2 + a^2 - 2am + 4(am - e^2a^2)\mathrm{sen}^2\psi + 4e^2a^2\mathrm{sen}^4\psi)^{\frac{3}{2}}}$$

Faremo per brevità

$$h^2 = a^2 + l^2 - 2am = a^2 + l^2 - 2al\cos d$$

e il denominatore sciolto qual equazione di 2.° grado dà

$$\mathrm{sen}^2\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{am - e^2a^2}{e^2a^2}\right)\left[-1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{h^2e^2a^2}{(am - e^2a^2)^2}\right)}\right]$$

dalla forma di questa equazione vediamo che le radici possono

essere reali ed immaginarie, ma che essendo reali saranno ambedue dello stesso segno, negative o positive secondo che sarà $am >$ ovver $<$ di a^2e^2. Quindi tre casi di integrazione restano a farsi, delle quali indicheremo sommariamente la via (*).

I.° *Caso. Ambe radici negative.*

Indicheremo i valori numerici delle redici per p^2 e q^2 supponendo $p^2 > q^2$. L'integrale T può scriversi

$$T = \frac{-2d\psi}{(2ea)^3[(\text{sen}^2\psi + p^2)(\text{sen}^2\psi + q^2)]^{\frac{5}{2}}}$$

si faccia

$$\text{tang}\psi = \frac{q}{\sqrt{(q^2+1)}}\,\text{tang}\chi$$

e si otterrà

$$(5)\quad \begin{cases} \text{sen}^2\psi = \dfrac{q^2\text{sen}^2\chi}{q^2 + \cos^2\chi}, \quad \cos^2\psi = \dfrac{(q^2+1)\cos^2\chi}{q^2+\cos^2\chi} \\ d\psi = \dfrac{q\sqrt{(1+q^2)}}{q^2+\cos^2\chi}\,d\chi \end{cases}$$

mediante le quali si cava

$$(6)\qquad T_1 = \frac{-(q^2+\cos^2\chi)^2}{(2aep)^3q^2(q^2+1)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{2d\chi}{\Delta^3}$$

essendo al solito

$$\Delta = \sqrt{(1-\gamma^2\text{sen}^2\chi)}, \quad \gamma^2 = \frac{p^2-q^2}{p^2(1+q^2)}$$

II.° *Ambe radici positive.*

Sarà $\qquad 1 > p^2 > q^2.$

(*) Vedi pel resto Legendre op. cit. p. 230. T. I. c. XII.

l'integrale sarà

$$T_2 = \frac{-2d\psi}{(2ea)^3[(\text{sen}^2\psi - p^2)(\text{sen}^2\psi - q^2)]^{\frac{5}{2}}}$$

facciasi

$$(7) \qquad \text{sen}^2\psi = \frac{q^2\text{sen}\zeta}{1 - q^2\cos^2\zeta}$$

e si avrà

$$\cos^2\psi = \frac{1 - q^2}{1 - q^2\cos^2\zeta}$$

e diventerà

$$(8) \qquad T_2 = \frac{-(1 - q^2\cos^2\zeta)^2}{(2eap)^3 q^2 (1 - q^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{2d\zeta}{\Delta^3}$$

ove il modulo è

$$\gamma = \frac{q^2(1 - p^2)}{p^2(1 - q^2)}$$

III.° *Radici immaginarie.*

Si faccia

$$\text{sen}^2\psi = u \pm v\sqrt{-1}$$

e inoltre

$$\sqrt{(u^2 + v^2)} = \mu, \quad \cos\theta = \frac{u}{\sqrt{(u^2 + v^2)}}, \quad \text{sen}\theta = \frac{v}{\sqrt{(u^2 + v^2)}}$$

e i due fattori binomii si ridurranno al trinomio

$$\text{sen}^4\psi + 2\mu\,\text{sen}^2\psi\cos\theta + \mu^2$$

dove sarà $\cos\theta$ positivo o negativo secondo che sarà u negativo o positivo. Quindi T diventa

$$T_3 = -\frac{d\psi}{a^3e^3(\text{sen}^4\psi + 2\mu\,\text{sen}^2\psi\cos\theta + \mu^2)^{\frac{5}{2}}}$$

facendo per brevità

$$(10)\quad \begin{cases} A^2 = 1 + 2\mu\cos\theta + \mu^2 \\ \cos 2\lambda = \dfrac{\cos\theta + \mu}{A}, \text{ donde } \operatorname{sen} 2\lambda = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{A} \end{cases}$$

si ridurrà a

$$T_3 = -\frac{d.\operatorname{tang}.\psi}{(2ea)^3\cos^4\psi(A^2\operatorname{tang}^4\psi + 2A\mu\cos 2\lambda\ \operatorname{tang}^2\psi + \mu^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Facciasi ora

$$(11)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\psi = \sqrt{\dfrac{\mu}{A}}.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma \\ \text{donde} \\ \operatorname{sen}^2\psi = \dfrac{\mu\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\sigma}{A\cos^2\frac{1}{2}\sigma + \mu\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\sigma} = \dfrac{\mu(1-\cos\sigma)}{\mu(1-\cos\sigma)+A(1+\cos\sigma)} \\ \cos^2\psi = \dfrac{A\cos^2\frac{1}{2}\sigma}{A\cos^2\frac{1}{2}\sigma - \mu\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\sigma} = \dfrac{A(1+\cos\sigma)}{A(1+\cos\sigma)+\mu(1-\cos\sigma)} \end{cases}$$

Queste sostituzioni danno per T

$$(12)\qquad T_3 = -\frac{[A(1+\cos\sigma)+\mu(1-\cos\sigma)]^2}{(2ae)^3A^3(A\mu)^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{d\sigma}{\Delta^3}.$$

I limiti sono 0 e 2π e il modulo

$$(13)\qquad \gamma^2 = \operatorname{sen}^2\lambda$$

Ridotto così l'integrale T sarà facile trovare le componenti.

I. Caso. La supposizione $\varphi = 90 - 2\psi$ combinata colla (5) dà

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{(q^2+1)-(2q^2+1)\operatorname{sen}^2\chi}{q^2+\cos^2\chi}$$

$$\cos\omega = \frac{2q\sqrt{(q^2+1)}\,.\cos\chi\,\operatorname{sen}\chi}{q^2+\cos^2\chi}$$

$$ab-bn\operatorname{sen}\omega = \frac{(ab-nb)(q^2+1)-[ab-(2q^2+1)bn]\operatorname{sen}^2\chi}{q^2+\cos^2\chi}$$

combinando questi valori con quelli di $T_1(6)$ avremo

$$X = \int_0^\pi \frac{2kbn[(q^2+1)-(2q^2+1)\operatorname{sen}^2\Delta](q^2+\cos^2\chi).d\chi}{(2eap)^3q^2(q^2+1)^{\frac{5}{2}}.\Delta_3}$$

$$Y = \int_0^\pi \frac{4kanq}{(2eap)^3q^2(q^2+1)^2}.\frac{\operatorname{sen}\chi\cos\chi(q^2+\cos^2\chi).d\chi}{\Delta^3}$$

$$Z = \int_0^\pi \frac{2k[(ab-bn)(q^2+1)-(ab-(2q^2+1)bn)\operatorname{sen}^2\chi](q^2+\cos^2\chi).d\chi}{(2eap)^3q^2(q^2+1)^{\frac{5}{2}}.\Delta^3}$$

Il valore di Y svanisce ai limiti come vuole la simmetria della figura del conduttore relativamente all'ago. Questi valori devono esser ridotti a forma più semplice riducendo i coseni a seni ed eseguendo le debite divisioni algebriche. Fatto questo si integreranno mediante le funzioni ellittiche, ed avrassi per risultato

$$(13)\quad \begin{cases} X = 2Q\left[\left(\frac{M-N}{\gamma^4}\right)F^1 - \left(\frac{N}{\gamma^4}-\frac{P}{\beta^2}\right)E^1\right] \\ Z = 2Q\left[\left(\frac{N'-M'}{\gamma^4}\right)F^1 - \left(\frac{M'}{\gamma^4}-\frac{P'}{\beta^2}\right)E^1\right] \end{cases}$$

nelle quali

$$Q = \frac{2kbn}{(2aep)^3 q^2 (q^2+1)}, \quad \beta = 1 - \gamma^2, \quad g = q^2 + 1$$

$$M = q^2 + g, \qquad N = 2gq^2\gamma^2 - (q^2 + g)$$

$$P = 2gq^2\gamma^2 - (q^2 + g) + \gamma^4 g$$

$$M' = ab - (q^2 + g)bn$$

$$N' = [1 - \gamma^2(g^2 + 1)]\,[ab - (q^2 + g)bn]$$

$$P' = [\gamma^4 - 1 + \gamma^2(g^2 + 1)]\,[ab - (q^2 + g)bn].$$

II. Il secondo caso facilmente si risolve operando come nel precedente quindi passiamo al terzo.

III. Radici immaginarie. La supposizione $\varphi = 90^\circ - 2\psi$ combinata colla (11) darà

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{A(1 + \cos\sigma) - \mu(1 - \cos\sigma)}{A(1 + \cos\sigma) + \mu(1 - \cos\sigma)}$$

$$\cos\omega = \frac{\sqrt{A\mu} \,.\, \operatorname{sen}\sigma}{A(1 + \cos\sigma) + \mu(1 - \cos\sigma)}.$$

Fatte queste sostituzioni nei valori delle componenti, e integrati i termini, si vedrà che Y svanisce ai limiti, e le altre due componenti sono ancor esse composte di due parti, una delle quali similmente svanisce ai limiti, l'altra si integrerà per funzioni ellittiche e darà

$$(14)\begin{cases} X = \dfrac{kbn(A^2 - \mu^2)}{2(ae)^3 (A\mu)^{\frac{5}{2}}}\left(\dfrac{1}{\beta^2}E^1 + \dfrac{1}{\gamma^2}(F^1 - E^1)\right) \\[2ex] Z = \dfrac{k}{2(ae)^3 (A\mu)^{\frac{5}{2}}}\left[(fA^2 + f'\mu^2)\left(\dfrac{1}{\beta^2}E^1 + \dfrac{1}{\gamma^2}(F^1 - E^1)\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{2A\mu ab}{\beta^2\gamma^2}(E^1 - \beta^2 F^1)\right] \end{cases}$$

nelle quali per brevità si è fatto

$$f = ab - bn\,, \quad f' = ab + bn$$

Queste formole esigono tal lunghezza di calcolo numerico che difficilmente può trarsene utilità in pratica; sarà però sempre bene il conoscerle, almeno per tentare se in qualche caso siano suscettibili di maggiore semplicità per le applicazioni.

§. VI.

Discussione delle formole, ed equazione di equilibrio di un ago magnetico.

Le formole (15. §. III) e (13. 14. §. V) contengono sotto forma finita l'espressione della forza esercitata da una corrente elettrica circolare, ed ellittica sopra un polo magnetico, quindi è facile inferirne l' equazione di equilibrio di un ago calamitato sospeso presso uno di tali conduttori, ovvero quella di un circolo mobile, come sarebbe l'anello galleggiante di De la Rive soggetto all'azione di una verga magnetica. Il primo caso però essendo il più interessante, verrà discusso pienamente lasciando a parte il secondo dell' anello galleggiante. Così pure supporremo per ora la corrente circolare, e l'ago situato comunque relativamente al circolo stesso. L'equazione completa d' equilibrio, oltre le tre componenti sopradette, deve contenere le componenti della forza magnetica terrestre, della gravità e della forza di torsione quando l'ago sia sospeso da un filo, ma si farà astrazione dalle due ultime che del resto non sarebbe difficile l'includervele.

Prima però di procedere a trovare l'equazione bisogna conoscere il significato dell'angolo ausiliario a (§. III). A questo effetto si proietti la linea l sul piano YOX (Fig. 3), sia s la lunghezza della proiezione, ed u l'angolo fatto coll'asse delle Y contato venendo verso il basso, avremo

$$m = s\cos u\,, \quad p = s.\sin u\,, \quad \frac{p}{m} = \tang u$$

dunque $u = a$, ed a è l'angolo fatto dalla proiezione di L sul piano XY coll'asse OY. Questa quantità è dunque di significato noto. Quindi h è la distanza del polo dal punto G' opposto a G.

Di qui apparisce che le componenti X, Y, Z danno una risultante diretta dal polo al centro, e che le due X, Y che agiscono parallele al piano XOY hanno una risultante parallela alla proiezione s il cui valore è

$$\frac{4knR}{h^3b^2c^2}[(2 - c^2)E^1 - 2b^2F^1]$$

Per trovare più speditamente le equazioni di equilibrio dell'ago, si trasporti l' origine dei piani coordinati da O (fig. 5) a C punto di mezzo dell'ago, che supporremo fisso, intorno a cui però l' ago possa girare senza attrito : supporremo ancora i nuovi assi paralleli ai primi, e che l' asse OX sia normale al piano di rotazione dell' ago; sia DE la intersezione del piano della corrente col piano di rotazione dell'ago, x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto O relativamente a C.

L la metà della lunghezza dell'ago CA

d l'angolo di deviazione dell'ago dal piano del circolo, ovvero, il che torna lo stesso, dal piano XOY parallelo ad esso; avremo

$$z_0 = CH\,,\ y_0 = HG\,,\ x_0 = OG$$

quindi si ottiene per un polo

$$m = GK = HK - HG = CL - HG = L\cos d - y_0$$

$$n = KA = LA - LK = L\operatorname{sen} d - z_0$$

$$p = OG = x_0$$

e similmente per l'altro

$$m' = DG = L\cos d + y_0$$

$$n' = BD = L\operatorname{sen} d + z_0$$

$$p' = x_0\ .$$

Per fissare ancora più le idee supporremo che l'ago sia un semplice ago di declinazione perfettamente orizzontale, e che così il piano delle correnti sia verticale. In questa ipotesi sia T l'intensità del magnetismo terrestre parallelamente al meridiano magnetico, le componenti di questa forza che sollecitano un polo parallelamente ad OZ e OY sono

$$T\text{sen}d', \quad T\cos d'$$

le quali saranno eguali per ambi i poli se la calamita ha egual forza, se no bisognerebbe contraddistinguere con una lettera al piede di T le forze de'rispettivi poli; ma anche da questo pel momento faremo astrazione. Converrà però marcare con lettere a, b piccole il piede di X, Y, Z componenti che appartengono a ciascuno dei poli australe e boreale.

Le equazioni di equilibrio nel caso nostro in cui non supponiamo possibile inclinazione dell' ago si riducono all' unica che nella statica determina la condizione di equilibrio di un corpo mobile attorno ad un asse fisso, basterà dunque moltiplicare la somma delle componenti parallele agli assi OZ, OY prese coi rispettivi segni per la distanza del punto di applicazione, cioè del polo, a ciascun asse, le quali sono Lsend, ed Lcosd: avremo dunque

$$L\text{sen}d[2T\cos d' - (Y_a + Y_b)] - L\cos d\,[(Z_a + Z_b) - 2T\text{sen}d'] = 0$$

equazione cercata, che però bisogna mettere sotto forma più comoda. A questo fine si sostituiranno in Y i valori trovati di sopra per n, n'. Di più dovremo ricordarci che atteso il valore di $\cos a$ i due valori della componente Y_a, Y_b avranno segno opposto ogni qualvolta il piano del circolo passi tra i poli dell'ago; in questo caso facendo

$$Q = \frac{4kR}{h^3b^2c^2}\cos a(2E' - 2b^2F' - c^2E)$$

sarà

$$Y_a + Y_b = Q_a(L\text{sen}d - z_0) - Q_b(L\text{sen}d + z_0)$$
$$= (Q_a - Q_b)L\text{sen}d - (Q_a + Q_b)z_0$$

quindi l'equazione di equilibrio diventa

$$(4) \quad 2T\text{sen}(d + d') = (Z_a + Z_b)\cos d + (Q_a - Q_b)L\text{sen}^2 d - (Q_a + Q_b)z_0 \text{sen} d.$$

Se NS (fig. 6) rappresenta la intersezione del meridiano magnetico col piano di rotazione dell' ago, DE quella del piano della corrente circolare, col piano stesso, ed AB l'ago, sarà

$$NCD = d', \quad ACD = d.$$

La formola (4) può anche applicarsi all'ago di inclinazione purchè invece della linea meridiana si prenda la linea di inclinazione, e si dispongano le correnti perpendicolari al piano di rotazione dell'ago.

Se si volesse tener conto anche della inclinazione prodotta dalla corrente nell'ago sospeso su un perno, bisognerà trovare le tre equazioni necessarie per l' equilibrio di un corpo ritenuto da un punto fisso; ma tali ricerche non essendo necessarie al nostro scopo le omettiamo.

La formola (4) diventa assai semplice quando l' ago ha il suo punto di mezzo sul diametro verticale del cerchio, perchè allora

$$Z_a = Z_b, \quad Q_a = Q_b, \quad z_0 = 0$$

Quindi diventa

$$(5) \qquad T\text{sen}(d + d') = Z\cos d$$

ove Z è la funzione nota (§. III (15)) di L, d, *p*. R. Se inoltre la corrente coincide col meridiano magnetico sarà $d' = 0$ la formola diventa

$$(6) \qquad T\text{tang} d = Z.$$

Se anche quando la corrente fa un certo angolo noto d' col meridiano magnetico, noi vogliamo servirci della deviazione D' dell'ago dal meridiano sarà $d = D' - d'$ quindi la (5) dà

$$(7) \qquad T\text{sen}D = Z\cos(D' - d')$$

Queste ultime formole contengono la teoria del galvanometro, e specialmente dei due strumenti noti sotto il nome

di *Bussola dei seni* e di *Bussola delle tangenti*. Esse possono anche applicarsi al caso delle correnti ellittiche, purchè il mezzo dell'ago stia nel centro dell'ellisse, e si ricordi che deve allora chiamarsi X la corrente qui notata per Y. Ma è oramai tempo di passare alla discussione sperimentale delle formole sin qui esposte, il che faremo nella 2.ª parte.

PARTE II.

§. VII.

Applicazione delle formole agli esperimenti.

La verificazione delle formole trovate nel §. precedente è assai facile considerata in astratto, ma in pratica si trova soggetta a non piccole difficoltà. Supponendo il circolo in cui corre la corrente elettrica situato nel piano del meridiano magnetico e il punto medio di sospensione dell' ago nel piano del circolo ad una distanza p dal centro, la formola (6) somministra una espressione della forma

$$T \operatorname{tang} d' = kf(p, d) \quad (m)$$

che per un altra posizione diventa

$$T \operatorname{tang} d = kf(p', d')$$

donde si cava

$$\frac{\operatorname{tang} d}{\operatorname{tang} d'} = \frac{f(p, d)}{f(p', d')}$$

Quindi si vede che misurati gli angoli di deviazione dell' ago prodotta nei due casi dalla stessa corrente elettrica, e calcolati i due membri della equazione separatamente se questi riescono identici la formola sarà dimostrata giusta. Pure in pratica questa verificazione si trova difficile, perchè onde ottenere valori di d abbastanza differenti bisogna far variare notabilmente p, e questo non può farsi con aghi lunghi senza usare apparato assai complicato, e coi corti riesce assai difficile il misurare esattamente gli angoli d, d'. Di più trattandosi prin-

cipalmente di scoprire le cause delle ineguaglianze osservate negli esperimenti fatti l'altra volta pel sig. Plana era mestieri seguire a un dipresso il medesimo metodo d'operazioni usato in quelli. Allora io non conosceva la forma della funzione f espressa per d e p, quindi mi fu necessario andare per altra via, cui poscia ho trovato più semplice ed accurata in pratica anche dopo scoperta la formola. Essa è la seguente.

Qualunque possa essere la forza esercitata di una corrente sopra l'ago, sarà sempre espressa da

$$kf$$

essendo k l'intensità della corrente, ed f una funzione dipendente dalla posizione relativa dell'ago e della corrente; cambiando posto all'ago la forza varierà, e la precedente espressione diventerà

$$kf' :$$

ora le due forze possono rendersi facilmente eguali cambiando opportunamente l'intensità k della corrente, e questa eguaglianza avrà luogo quando in amendue i casi viene equilibrata la medesima forza del magnetismo terrestre Ttangd, ossia quando l'ago magnetico è deviato dal suo piano meridiano di un egual numero di gradi. In questo caso sarà

$$kf = k'f' \qquad \text{donde} \qquad k : k' = f' : f.$$

Così tutta la difficoltà è ridotta a determinare il rapporto della intensità della corrente che corrisponde ai due posti. Questo può farsi facilmente mediante le formole di Ohm e gli strumenti ideati da Wheatstone. Dalla teoria di Ohm sappiamo che le forze elettriche ossia le intensità k, k' della corrente sono in ragione inversa delle *resistenze totali* del circuito voltiano, quindi notando per ρ, ρ' le resistenze totali nei due nostri casi avremo

$$\frac{k}{k'} = \frac{\rho'}{\rho}$$

combinando questa equazione colla precedente avremo

$$\frac{f}{f'} = \frac{\rho}{\rho'}$$

cioè le funzioni cercate saranno in ragione diretta delle resistenze totali del circuito. Le resistenza totale di un circuito voltiano comprende la resistenza dell'elettromotore e quella di tutti i fili per cui passa la corrente. Tutte queste resistenze devono essere ridotte ad una unità di misura comune onde così avere quella che Ohm chiama *lunghezza ridotta del circuito.*

La lunghezza del circuito nelle nostre esperienze dovrà essere composta di due parti : la prima costante, ed eguale alla resistenza della pila ed altri fili invariabili, l'altra variabile ed eguale al numero de'giri del reostato. Chiamando la resistenza costante R la variabile x, avremo

$$\frac{f}{f'}=\frac{R+x}{R+x'}$$

Il valore di R si determina col metodo di Wheatstone, come vedremo appresso , dopo data una succinta descrizione degli strumenti.

§. VIII.

Descrizione degli strumenti usati nelle esperienze.

Gli strumenti usati in queste ricerche sono i seguenti :

1.° Un elettromotore a forza costante.

2.° Uno o più Galvanometri moltiplicatori.

3.° Un reostato e suoi accessorii.

4.° Un circolo o un globo attorno a cui sono avvolti i fili in cui circola la corrente.

5.° Un ago magnetico.

1.° L'elettromotore adottato è stato quello di Daniell prima con diaframma di vescica e poi con diaframma di tela da vele preparata convenientemente onde impedire l'endosmosi. Questa preparazione semplicissima consiste in ispalmare il sacchetto di tela con una poltiglia piuttosto fitta di calce e farina in parti eguali all'incirca. Questa applicata diligentemente colle mani dentro e fuori al sacchetto lo rende impermeabile al solfato di rame in modo che avendo tenuta una pila in azione per tre giorni sempre al massimo di forza, la soluzione

di sale comune entro il sacchetto si trovò bianchissima e lo zinco pulitissimo; onde opera molto meglio delle vesciche. Inoltre ha il vantaggio che i sacchi e conseguentemente le piastre possono farsi di qualunque dimensione, e offre assai minor resistenza alla corrente che la terra porosa (*). In applicare la detta poltiglia bisogna avere l'avvertenza che non resti troppo grosso lo strato perchè screpolerebbe, e inoltre di lasciarla asciugare bene prima di adoprarla la prima volta. La soluzione di solfato di rame l'abbiamo sempre conservata satura mercè di pezzetti di sale riposti nei becchetti delle cassette di rame, e abbiamo sempre messo lo zinco nel sacchetto con soluzione

(*) Avendo un grande elemento alla Wollaston il cui zinco era 4 piedi quadrati, lo armai alla Daniell con un sacco conveniente così preparato, e sono riuscito ad avere con esso solo la scomposizione dell'acqua acidula coi fili di platino. Questo fatto prova che la grandezza delle superficie contribuisce alla intensità della corrente più di quello che comunemente si crede, il che ha già in altro caso dimostrato il sig. Mattenucci. Il Sig. Wheatstone con cui parlai di questo risultato mi obiettò che poteva nascere forse da un poco di sale di rame o altro metallo sciolto nell'acqua, e che depositato sui reofori producesse tale eterogeneità da renderli equivalenti a fili di ferro o di zinco. A questo posso rispondere che la soluzione fu preparata direttamente versando l'acido del commercio nell'acqua comune, e che perciò era pura quanto può ordinariamente desiderarsi, e che i fili rimasero pulitissimi come erano. Di più un elemento piccolo provato non produsse veruno effetto, mentre il grande produceva gallozzole assai numerose visibilissime sorgenti in serie non interrotta, onde immediatamente appena immerso appariva la scomposizione copiosissima. A prova di tal forte tensione posso anche allegare che da questo solo elemento restando lo stesso il giro de' conduttori ottenni tanta forza magnetica in un elettromagnete (cioè 2400 libre grosse inglesi) quanta ne avea avuto da una pila pure alla Daniell di 40 coppie il cui zinco era un quadro di 8 pollici di lato disposta in otto serie di parallele di 5 coppie l'una; come pure ottenni una egualmente forte rotazione del piano di polarizzazione (di 16°) da un bel parallelepipedo di vetro pasante di Faraday. Questi belli apparati appartengono al collegio di Georgetown D. C. negli Stati-Uniti di America.

satura di cloruro sodico. La forza l'abbiamo trovata poco inferiore a quella che si aveva usando acido solforico diluito, ed abbiamo invece ottenuto maggior costanza, l'endosmosi essendo allora impedita anche dall'eguaglianza di peso specifico delle due soluzioni. Usando le debite cautele di supplire il solfato di tanto in tanto sono riuscito a tenere costante l'azione di questa pila per quattro giorni con una diminuzione l' ultimo giorno di appena due gradi, la resistenza del circuito essendo solo 2 metri di filo di rame del diametro di 1 , 5; millim. e senza nessuna attenzione si conserva tale per 8 o 9 ore anche quando gli elementi sono 40 o 50. Abbiamo scelta questa pila dopo un lungo ed accurato studio ed esperienze su l' andamento di tutte le altre pile note. Quelle di Grove e Bunsen sono più forti proporzionatamente all'estensione loro, ma certamente men costanti. Possiamo quindi stare sicuri che durante le esperienze la forza della corrente non ha variato. Ad assicurarci meglio di tale costanza si teneva un galvanometro, nel circuito che si osservava prima e dopo di ogni serie di esperienze, e questo si è sempre veduto invariabile. Per evitare gli errori che potessero prodursi dalle fluttuazioni della corrente all'aprirsi e chiudersi del circuito, o al variare della resistenza, si avea cura sempre di aspettare qualche minuto a prendere le deviazioni dopo che tutti gli aghi erano divenuti stazionarii.

2.° I galvanometri tenuti nel circuito erano di quelli di Nobili con aghi leggieri ed imperfettamente astatici, e talora non astatici affatto. Si sono preferiti questi aghi corti e leggieri come quelli che sono più pronti nelle loro indicazioni. Le loro oscillazioni venivano smorzate da un disco di puro rame posto sotto il quadrante. Ogni ago portava un filo finissimo di vetro che serviva di indice onde legger le divisioni del quadrante che era di diametro notabilmente maggiore della lunghezza degli aghi. Le graduazioni inoltre si miravano mediante un microscopio portato dal fondo superiore della campana che copre lo strumento. Possiamo assicurare che le letture erano sicure per $^1/_{40}$ di grado, il che corrispondeva ordi-

nariamente a un decimo di giro di reostato quando mediocri resistenze entravano nel circuito, onde può dirsi che tale sia il limite dell'errore commesso nelle misure delle resistenze costanti. Tutti i galvanometri erano sostenuti da mensole fisse al muro e lontani l'uno dall'altro notabilmente.

3.° Il Reostato è nota invenzione di Wheatstone (*). Consiste di due cilindri uno di metallo e l'altro di legno lavorato a vite in tutta la sua lunghezza, essi sono posti su di un telarino comune, e congiunti da un filo sottile di metallo, il quale può avvolgersi all'uno, o all'altro dei due come piace, e così variare la resistenza del circuito. Alle molle che mottono in comunicazione i capi dei cilindri ho sostituito due truogoletti di mercurio, che non può produrre correnti per frizione, nè sporcarsi e così impedire il passaggio alla corrente. Il diametro del cilindro di legno del nostro reostato era tale che ogni giro del filo di rame equivaleva a 15 centim., il diametro del filo era $^3|_{10}$ di millimetro. Questa grossezza fu scelta apposta non tanto piccola per evitare gli errori provenienti dall'elevaziene di temperatura nel filo. Siccome la lunghezza del filo del reostato non bastava a misurare tutte le resistenze, così si sono fatti varii rocchelli dello stesso filo le cui resistenze erano in progressione aritmetica tra di loro, e poteva introdursi a piacere quello che bisognava. Per fare tali congiunzioni più sicure e spedite furono cavati 8 fori in un parallelepipedo di legno duro inverniciato, e in questi ripieni di mercurio furono messi i capi dei fili di detti rocchelli di resistenza, e per mezzo di un ponticello metallico grosso che connetteva or l'uno or l'altro di detti fori si inchiudeva o escludeva quella resistenza che si voleva. Onde evitare gli errori che potessero provenire dall'essere più o meno filo immerso nel mercurio, i capi del filo de'rocchelli erano terminati da

(*) Archiv. de l'electr. T. IV. n. 13. 1844. p. 102. — Description de plusieurs instruments et procedès nouveaux pour détérminer les constantes d'un circuit voltaique.

filo del diametro di 2 millim. Per determinare la resistenza de'rocchelli, del filo del galvanometro, della pila ec. si è seguito in tutto e per tutto il metodo di Wheatstone.

4.° Il circolo intorno cui correvano le correnti elettriche era fatto di legno fino avvolto a più doppi onde conservasse più facilmente la sua forma; era grosso circa 7 millimetri largo 23 e di 450 di diametro: maggior grossezza non poteva adoperarsi per non impedire il necessario avvicinamento dell' ago alle correnti. Nelle esperienze fatte sul globo, questo fu costruito in simil guisa di cerchi di legno sottile congiunti da piccoli archi in modo che i fili si potessero avvolgere su la superficie di due fusi sferici opposti comprendenti all'equatore un arco di 60°. Il filo avvolto al circolo era coperto di seta, avea un diametro di mezzo millim., faceva 38 giri disposti in due strati uno sovrapposto immediatamente all'altro, e la zona formata dai fili era larga 10 mill. Attorno al globo era avvolto un filo pure coperto di seta di 1 mill. di diametro lungo 100 metri, e che faceva circa 68 giri. La superficie coperta da questi fili tutti incrociantisi ai poli del globo era appunto, come abbiam detto quella di due fusi sferici opposti di 60° gradi all' equatore. Il volume o fascio dei fili sovrapposti ai poli essendo grosso 6^{mm} fu supposto, che il loro centro di azione o polo stesse a 2 millim. dentro di esso, e con tale supposizione si contò il diametro polare del globo = 450^{mm}. Nel raggio dato del circolo si è pure computata la semigrossezza dello strato dei fili che lo circonda. Vedremo in appresso come tutti questi elementi siano di grande importanza per l'applicazione del calcolo. Il circolo ed il globo furono ambedue collocati sopra un robusto treppiede di legno solidissimo costruito apposta a tal uso, onde avere tutti i movimenti necessarii nelle esperienze. Il primo movimento è di basso in alto: questo si ottiene girando una madrevite collocata tra le gambe del treppiede, e che innalza il piccolo tavolino su cui sta fissato il globo o il circolo. Questo meccanismo è simile a quello usato negli osservatorii, onde sollevare facilmente i grandi strumenti meridiani per rovesciarli.

Per ottenere gli altri due da Est a Ovest, e da Sud a Nord ciascuno indipendentemente dall'altro, il globo è fissato immediatamente tra le braccia di una squadra, il cui braccio inferiore orizzontale può scorrere ad incastro tra due guide, e così esso può andare da Nord a Sud. La tavola poi che porta queste due guide è ancor essa scorrevole tra due altre guide messe perpendicolarmente alle prime fissate alla tavola principale, e così il globo si può muovere da Est a Ovest. Era necessario avere tali movimenti esatti e pronti, onde non ispostare lo strumento quando passavasi da una serie di osservazioni su di un diametro a quelle da farsi su di un altro.

5.° L'ago magnetico destinato a misurare l' intensità della azione delle correnti era un piccolo ago galvanometrico lungo 40 millim. sospeso ad un filo di seta tolto dal bozzolo. Il suo sostegno era una specie di squadra di legno attaccata al muro: il braccio verticale della quale essendo mobile su due cardini simili a quelli d' una porta permetteva qualunque movimento fosse necessario nel piano dell'orizzonte : e questi cardini stessi essendo fissati su di una tavola che poteva scorrere tra due guide verticali fatte in una tavola inchiodata al muro, veniva così permesso di fare tutti i movimenti necessarii per alzarlo od abassarlo. Il braccio orizzontale della squadra era terminato da robusta spranga di ottone lunga un piede circa , che alla sua estremità portava una piastra di rame di 7 centimetri di diametro su cui era fissata la graduazione del circolo per misurare le deviazioni dell'ago, e accanto a questa una piccola colonnetta pure di ottone che sosteneva il piccolo braccio da cui pendeva l'ago magnetico, ed insieme uno specchietto inclinato all'orizzonte di 45° che dava una immagine verticale dell' ago e del circolo. Questa immagine così riflessa veniva guardata con un telescopio a distanza di circa 3 metri, e con ciò sufficientemente ingrandita, da rendere visibili le minime variazioni dell'ago. Lo spediente di usare lo specchio ed il cannocchiale, onde guardare la posizione dell'ago venne suggerito dalla difficoltà di non potere vedere bene direttamente l' ago per l'impedimento del circolo di legno intorno a cui girano le

correnti, e dentro cui esso doveva stare. Si trovò poscia che questo spediente era vantaggiosissimo non solo per evitare l' errore di parallasse nella lettura de'gradi, ma anche per stare a distanza sufficiente dall'ago, e comodamente vicino al reostato, e all' altro galvanometro destinato a far fede della costanza della corrente. Mercè di tale disposizione l' osservatore tenendo l'occhio al canocchiale può muovere a suo agio il reostato e variare la resistenza finchè la deviazione dell'ago dentro il globo o il circolo sia diventata esattamente quale deve essere, e insieme dare a suo tempo un occhiata se punto è cambiata la costanza della corrente. Così gran tempo si risparmia, e una serie completa di esperienze rare è che duri più di un' ora : quindi si rendono le osservazioni indipendenti dalla variazione di forza della corrente stessa, se mai ve ne fosse alcuna.

Conosco bene che è difficile intendere il complesso di tanti apparati senza figure, ma spero che in altre circostanze, se mi verrà dato di ritornare su questo soggetto potrò illustrare il già detto con opportuni disegni. Pertanto, il giro ordinario della corrente era costantemente il seguente : Dalla pila al galvanometro di fiducia, indi al reostato e rocchelli di resistenza, poscia al globo o circolo di cui devesi esplorare l' azione, e finalmente di ritorno alla pila stessa. Questi esperimenti di loro natura assai delicati esigevano somma attenzione, e noi non abbiamo mancato di usare la massima che potevamo, tuttavia conosciamo che molto resta ancora a fare. Affinchè chi ha più mezzi possa ripigliare più comodamente il soggetto descriveremo qui particolarmente il metodo seguito in ogni esperienza e calcolo, e ciò servirà ancor di criterio, onde giudicare qual fiducia possa aversi nei risultati.

§. IX.

Descrizione delle esperienze.

Ogni serie di esperimenti comincia dal determinare accuratamente la *resistenza costante* R del circuito. Il metodo è il seguente. Fissata ad arbitrio una conveniente deviazione del

galvanometro di fiducia si nota diligentemente, indi si prende un filo di cognita resistenza r, e si immergono i suoi capi nei due pozzetti stessi del parallelepipedo di legno, in cui sono immersi i capi del filo del galvanometro; con ciò la corrente che prima passava tutta pel galvanometro resta divisa per due vie, e conseguentemente cala la deviazione dell'ago. Ridotto l'ago stazionario si nota la sua deviazione; indi si toglie il filo derivante r, e si svolgono giri di filo dal reostato in tanto numero r' che l'ago ritorni esattamente alla deviazione che avea quando la corrente era divisa: detta allora g la resistenza del galvanometro e ρ un numero arbitrario di giri svolti, esistenti già quando la corrente era divisa, si avrà

$$R = \frac{rr'}{g} - \rho + g \, .$$

La dimostrazione di questa formola è data da Wheatstone nella citata memoria.

ESEMPIO

Deviazione fondamentale	Galv. 80°	Reostato	6 giri
Corrente divisa	76° . . .	»	6. 0
Corrente non divisa	idem . . .	»	11. 7

Giri aggiunti	$r' =$ . . .	5. 7
Resistenza del filo derivante . .	$r =$ . . .	20. 5
Resistenza del Galvanometro . .	$g =$ . . .	6. 4

Resistenza $= \frac{rr'}{g}$	$=$ . . .	18. 4
Sottrattine i giri del reostato ρ .	$=$ . . .	6. 0

Resistenza	$R =$ . . .	12. 4
Aggiunto	$g =$ . . .	6. 4
Resistenza costante	$R =$ . .	18. 8

Siccome in questo metodo un non piccolo errore può nascere da qualche inesattezza occorsa nella determinazione di r e g, perciò si prese l'espediente di fare $r = g$. A questo effetto si mise attorno al galvanometro un filo di rame della stessa grossezza e lunghezza, e tolto da uno stesso rocchello che il filo derivante r, con ciò si risparmiò il calcolo, e si ebbe semplicemente

$$R = r' - \rho + g.$$

Che se per determinare g accuratamente non abbiasi un altro galvanometro (come suppone Wheatstone), nè si possa cambiare ad arbitrio il suo filo, potrà determinarsi facilmente il rapporto $\frac{r}{g}$ nella maniera seguente. Facciansi due esperienze come si è detto sopra, per determinare R introducendo nei due casi un numero diverso di giri ρ, ρ_1 si avranno queste due equazioni $\left(\text{fatto } \frac{r}{g} = f\right)$

$$R - g + \rho = fr', \qquad R - g + \rho_1 = fr'_1$$

quindi

$$f = \frac{\rho - \rho_1}{r' - r'_1} \quad \text{e perciò} \quad g = \frac{r}{f}$$

determinando f con molti esperimenti fatti a questo modo, le differenze sono salite appena a un decimo di giro del reostato, quando i numeri ρ, ρ' non erano diversissimi.

La seconda cosa da fare, è di determinare esattamente la deviazione d dell'ago magnetico, che deve servire ad esplorare l'azione della forza della corrente. La piccolezza del circolo graduato (poco più che 6 centim. di diametro) unito alla difficoltà di collocare l'ago perfettamente nel centro della graduazione, rende una tale determinazione assai difficile. Per ottenere però la maggior accuratezza possibile fu adottato il metodo seguente.

Collocato l'ago perfettamente nel centro della corrente circolare già precedentemente disposta nel piano del meridiano magnetico,

1.° Si osservano diligentemente i punti della graduazione a cui corrispondono gli estremi dell'ago, prima che facciasi correre la corrente pei fili.

2.° Si fa quindi circolare la corrente, e se ne regola la forza finchè abbiasi una deviazione quale bisogna, nel che si ha cura che l' ago sia ad una esatta divisione del lembo, si notano le posizioni di ambi i capi, e si prende il medio di queste indicazioni, che evidentemente sarà la deviazione quale avrebbesi se l'ago stesse perfettamente nel centro:

3.° Si rovescia quindi la corrente, e senza variare punto la sua intensità si nota la posizione a cui corrisponde l'ago dall'altro lato del meridiano: anche quì si prende la media delle due posizioni relative alla situazione di equilibrio.

4.° Si prende il medio delle due deviazioni così trovate, e questa prendesi per deviazione da servire di base ai calcoli.

ESEMPIO

Posizione di equilibrio dell'ago	Polo	S	6°. 50′
		N	181°. 15′
Corrente diretta (N deviaz. E)	Polo	S	31 . 00
		N	207 . 30
Corrente inversa (N. deviaz. O)	Polo	S	343 . 05
		N	155 . 30
Quindi per la deviazione E	Polo	N	26°. 15′
		S	24 . 10
Media		E	25 . 13
Per la deviazione O	Polo	N	25°. 45′
		S	23 . 45
Media		O	24 . 45

Media di tutte d = 24° 59′, e senza sensibile errore 25°. Se la cortezza dell'ago rende difficile la determinazione della devia-

zione, vi è per altra parte il compenso, che un errore anche di un grado è poco sensibile nei risultati, il che non accadrebbe se l'ago fosse lungo.

Determinata così la deviazione fondamentale dell'ago a cui vuol farsi la serie di esperienze, si rimette la corrente diretta e si contano esattamente i giri del reostato e loro frazioni, che sommate colla resistenza costante danno la resistenza totale al centro per la deviazione d. Quindi si muove tutto l' apparato del globo, e si solleva il tavolino che lo porta girando la madrevite che sta tra le gambe del treppiede, e si conduce lentamente, e senza scosse ad un'altra posizione del diametro verticale del cerchio, per esempio a $^2|_{10}$ del raggio. Delle divisioni ben marcate su le guide, e i pezzi mobili dell' apparato danno tali posizioni con sicurezza e precisione. La deviazione dell'ago allora cresce, e avvolgendo giri di filo nel cilindro di legno del reostato presto si riduce alla deviazinne normale: si notano di nuovo i giri del reostato che aggiunti alla resistenza danno come prima la resistenza totale del circuito: il rapporto tra i due numeri esprimenti le resistenze totali sono il rapporto delle forze nei due siti. Così procedendo di decimo in decimo del raggio si trova il rapporto della forza al centro, e quella che corrisponde ai varii punti di quel tal raggio che vuolsi esplorare. Grande attenzione però si esige nel collocare lo strumento ai $^9|_{10}$ del raggio, perchè allora l' ago essendo assai vicino al cerchio facilmente si corre rischio di urtare, e così sconcertare tutto, e inoltre perchè ogni piccolo errore nella posizione, ne produce uno assai grande nei risultati. Questa gran vicinanza è cagione che non si possa usare circolo grande nè ago lungo più di quello che abbiamo indicato di sopra. Per evitare appunto gli errori nascenti da variazione di posizione al fine di ogni serie si rimetteva l'ago al centro, si riosservava la resistenza totale, indi si riponeva a $^9|_{10}$, e per risultato finale si prendeva il medio dei due valori così ottenuti. Daremo quì appresso in una tavola distesamente tutti i valori ottenuti dalle varie serie di esperienze

istituite tutte nella maniera esposta di sopra. Per ora basterà il seguente esempio :

ESEMPIO

Resistenza costante = 60^g . 25
Deviazione dell'ago = 25°

Posizione dell'ago dentro il circolo	Numero de' giri del Reostato	Resistenze totali	Rapporti delle resistenze totali
Centro	10. 0	70. 25	1
2 decimi	12. 75	73. 0°	1. 037
4	19. 50	79. 75	1. 121
6	37. 0	97. 25	1. 384
7	56. 0	116. 25	1. 655
8	94. 55	154. 80	2. 203
9	205. 70	265. 95	3. 785
Centro di nuovo	11. 20	71. 45	1
9 decimi	202. 70	262. 95	3. 680

§. X.

Calcolo delle formole, e confronto colle esperienze.

Siccome nelle sperienze sopra esposte abbiamo supposto il mezzo dell'ago sull'asse o diametro verticale del circolo, quindi la formola da calcolare è la (6 §. VI)

$$(a) \qquad T \tan g.d = \frac{4k}{h^3 b^2 c^2}[(E^2 + h')c^2 E^1 - 2h'E^1 + 2h'b^2 F^1]$$

Il calcolo di questa formola essendo alquanto complicato non sarà mal fatto darne qui un esempio numerico. Sceglieremo il caso dell'ago posto a $^9|_{10}$ del raggio per una deviazione di 30°. Abbiamo in tal caso

$$R = 22,5 \quad L = 2 \quad p = \frac{9}{10} R = 20.25 \,, \; d = 30^\circ \,;$$

rammentandoci che

$$m = L\cos d, \; n = L\operatorname{sen} d, \; \tan g\, a = \frac{p}{m}, \; h' = R(p\operatorname{sen} a + m\cos a) = Rs$$

$$s = \frac{p}{\operatorname{sen} a} = \frac{m}{\cos a}, \; h^2 = R^2 + m^2 + n^2 + p^2 + 2h', \; c^2 = \frac{4h'}{h^2}$$

il calcolo potrà disporsi come segue.

Esempio di calcolo della formola (a).

Log.cos$d$ = log.cos 30°	= 9. 9375306
+Log.L = log. 2	= 0. 3010300
Log.m	= 0. 2385606
Log.p = log. 20.25	= 1. 3064250
—Log.m = ...	= 0. 2385606
Log.tang(a = 85° 6′ 4″, 5)	= 1. 0678644
Log.p	= 1. 3064250
—Log.sen$a$	= 9. 9984172
Log.s	= 1. 3080078
Log.s	= 1. 3080078
+Log.R	= 1. 3521825
Log.h'	= 2. 6601903

h'	$= 457.\ 287$
R^2	$= 506.\ 25$
$+ m^2 + n^2$	$= 4.\ 00$
$+ p^2$	$= 410.\ 0625$
$2h'$	$= 914.\ 576$
h^2	$= 1834.\ 8885$
$\mathrm{Log}.4h'$	$= 3.\ 2622488$
$-\mathrm{Log}.h^2$	$= 3.\ 2636092$
$= \mathrm{Log}.c^2$	$= 9.\ 9986396$
$\mathrm{Log}.c$	$= 9.\ 9993198$
$c = \mathrm{sen}\theta = \mathrm{sen}\ 86^\circ.\ 47'.\ 39''$	
$= \mathrm{sen}\ 86^\circ.\ 792.$	
$\mathrm{Log}.b = \log.\cos\theta$	$= 8.\ 7475917$
$\mathrm{Log}.h^2$	$= 3.\ 2636092$
$+\mathrm{Log}.h$	$= 1.\ 6318046$
$\mathrm{Log}.h^3$	$= 4.\ 8954138$
$+\mathrm{Log}.b^2$	$= 7.\ 4951834$
$+\mathrm{Log}.c^2$	$= 9.\ 9986396$
$\mathrm{Log}.h^3b^2c^2$	$= 2.\ 3892368$
R^2	$= 506.\ 25$
$+h'$	$= 457.\ 288$
R^2+h'	$= 963.\ 538$
$\mathrm{Log}.(R^2 + h')$	$= 2.\ 9838684$
$+\mathrm{Log}.c^2$	$= 9.\ 9986396$
$+\mathrm{Log}.E^1(86^\circ.\ 792)$	$= 0.\ 0025472$
$\mathrm{Log}.(R^2+ h')c^2E^1$	$= 2.\ 9850552$

Log. 2	= 0. 3010300
+Log.h'	= 2. 6601903
+Log.E^1	= 0. 0025472
Log.$2h'E^1$	= 2. 9637675
Log.$2h'$	= 2. 9612203
+Log.F^1	= 0. 6308795
+Log.b^2	= 7. 4951834
Log.$2h'b^2F^1$	= 1, 0872732
$(R^2+h')c^2E^1$	= 966.174
$-2h'E^1$	= 919.956
	46. 218
$+2h'b^2F^1$	= 12.2257
Numeratore	= 58.4437
Log. Num.	= 1. 7667378
—Log.$h^3b^2c^2$	= 2. 3892368
Log.$f\left(\frac{9}{10}, 30^\circ\right)$	= 9. 3775010

ma da un calcolo precedente si è ottenuto per l'ago al centro

Log.$f'(c, 30^\circ)$	= 8. 8445407
quindi log. $\frac{f}{f'}$	= 0. 5329603

donde il rapporto $\frac{f}{f'} = 3, 41152$

OSSERVAZIONE

Dall'ispezione semplice dell'andamento di questo calcolo è manifesto quanta influenza abbiano sui risultati tutti i dati dell'osservazione che concorrono a determinare h' e h, perchè

ogni piccola variazione in essi ne introduce una in c, che fa variare rapidissimamente l'angolo θ, e più rapidamente le funzioni ellittiche corrispondenti. Nel calcolo precedente abbiamo sempre tenuto conto della 6ª e 7ª cifra quando occorreva nei numeri, perchè ci siamo accorti che limitandosi solo alla 5 gli errori influivano sulla seconda cifra del risultato. Qualche piccolo errore può nascere ancora dalle parti proporzionali delle funzioni ellittiche usate nel calcolo. Le tavole di Legendre sono calcolate solo per ogni decimo di grado, e pei valori intermedii bisogna calcolarne le parti proporzionali colla formola apposita di interpolazione : questo calcolo essendo assai lungo, e gli esperimenti non parendoci potere esser suscettibili di tanto rigore di calcolo, non l'abbiamo fatto, ma invece ci siamo contentati di prendere semplicemente le parti proporzionali delle prime differenze dei loro logaritmi per tutte le frazioni di grado intermedie. Ora la funzione F varia assai rapidamente pei gradi elevati del quadrante tanto che oltre $\theta = 75°$ la differenza è sensibile alla 3.ª nota logaritmica anche per meno di 1′ di θ. Considerando le differenze che da questo possono nascere nei risultati finali, non crediamo che possano aversi per sicure le cifre oltre le tre prime. Questo però è molto più di quanto bisogna per il caso nostro, perchè i risultati dell'esperienza non si possono garantire esatti se non fino alla seconda, e ciò anche dentro la variazione di una unità del suo ordine, cioè nel caso che contempliamo di un decimo dei numeri esprimenti i rapporti. Per ottenere più esattezza nel calcolo bisognerebbe usare tavole logaritmiche con 14 cifre quante ne hanno i logaritmi delle funzioni ellittiche di Legendre.

Ritornando all' esempio già esposto, si vede, che il calcolo per l' ago nel centro è più corto assai essendo $\alpha = 0$ e $' = Rm$ semplicemente, e tale è il calcolo da cui dipenderebbe la tavola de'gradi proporzionali in un galvanometro che avesse una corrente circolare attorno all'ago, come è la bussola delle tangenti.

In tal modo si sono calcolate tre serie di esperimenti fatte alle deviazioni d = 17° 36′, 25°, 30°, e ne presentiamo il ri-

sultato numerico confrontato coll'esperienza nella seguente tavola, che non sarà difficile ad intendere, avvertendo che i numeri nella prima colonna verticale rappresentano le distanze dell'ago magnetico esploratore dal centro del circolo in parti decime del raggio. I numeri trovati coll'esperienza sono i medii di due serie di osservazioni ciascuna fatta in identiche circostanze come si è descritto nel § precedente.

Posizione dell' Ago	SERIE I.ª			SERIE II.ª			SERIE III.ª		
	d = 17°. 36′ $f(c, 17°.36) = 0.0696869$			d = 25° $f(c, 25°) = 0.0694633$			d = 30 $f(c, 30°) = 0,0699102$		
	Rapporto delle forze concluso presa quella del centro per unità.			Rapporto delle forze concluso presa quella del centro per unità.			Rapporto delle forze concluso presa quella del centro per unità.		
	Osservaz.	*Calcolo*	*Differenza*	*Osservaz.*	*Calcolo*	*Differenza*	*Osservaz.*	*Calcolo*	*Differenza*
4	1. 144	1. 088	+0. 076	1. 098	1. 131	—0. 033	1. 155	1. 139	+0. 016
6	1. 367	1. 485	—0. 118	1. 407	1. 382	+0. 025	1. 481	1. 402	+0. 079
7	1. 609	1. 675	—0. 066	1. 699	1. 648	+0. 051	1. 774	1. 676	+0. 098
8	2. 289	2. 191	+0. 098	2. 245	2. 182	+0. 063	2. 270	2. 232	+0. 038
9	4. 075	3. 823	+0. 252	3. 584	3. 675	—0. 091	3. 687	3. 419	+0. 268

Da questa tavola apparisce

1.° Che l'accordo tra il calcolo e l'osservazione è quale può aspettarsi in materia così complicata ove i calcoli sono lunghi, e gli esperimenti molto delicati. La posizione dei $9|_{I_0}$ essendo la più soggetta ad errore è quella la quale mostra anche maggiori divergenze, se pure non vi è indizio di qualche altra causa di discrepanza, come vedremo fra poco.

2.° Apparisce manifesta la diversità dei resultati secondo la diversità di d, e con ciò resta spiegata l'anomalia osservata già ne'primi esperimenti fatti pel sig. Plana, che quando adoperavasi debole corrente (che dava deviazione minore) il rapporto era maggiore di quello che dava il suo calcolo. Per metter questo ancora più in chiaro ho calcolato qual sarebbe il rapporto prendendo i successivi valori di d

0°, 17° 36′, 25°, 30°, 60°,

ed ho trovato i seguenti rapporti tra il centro e $9|_{I_0}$ del raggio

4,738; 3,823; 3,675; 3,419; 2,196

3.° Vi è una differenza tra i risultati del sig. Plana e i nostri; ma di questo daremo la spiegazione nel § seguente dopo avere esposto più in particolare una causa di errore non sospettata, e che è di grande importanza in Reometria.

4.° Osservando i valori dei $9|_{I_0}$ si vede, che le differenze sono notabilmente diverse tranne nella seconda serie: molte e molte volte ripetuti gli esperimenti sempre nelle stesse circostanze i risultati erano identici, venne quindi pensiero di ritenere la stessa deviazione, e variare la resistenza costante del circuito: fatto ciò eccone i risultati:

Posizione dell'ago	SERIE A Resistenza totale al centro 101. 53	SERIE B Resistenza totale al centro 69. 98	*Differenza*
	Rapporto delle forze	Rapporto delle forze	
2	1. 035	1. 053	— 0. 018
4	1. 102	1. 142	— 0. 040
6	1. 416	1. 381	+ 0. 025
7	1. 603	1. 641	— 0, 038
8	2. 329	2. 163	+ 0. 166
9	4. 522	3. 623	— 0. 899

Da questa tavola risulta che stando la stessa d = 25°. I rapporti variano colla resistenza introdotta nel circuito; però le differenze sono entro i limiti degli errori probabili delle osservazioni fino ai $^7|_{10}$: ma dopo tal punto notabilmente se ne scostano.

Per trovare la causa di tale errore molti tentativi furono fatti inutilmente, e restando costantemente gli stessi, i risultati di varie esperienze, due sole restavano le cagioni probabili : 1. un influenza dei fili laterali della zona che circondavano l'ago, che avendo la larghezza di 9 millimetri poteva in tanta vicinanza esercitare una influenza che restava insensibile a maggiore distanza. Calcolai però tutta la formola (4) del §. VI con ogni diligenza avendo riguardo alla larghezza predetta della zona, ma i risultati furono appena differenti da quelli ottenuti pel filo medio, anzi minori di qualche centesimo.

La 2.ª causa più probabile pare risiedere nella legge assunta, che la resistenza dei fili sia proporzionale semplicemente alla loro lunghezza, e forte argomento di sospettare che questa sia la vera cagione è 1.° la grande influenza che esercita sui risultati la quantità di resistenza costante introdotta nel circuito, e conseguentemente le altre lunghe resistenze che devono poi introdursi nel circolo. 2.° che determinando la resistenza di una pila già provata invariabile si trova un valor diverso se la quantità ρ del §. IX (ossia se la resistenza addizionale) sia assai diversa nei due casi. D'altronde la legge di Ohm é così concorde con tanti altri fatti e principii, che non può rigettarsi senza gravi ragioni. La cosa però, secondo me, può intendersi a questo modo. La legge di Ohm ammette realmente la resistenza proporzionale alla *lunghezza ridotta* dei fili : ma questa lunghezza ridotta non é sempre anche in un filo omogeneo proporzionale alla sua lunghezza misurata. È fatto noto, che la temperatura aumenta la resistenza dei fili: se adunque la temperatura del filo venga comunque a cambiarsi la sua resistenza non sarà più uguale alla sua lunghezza misurata, e se λ è tale lunghezza e resistenza ad una temperatura t, questa ad una temperatura t' sarà $\lambda[1 + (t'-t)m]$, essendo m l' aumento di resistenza prodotta nel filo dall'elevazione di un grado di temperatura. Ora quando la corrente passa per un filo ne innalza la temperatura, quindi essa stessa ne aumenta la resistenza, e in certo modo si chiude una porzione del passo. La corrente usata al centro è almeno 3 volte più forte che la usata a $^9|_{10}$, quindi maggiore è la temperatura che essa desta nel filo, onde è che la resistenza al centro è in realtà maggiore della misurata dai giri del reostato. All' incontro la corrente minore agisce su di un filo più lungo, e benchè più debole può produrre notabile aumento di resistenza : questi aumenti devono alterare tutti i quoti che rappresentano i rapporti delle forze, e tanto più alterarli quanto più grande è la resistenza che viene aggiunta ai nove decimi. Nel caso delle serie A e B le resistenze ai centri erano rispettivamente :: 101, 53 : 69, 98; e ai nove decimi :: 458,8:251,15. Quindi si vede che la differenza

di resistenza al centro dovuto alla temperatura nei due casi, dovea esser poca cosa, ma molta dovea essere pei $9|_{10}$. Potrebbe ridursi tutto il raziocinio a formole più generali, ma nella mancanza totale di cognizione della legge con cui aumenta la resistenza per la temperatura, tutto sarebbe inutile. I bei lavori di Bequerel su l' aumento di temperatura prodotto dalle correnti possono dar lume in gran parte, ma mancando il resto ogni risultato, sarebbe incompleto. Parmi pertanto che questa osservazione possa esser capace di dissipare qualunque incertezza su i risultati antecedentemente esposti, onde resta stabilmente conclusa la concordanza dei fatti colla teoria, e insieme aperto ai fisici un campo di ricerche finora, per quanto io sappia, non esplorato: quello cioè di cercare come aumenti la resistenza dei fili in proporzione della temperatura.

§. XI.

Risultati ottenuti sul globo.

Il caso proposto dal sig. Plana di più correnti circondanti un globo non è altro in sostanza, che un caso più complicato di quello che abbiamo analizzato finora. Senza ripetere quanto sui risultati di quelle prime esperienze ho esposto nella precitata raccolta scientifica, mi limiterò quì solo ad alcune osservazioni.

La prima questione è relativamente alla disposizione dei fili nel globo, e nel circolo esaminato precedentemente. Nel globo le correnti sono disposte ad angolo, e si può cercare se due di loro distanti dal piano medio di tutto il sistema di angoli eguali esercitino la stessa azione che due altre di eguale intensità, ma giacenti nel medesimo piano medio. Per rispondere a ciò ho calcolato la formola nel caso della deviazione dell'ago $=30°$ dal piano del meridiano magnetico supponendo la corrente prima a 30° verso Est, e poi 30° verso Ovest, ed ho presa la semisomma dei due risultati che è stata 3, 261, cioè alquanto minore di quella che si è ottenuta da un solo filo, che era 3, 419. Concludiamo adunque che due fili ad angolo presso i

poli esercitano minor forza, che quando essi sono disposti parallelamente, e che quello che trovasi a minor angolo coll'ago non può compensare la minor forza di quello che fa angolo maggiore con esso. Le esperienze infatti fatte col globo ancor esse concorrono a dare tale rapporto minore che col circolo. Infatti la media di moltissime sperienze fatte col globo a deviazione di 30° dà

al centro	a $^{8}/_{10}$	a $^{9}/_{10}$
1	2. 90	3. 18

i quali numeri sono minori degli ottenuti nel circolo alle stesse posizioni. Questi fatti possono applicarsi in qualche modo al galvanometro a fili incrocicchiati del sig. Marianini.

La seconda questione interessante è confrontare i risultati numerici del sig. Plana coi nostri. Siccome esso esamina il caso di un solo elemento voltiano a cui equivale un polo magnetico solo posto sull'asse polare del globo le nostre formole vi si applicheranno facilmente facendovi L = 0. I risultati numerici sono dalle nostre formole per $^{7}/_{10}$ 1, 78; per $^{9}/_{10}$ 3,18
Il sig. Plana trova 1. 63 3.00
la differenza tra questi numeri è tale, che può nascere solamente dalla varia maniera con cui si fa il calcolo, e dal diverso numero di cifre di cui si tien conto nei dati fondamentali. È notabile come tali numeri siano vicinissimi a quelli che si sono trovato pel globo mercè dell'esperienza; questo è dovuto alla cortezza dell'ago relativamente al diametro del circolo e del globo. È però essenziale differenza, che l'espressione della forza nel caso dell'elemento non dipende punto dall'angolo che esso fa col piano del meridiano magnetico o delle correnti, mentre abbiamo veduto che questo angolo è elemento importantissimo nel caso dell'ago magnetico. Quindi tutti i fili attorno al globo in qualunque meridiano siano esercitano la stessa azione, il che non è vero se vi si sostituisce un ago magnetico.

Onde estendere le verificazioni della nostra formola sarebbe necessario mostrarne la congruenza con esperimenti fatti sopra l'ago posto in altre posizioni fuori dell'asse polare del

globo, e per altre lunghezze di ago magnetico. Le esperienze che ho fatto finora su questo punto sono poche in confronto di quelle che richiede l' importanza del soggetto, sono però sufficienti a provare l'esattezza delle formole. Ne sceglierò due. La prima è fatta sull' asse del globo perpendicolare al piano medio delle correnti su esso distese, e che però poco può differire da quello che si avrebbe, supponendo una sola corrente circolare. Posto dunque l'ago esploratore sull'asse del globo predetto a distanza dal centro di $^4|_{10}$ del raggio, si trovò il rapporto delle forze comparate al centro

cogli esp. 0, 821 col calcolo 0, 7945

la piccola differenza, oltre gli errori di osservazioni, può ripetersi dalla causa accennata nel § precedente del riscaldamento del filo.

L'altra esperienza è fatta fuori del globo sul prolungamento dell'asse polare a 3 decimi dal polo. L'esperienza quì dà l'inversione della deviazione, cioè, che se l'ago stando nel centro devia a oriente, fuori del globo devierà ad occidente: il calcolo mostra pure questa inversione col cambiamento di segno: i numeri ottenuti sono

coll'esp. — 0. 656, col calcolo — 0. 545624

questa concordanza del segno, e del valore numerico; parmi un criterio non indifferente, onde credere che la formola è esatta. Le esperienze fatte nel piano medio del globo parallelo al meridiano magnetico non possono concordare col risultato calcolato nel circolo, essendo troppo sensibile in questa posizione la differenza di distribuzione delle correnti nei due casi.

Molte altre esperienze su altre posizioni dell'ago sono state fatte ma non calcolate ancora, la lunghezza dei calcoli meritando più accurate misure, ed apparati più perfetti prima di intraprenderne la fatica.

§. XII.

Teoria del Galvanometro.

La teoria del galvanometro è semplicemente un corollario di quanto abbiamo esposto finora. I galvanometri ordinarii

avendo i loro fili disposti su telarini rettangolari, le formole che abbiamo dato non sono sufficienti a calcolarne le forze; se si costruisse il telarino in modo che esso fosse ellittico si potrebbero adoperare le formole del § VI. Questo calcolo essendo però complicatissimo, noi ci contenteremo di dare quì la teoria del galvanometro ridotto ad uno stato massimo di semplicità, cioè di una corrente circolare che avvolgesi attorno all'ago magnetico, quale è il caso nella bussola della tangente. La lunghezza dell'ago può esser qualunque purchè sottile, onde si verifichi meglio la condizione da cui siamo partiti, che i suoi poli possano riguardarsi come capi di un cilindro elettrodinamico di raggio piccolissimo. La formola che deve servire per questo calcolo è la solita, fattovi $p = 0$.

Io ho tentato di verificare la formola per alcune deviazioni, ma non avendo a mia disposizione apparato perfetto abbastanza darò i risultati solo come approssimazioni. La prima cautela da usarsi è quella di procacciarsi una corrente esattamente multipla di un altra senza l' intervento del reostato, senza cambiamento di resistenze, o altro apparato, la cui legge possa esser sospetta. Per ciò io presi un lungo filo di rame coperto di seta, e alla distanza di 2 metri da uno de'suoi capi, lo avvolsi in un anello che faceva 8 giri di 17^{cm}, 79 di diametro; poi alla distanza di altri 2 metri vi feci un anello di diametro eguale al primo ma facente solo 4 giri, e finalmente a distanza eguale alla precedente io formai un terzo anello di un solo giro. Il diametro medio dei tre anelli era eguale sensibilmente, ma il filo essendo grosso 1^{mm} buono, quello degli otto giri faceva volume assai considerevole in confronto di quello di un sol giro. Questi anelli furono successivamente posti attorno ad una bussola su cui leggevansi direttamente i mezzi gradi, e per approssimazione le altre frazioni. Armata una pila a forza costante, e avute le debite cautele onde misurare esattamente le deviazioni dell'ago in due versi opposti, si ebbero i seguenti risultati.

Diametro del circolo millim. 177, 97
Lunghezza dell' ago millim. 81, 38

questa lunghezza è propriamente la distanza dei due poli misurata con diligenti esperienze fatte con un piccolo ago calamitato.

Deviazione dell'ago	Rapporto delle forze dato		differenza	Valore di $f(t, d)$
	dall'osserv.	dal calcolo		
10°.	corrente 1.	1. 000		0. 526
31°. 18′	4	4. 055	0. 055	0. 447
46°. 18	8	7. 884	0. 116	0. 395

Le sorgenti di errore però sono moltissime, e quel che è peggio hanno grande influenza nei risultati: un mezzo grado di errore nella deviazione minore, che è la fondamentale, può alterare i rapporti di un decimo almeno, e ho trovato che la differenza de'raggi dei diversi circoli che compongono il circolo ottuplo può avere influenza sui centesimi di detto rapporto.

Dal piccolo saggio che abbiamo sott'occhio nella tavola precedente si vede come rapidamente crescer deve la forza della corrente, onde far crescere la deviazione dell'ago. Ho fatto un primo tentativo di tavola de'gradi proporzionali, qual servir potrebbe per un circolo ed un ago delle dimensioni predette. Ho preso per unità di forza quella che produce una deviazione di 10°, ed ho calcolato alcune posizioni dell'ago più rimarchevoli, cui nella tavola ho contraddistinto con asterischi, gli altri numeri sono dedotti da costruzione grafica fondata sui numeri risultanti dal calcolo.

TAVOLA DE'GRADI PROPORZIONALI

Gradi	forze
10°	1. *
15°	1. 4*
20	2.
25	2. 7*
30	3. 6*
35	4. 7
40	5. 9*
45	7. 9*
50	10. 45
55	12. 6
60	16. 96*
65	18. 6
70	23. 33*
80	50. 05*
81	56, 00* (a)

gli ultimi numeri fanno vedere il rapidissimo aumento di cui parlavamo. Egli è evidente che questa tavola potrà servire per ogni bussola di tangenti nella quale le proporzioni della lunghezza dell'ago al diametro del circolo siano come nel caso in cui essa è calcolata, cioè :: 1 : 2, 18.

Resta finalmente a vedere se la teoria finora assunta della bussola delle tangenti sia esatta. Si assume in questo strumento, che la intensità delle forze sia proporzionale alle tangenti delle deviazioni prodotte. Il che viene a supporre che nella formola (m §. VII) la funzione $f(c$, d) che moltiplica k sia costante. Ora confrontando i valori di $f(c$, d) ottenuti nel caso dell'ago posto al centro (§. X), si vede, che essi non sono tali, ma variano con d. Tali variazioni sono piccole, e forse dentro i limiti degli errori inevitabili nelle osservazioni finchè

(a) Ho fatto con questa bussola il paragone di varie sorte di pile, e in altra occasione darò i risultati delle forze loro relative calcolate su questa tavola.

d non supera 30° gradi, ma per 60° già si trova la differenza di più di una unità tra il rapporto delle tangenti e quello di $\frac{kf}{k'f'}$, quindi si può accertare che tale legge non è esatta se non per le piccole deviazioni, eppure il rapporto della lunghezza dell' ago al raggio del circolo è assai piccolo, cioè di $^1|_{11}$ circa, e molto maggiore sarebbe la divergenza se tal rapporto fosse maggiore come può vedere ciascuno confrontando la tavola precedente coi rapporti delle relative tangenti.

La bussola dei seni all'incontro, come appare dalla formola (5), è esatta per ogni grado, ma ha l'inconveniente che spesso l'ago salito alla maggiore deviazione ricade presso lo zero senza deviare più come prima. Questo fenomeno é spiegato chiaramente dalle nostre formole, come può facilmente vedersi calcolando la posizione dell'ago per la deviazione a destra, e poi a sinistra della corrente, senza che io mi intrattenga ad esporlo, ma tale circostanza rende le misure in pratica dubbiose e difficili.

CONCLUSIONE

Chi avrà avuto la pazienza di seguirmi nel complesso dei calcoli e sperimenti descritti in questa Memoria, sarà convinto che certi rami di fisica paiono facili solo perchè si guardano da lontano, ma che esaminati da vicino richiedono somma fatica onde poterli anche leggiermente scandagliare. Si ha però anche in questi il piacere di vedere, che i fenomeni più complicati sono soggetti ad invariabili leggi matematiche, le quali se sono più difficili a scoprire, non sono meno interessanti benchè appartengono a classe di fenomeni meno splendidi, che i grandiosi dei sistemi planetarii. Io sono ben lungi dal dare questo lavoro come adequato al suo scopo: io non lo riguardo anzi che come un semplice schizzo cui potrà perfezionare chi sarà fornito di strumenti meglio di me, e io stesso spero di poter ritoccare quando me lo permetteranno gli altri studi a cui ora devo attendere per ufficio.

LA COMETA DEL 1264—1556 — e 1848.

ESTRATTO

di una lettera del sig.

GIOVANNI TAYLOR DI LIVERPOOL

AL REDATTORE.

Ho ricevuto l'altro giorno una lettera dal sig. I. R. Hind direttore dell' osservatorio in Regent's Park di Londra, nella quale mi informa che un suo amico, il sig. I. T. Barber di Etwell presso di Uttoxeter, dopo una lunga fatica e grande spesa di tempo è giunto alla conclusione, che fra gli anni 1556 e 1592 le attrazioni unite di Giove e di Saturno dovevano diminuire di 263 giorni il periodo della cometa del 1264 e 1556 che fu aspettata nuovamente nel 1848; ma che fra gli anni 1592 e 1806 il suo periodo doveva essere aumentato di 751 giorni per l' attrazione sola di Giove, sicchè dovea aver luogo una ritardazione di 488 giorni. Non è ancora conosciuto quanto di più possa essere stata ritardata per le azioni di Saturno, Urano e Nettuno. Le perturbazioni prodotte dal pianeta Saturno fra gli anni 1592 e 1806 si stanno ora calcolando dal sig. Barber, e al compiersi riceveremo probabilmente qualche poco più di luce sul ritardo della riapparizione della cometa. In questi calcoli egli ha fatto uso degli elementi, che il sig. Hind dedusse dalle osservazioni fatte da Fabricius nel 1556.

Segue da questo che la cometa non sia per essere di ritorno se non dopo qualche mese: quelli dunque che si trovano muniti di convenevoli telescopii farebbero buon servizio incominciando immediatamente una ricerca sistematica per la cometa continuandola ad intervalli convenienti fino alla fine del 1851. Se non apparisce veruna cometa, forse si avrà ragione per dubitare della identità delle due comete famose del 1264 e 1556, ma sarebbe cosa di grande importanza in questo ramo

di astronomia che la cometa sia riconosciuta, se è veramente periodica, ed anch'io sono di questa opinione, come l'ho espresso in varie pubblicazioni inglesi e continentali, cioè che apparirà ben tosto. La regione del cielo dove dovrà ricercarsi è circa la costellazione dell'Idra nella supposizione che il suo perielio sia per essere fra 4 ovver 5 mesi; tal posizione è ottimamente situata per le investigazioni dei mesi marzo e aprile.

GIO. TAYLOR.

Estratto di una lettera del sig. Hind al sig. Leverrier.

(Comptes Rendus. Seance du 25 *Mars* 1850.)

Una lettera del sig. Hind a M. Leverrier contiene due posizioni di Nettuno risultanti da osservazioni comprese nelle zone di Lamont (a Monaco), e che finora non sono state riconosciute come appartenenti a questo pianeta. La prima è presa il 25 ottobre 1845, essa si trova nella zona 338 a 21^h 42′, 45″, 1: il pianeta vi è notato come una stella di 9^a grandezza. La seconda osservazione si trova nella zona 379 il 7 settembre 1826 a 21^h 54′, 24″, 9, e il pianeta vi è notato come una stella di 8^a grandezza. Il sig. Hind ha ridotto le osservazioni mediante il catalogo delle stelle di Greenwich e di Edimburgo; e ha trovato le posizioni apparenti seguenti

	Tem. di Gr.	Ascens. Retta	Distanza al P.N.
1845 ottob. 25	6^h 40′ 15″	21^h 42′ 42″,48	104° 14′ 23″. 0
1846 settem. 7	10 1 57	21 54 44, 51	103 16 21 . 8

Il 4 gennaio, il sig. Hind ha osservato nell'Orsa maggiore una splendente nebulosa che sembrava nuova: la sua posizione media pel 1850 è

AR 12^h 0′ 33″, 16

Declin. +66° 0′ 29″, 9

Nella stessa lettera il sig. Hind ricorda una stella di una colorazione straordinaria, e che esso la prima volta vide nel 1845: essa è di uno splendore cupo più che le altre stelle colorate visibili in queste latitudini. Il suo posto al principio dell'anno presente è

AR. $1^h\ 52^m\ 46^s\ 8$

Dist. al P. N. 105° 2′ 9″.

Questo colore indica forse una stella variabile : giacchè tutte le altre stelle telescopiche variabili sono fortemente tinte in rosso , e questa circostanza ritrovasi anche nelle stelle più brillanti come sono α di Orione, e la stella di Cefeo del colore di granato.

SOPRA UNA NUOVA EQUAZIONE IN IDRODINAMICA.
ALCUNE OSSERVAZIONI
DI PLACIDO TARDY

In una Memoria sul movimento de' fluidi (*Sopra alcuni punti della Teoria del moto de'liquidi*) pubblicata in Firenze nel 1847, feci cenno come alcuni geometri fossero stati indotti in errore credendo che le due funzioni arbitrarie d' $x + y\sqrt{-1}$ e d' $x - y\sqrt{-1}$ costituenti il notissimo integrale della equazione della continuità nell' ipotesi di $udx + vdy$ differenziale esatto, dovessero sempre essere uguali di forma, acciò le due velocità u, v riescissero reali, e notai come il prof. Challis arrivasse per questo e per altri errori a falsissime conseguenze, sulle quali non insisteva perchè m'era venuto fatto di vedere una comunicazione analoga del sig. Bertrand all' Accademia delle scienze di Parigi.

Il sig. Challis avuta conoscenza di quella mia Memoria ha inserito in replica al sig. Bertrand ed in parte a me stesso, un articolo nel fascicolo supplementario di giugno del passato anno, del *Philosophical Magazine*, ove riviene sul suo prediletto argomento - Sulla verità cioè, e sulla necessità di una nuova equazione in Idrodinamica. - Io debbo anzi tutto dichiarare , che scrivendo quella mia Memoria in Messina, mia patria, ove non penetrano nè giornali scientifici nè collezioni accademiche,

non avea potuto consultare gli scritti originali del ch. professore di Cambridge, e solo ne conosceva un breve estratto dato da Webster nella sua *Theory of fluids*. Da quel tempo e dopo l' ultimo articolo del prof. Challis ho cercato leggere quì in Firenze attentamente le sue Memorie inserite nelle Transazioni filosofiche di Cambridge, e nel Magazzino Filosofico di Londra, e mi è forza confessare che non ho saputo in esse trovar nulla che potesse farmi cangiare la prima opinione, e dissentire dal sig. Bertrand. Per non ripetere cose già dette da lui mi limiterò a presentare alcune osservazioni sulla nuova pretesa equazione.

A veder la tenacità con la quale il sig. Challis ha insistito su questo sogetto malgrado la tacita disapprovazione de' geometri (io ignoro che alcuno abbia adottato le idee del sig. Challis), mi ricorre alla mente un fatto analogo dell' insigne matematico Ivory, il quale, solo, si ostinò a volere introdurre una seconda equazione nell' Idrostatica. Contro i principii di Ivory sorsero allora Poisson ed Airy, mentre la nuova equazione Idrodinamica dell'astronomo di Cambridge, se non è stata ammessa dagl' idraulici, non è stata, com'egli dice, nemmeno combattuta. Vediamo adunque su quali fondamenti essa poggia.

Il prof. Challis comincia dallo stabilire per via di considerazioni elementari la equazione

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{d.\rho V}{ds}+\rho V\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)=0, \quad \ldots\ldots (1)$$

ove ρ è la densità del fluido, V la velocità al punto x, y, z, ds il differenziale dell'arco della *linea di moto*, ed r, r' i raggi principali di curvatura al medesimo punto della superficie normale alle direzioni del moto; quindi ripetutamente asserisce, che questa equazione non può dedursi dalle due note equazioni

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{d.\rho u}{dx}+\frac{d.\rho v}{dy}+\frac{d.\rho w}{dz}=0 \ldots\ldots (2)$$

$$(dp)=\rho\left\{\left[X-\left(\frac{du}{dt}\right)\right]dx+\left[Y-\left(\frac{dv}{dt}\right)\right]dy+\left[Z-\left(\frac{dw}{dt}\right)\right]dz\right\}\ldots (3)$$

è che però una terza diviene necessaria, dalla combinazione della quale con la (2) ne venisse fuori la (1). Della (3) non è quistione, perchè essa contiene le forze acceleratrici X, Y, Z che non si vedono nella (1). Noi adottiamo qui la notazione del sig. Challis, sebbene possa parere strano a'Geometri di vedere l'antico uso di chiudere tra parentesi le derivate parziali, impiegato per indicare le derivate totali. Altre spiegazioni sarebbero superflue: — Solo aggiungeremo che in vari luoghi il prof. Challis ha scritto il 2.° termine della (1) così $\frac{d.\rho V}{dr}$: ma bisogna intendere che dr sia l'elemento della traiettoria descritta dalla molecola del fluido, e non del raggio di curvatura r, benchè da quanto saremo sulla fine per dire si potrebbe sospettare che il professore di Cambridge abbia fatto tale confusione.

L'argomento accennato è il *solo*, che abbiamo potuto trovare nelle varie Memorie del sig. Challis, per la *necessità* di una terza equazione, anzi egli stesso confessa in un luogo (Ph. Mag. T. 33. N. 233) non conoscere altro uso di essa fuor quello di dedurre la equazione (1). Ecco poi come egli procede ad investigarla. Ammette che esista sempre un fattore $\frac{1}{\lambda}$ capace di rendere integrabile la espressione

$$udx + vdy + wdz\,,$$

in modo che sia

$$\frac{u}{\lambda}dx + \frac{v}{\lambda}dy + \frac{w}{\lambda}dz = (d\psi) \ldots\ldots (4)$$

L'integrale di questa

$$\psi(x, y, z, t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ove deve intendersi compresa in ψ una funzione arbitraria del tempo, rappresenta, come si sa, una superficie ortogonale alle direzioni del moto, che il sig. Challis chiama *superficie di spostamento* (*surface of displacement*). Da essa egli deduce

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\psi}{dx}u + \frac{d\psi}{dy}v + \frac{d\psi}{dz}w = 0 \ldots\ldots (6)$$

con ragionamento che, al pari del sig. Bertrand, sono inabile a comprendere ed apprezzare. Poi prendendo dalla (4)

$$u = \lambda \frac{d\psi}{dx}, \quad v = \lambda \frac{d\psi}{dy}, \quad w = \lambda \frac{d\psi}{dz},$$

e sostituendo ottiene

$$\frac{d\psi}{dt} + \lambda \left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2\right] = 0, \ldots\ldots (7)$$

che è la nuova equazione da lui introdotta, e dalla quale egli crede poter ricavare il valore di λ.

Ora è facile convincersi che la (1) non è se non una trasformazione analitica della equazione della continuità, che parrebbe suggerita dalle ricerche sulla equazione della superficie capillare. Infatti differenziando rispetto ad x il valore superiormente dato di u otterremo

$$\frac{du}{dx} = \lambda \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d\lambda}{dx}\frac{d\psi}{dx}.$$

Ponendo per brevità

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 = R^2$$

ed osservando che

$$\lambda = \frac{V}{R},$$

e però

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{R}\frac{dV}{dx} - \frac{V}{R^3}\left[\frac{d\psi}{dx}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d\psi}{dy}\frac{d^2\psi}{dxdy} + \frac{d\psi}{dz}\frac{d^2\psi}{dxdz}\right],$$

e

$$\frac{1}{R}\frac{d\psi}{dx} = \frac{u}{V},$$

viene

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{V}\frac{d.V}{dx} + \frac{V}{R^3}\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}R^2 - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dy}\frac{d^2\psi}{dxdy}\right.$$
$$\left. - \frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dz}\frac{d^2\psi}{dxdz}\right].$$

Del pari si otterranno i valori di $\frac{dv}{dy}$ e $\frac{dw}{dz}$, e sommando, e avendo riguardo alla nota espressione

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2+\frac{d^2\psi}{dy^2}\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2+\frac{d^2\psi}{dz^2}\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2\right.$$

$$+2\frac{d^2\psi}{dxdy}\frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dy}+2\frac{d^2\psi}{dxdz}\frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dz}+2\frac{d^2\varphi}{dydz}\frac{d\psi}{dy}\frac{d\psi}{dz}$$

$$\left.-\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dz^2}\right)R^2\right]\frac{1}{R^3},$$

ed alla identità

$$\frac{dV}{ds}=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dV}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dV}{dz}\frac{dz}{ds}=\frac{dV}{dx}\frac{u}{V}+\frac{dV}{dy}\frac{v}{V}+\frac{dV}{dz}\frac{w}{V},$$

risulta

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=\frac{dV}{ds}+V\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right).$$

Dietro ciò il passaggio dalla (2) alla (1) non presenta alcuna difficoltà.

Il sig. Challis istesso contradicendo le sue prime asserzioni dice nel suo ultimo articolo, che l'uso della equazione (7) da lui prima impiegata per arrivare alla (1), *non è assolutamente necessario*; ma allora a che si riduce il suo principale argomento per la esistenza di una terza equazione in Idrodinamica?

Rimane or a vedersi se dessa sia *vera*. Però vogliamo innanzi prevenire un'obbiezione che potrebbe affacciarsi dal suo autore, che avendo cioè impiegato la equazione (7) combinata a quella della continuità, ed essendo così pervenuto ad una conseguenza giusta, vale a dire alla (1), la verità della (7) è perciò stesso dimostrata. In generale questo modo di argomentare ha certamente della forza, ma nel caso peculiare basta esaminare l'analisi del prof. Challis per iscorgere che vi ha avuto luogo una compensazione di errori; ed in vero essendo λ una quantità destinata a sparire da sè dal risultamento finale, poco importa che siasi per essa sostituito un falso valore

Ciò si vedrà più chiaramente se noi prendiamo l' espressione di $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$, e poniamo per $\frac{d\psi}{dx}$, ec. . . $\frac{u}{\lambda}$, ec. . . . . imperocchè tutti i termini che contengono λ e i suoi coefficienti differenziali evidentemente si distruggono tra loro.

Dopo ciò osserveremo che il prof. Challis dovea provare verificarsi sempre la equazione

$$u\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)+v\left(\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}\right)+w\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right)=0$$

affinchè il trinomio $udx+vdy+wdz$ potesse divenire integrabile per lo mezzo di un fattore. Di più egli nell'ultimo suo scritto non sa assegnarci alcuna nuova e valida ragione che permetta il passaggio dalla (5) alla (6), e si trattiene invece a spiegarci la significazione di quest'ultima. Ma noi appunto vorremmo conoscere come egli possa dimostrare, che in generale le molecole del fluido, che sono sulla superficie $\psi=0$, vi rimangono ne'successivi istanti, chè anzi ci pare un assurdo evidente se per poco consideriamo il moto giunto allo stato di permanenza, e non aggiungiamo nella integrazione della (4) se non un'assoluta costante, poichè allora la superficie di spostamento non cangiando col tempo, le molecole che si trovavano su di essa non potrebbero dimorarvi senza che cessi il moto, e infatti ne risulterebbe $V=0$.

In generale poi si sa che acciò le molecole del fluido rimangano sopra una superficie $\psi(x, y, z, t)=0$ fa d'uopo che il tempo sparisca da questa equazione alloraquando alle coordinate x, y, z si sostituiscano le loro espressioni formate coi valori iniziali a, b, c e il tempo t, siccome Lagrange ha il primo notato. Or questo è chiaro non poter avvenire nel nostro caso, essendovi in ψ compresa una funzione arbitraria del tempo. Inoltre se la equazione (7) fosse esatta, essendo in nostro arbitrio aumentare il coefficiente differenziale parziale $\frac{d\psi}{dt}$ di una funzione qualunque $\chi'(t)$ di t, ne seguirebbe che

$$\frac{R^2}{\frac{d\psi}{dt}} \quad \text{ed} \quad \frac{R^2}{\frac{d\psi}{dt}+\chi'(t)} = \frac{R^2}{\frac{d\psi}{dt}} \cdot \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\psi}{dt}+\chi'(t)}$$

sarebbero allo stesso tempo fattori integranti di

$$udx + vdy + wdz.$$

Ora dinotando il primo per M, ed il secondo per MN, siccome dovrebbero verificarsi le equazioni

$$\frac{d.Mu}{dy} = \frac{d.Mv}{dx}, \quad \frac{d.NMu}{dy} = \frac{d.NMv}{dx}, \text{ ec. . . ec.}$$

ne risulterebbe

$$u\frac{dN}{dy} = v\frac{dN}{dx}, \text{ ec.}$$

ossia

$$\frac{u}{v} = \frac{d\psi}{dx} : \frac{d\psi}{dy} = \frac{d^2\psi}{dxdt} : \frac{d^2\psi}{dydt}, \text{ ec.}$$

lo che condurrebbe a forme peculiari della ψ.

Aggiungiamo un esempio che ci sembra mostrare evidentemente la insussistenza della (6). Supponiamo il fluido omogeneo, incompressibile, di una densità $\rho = 1$, e prendiamo

$$u = y(t-1), \quad v = x(t+1), \quad w = 0.$$

Le due equazioni (2) e (3) sono soddisfatte, e la seconda somministra

$$p = f(t) + W - xy - (t^2-1)\frac{x^2}{2} + (t^2-1)\frac{y^2}{2},$$

ove $f(t)$ è funzione arbitraria di t e $W = \int(Xdx + Ydy + Zdz)$. Intanto $udx + vdy$ non è differenziale esatto, ed il suo fattore integrante è $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{xy}$. Quindi l'equazione (5) diviene

$$\psi = x^{t-1} . y^{t+1} + \chi(t) = 0,$$

e la (6) darebbe

$$-\frac{\chi'(t)}{\chi(t)} + \log.xy + (t-1)^2\frac{y}{x} + (t+1)^2\frac{x}{y} = 0,$$

risultato che lasciamo al prof. Challis la cura di giustificare.

Noi abbiamo anziosamente cercato nelle memorie dell'Astronomo di Cambridge un'applicazione della sua nuova equazione e molto ci maravigliammo nel trovare nel T. VIII, P. I delle Transazioni di Cambridge il seguente esempio.

Se

$$u = mx\,,\quad v = -my\,,\quad w = 0\,,$$

abbiamo

$$udx + vdy = m(xdx - ydy)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(8)$$

Il sig. Challis prende per integrale di questa, ossia per equazione generale delle linee di spostamento

$$\psi = x^2 - y^2 - a^2 = 0.$$

Quindi dalla (7) deduce

$$\lambda = \frac{a\frac{da}{dt}}{2(x^2+y^2)}\,,$$

ma, egli aggiunge, dalla (8) abbiamo

$$x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} - a\frac{da}{dt} = 0,$$

e poichè

$$\frac{dx}{dt} = u = mx\,,\quad \frac{dy}{dt} = v = -my\,,$$

viene

$$a\frac{da}{dt} = m(x^2+y^2)\,,$$

e sostituendo

$$\lambda = \frac{m}{2}\,,$$

il quale valore, egli dice, *rende* $\frac{u}{\lambda}\,dx + \frac{v}{\lambda}\,dy$ *un differenziale esatto e l'equazione* (7) *è perciò verificata.*

Abbiamo voluto riferire per intero questo esempio perchè non si sa comprendere come un processo sì antilogico abbia potuto sfuggire alla sagacia del dotto professore. E difatto che cosa egli fa se non prendere il valore di λ dalla equazione (7)

$$\lambda = -\frac{\frac{d\psi}{dt}}{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2},$$

e sostituire in esso il valore di $\frac{d\psi}{dt}$ tirato dalla (6)

$$\frac{d\psi}{dt} = -\left(\frac{d\psi}{dx}u + \frac{d\psi}{dy}v + \frac{d\psi}{dz}w\right) \quad ?$$

E quale può esserne il risultato se non $\lambda = \lambda$?

Se egli ha ottenuto $\lambda = \frac{m}{2}$ ciò è avvenuto perchè nel prendere la equazione (9) per integrale della (8) avea già moltiplicato quest'ultima per $\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{m}$.

Nè meno sorpresi siamo rimasti nel vedere la seguente deduzione nel più volte citato articolo del prof. Challis.

Egli suppone il fluido incompressibile, nel qual caso la equazione della continuità (1) diviene

$$\frac{dV}{ds} + V\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) = 0,$$

e soggiunge *poiché*, $ds = dr = dr'$, *abbiamo integrando*

$$V = \frac{\varphi(t)}{rr'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

e *se il moto ha luogo nello spazio a due dimensioni*

$$V = \frac{\varphi(t)}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

L'assumere in generale $ds = dr = dr'$ è così strana cosa che ci pare inutile spendere molte parole a dimostrare l'assurdità del risultato.

Che se volessimo insistere sulle contradizioni del professor Challis potremmo osservare come il valore (10) di V non può accordarsi con quello che si caverebbe dalle sue precedenti equazioni, cioè con

$$V = -\frac{\frac{d\psi}{dt}}{\sqrt{\left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2\right]}},$$

e ciò si vede prendendo dalla nota equazione che dà i due raggi principali il valore del prodotto delle radici rr'.

Il sig. Challis poi dice che l'equazione (11) risponde alla obbiezione da me avanzata nella mia Memoria, la quale, come da principio notai, si riferiva all' avere assunto erroneamente l'uguaglianza di forma delle due funzioni arbitrarie nell'integrale della equazione $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$, e però alla conclusione che con nuovi errori, il prof. Challis ne avea tratta, essere cioè il moto sempre rettilineo allorchè $udx + vdy = d\varphi$. La (11), fosse pur vera, nulla proverebbe: rimarrebbe a dimostrare che nel caso contemplato le linee di spostamento sono sempre circolari. Noi rammenteremo di passaggio a proposito di questa condizione analitica del moto rettilineo, che il professore di Cambridge pretende introdurre nella scienza, un argomento semplicissimo di un egregio geometra inglese il sig. Stokes, che non ci pare sia stato dalle repliche del sig. Challis distrutto. Se il moto è rettilineo non uniforme, e le velocità componenti tali da rendere il trinomio differenziale esatto, e perciò si supponga impressa a tutta la massa del fluido in diversa direzione una velocità uniforme, quel trinomio sarà sempre

integrabile, ma le traiettorie non saranno più linee rette. In questa occasione avvertiamo che il prof. Amici nel suo Corso d'Idraulica ha la seguente espressione

$$V = \frac{A}{RR'd\tau d\tau'},$$

ove R, R' sono i raggi osculatori delle due linee di curvatura al punto x, y, z delle superficie di spostamento, $d\tau$, $d\tau'$ gli angoli di contingenza delle stesse linee al medesimo punto, ed A è variabile non solo col tempo, ma bensì da una traiettoria all'altra. Noi crediamo che dessa sia inammissibile, perchè non presenta un'espressione finita, e perchè è mal valutata l'area elementare del filetto fluido uguale al prodotto degli archetti elementari delle due linee di curvatura. La velocità è in ragione inversa delle sezioni del filetto — queste sono infinitamente piccole del second'ordine, e il tutto stà a trovare il loro rapporto che deve esser finito. Rimandiamo per questo alla p. 24 della nostra Memoria.

Aggiungiamo ancora un esempio che ci dà campo a fare alcune osservazioni.

Il chiarissimo prof. Giulio di Torino ha trattato il caso dell'efflusso dell'acqua da un vaso generato dalla rotazione di un' iperbola cubica, e in cui le traiettorie descritte dalle molecole del fluido sono pure iperbole cubiche, e nell'ipotesi di

$$udx + vdy + wdz$$

differenziale esatto. Era il secondo caso dopo quello de' vasi conici discusso dal Venturoli. Se però il vaso fosse generato dalla rivoluzione di un'iperbola Apolloniana, e si volesse che le traiettorie fossero ancora tali iperbole, la soluzione non è possibile finchè l'esattezza differenziale di quel trinomio venga richiesta. Ma se quest'ultima condizione fosse esclusa, avremmo facilmente la seguente soluzione.

Sia la superficie rappresentata dalla equazione

$$f = z\rho = C,$$

ove

$$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

Le tre velocità saranno

$$w = z^2, \quad v = -zy, \quad u = -zx;$$

una traiettoria qualunque sarà data dalle due equazioni

$$y = Bx, \qquad zy = A.$$

Il trinomio $udx + vdy + wdz$ non è differenziale esatto: il fattore integrante riesce $\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{z}$, e la superficie di spostamento

$$\psi = z^2 - x^2 - y^2 - a^2 = 0.$$

La velocità V risulterà $= z\sqrt{(z^2 + x^2 + y^2)}$,

ed è facile vedere come nè l'espressione del sig. Challis, nè quella del sig. Amici possano fornire questo valore.

Questo non è che un caso particolarissimo compreso nella equazione

$$\frac{d^2f}{dz^2} + \frac{d^2f}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} = \varphi(f)$$

cui dee soddisfare la f perchè fornisca una forma possibile di vaso $f = 0$ con le condizioni sopra espresse.

Riflettendo per poco su queste equazioni si scorge quanto poco siamo avanzati nella trattazione generale de'più semplici problemi d'Idrodinamica, e come le soluzioni fin quì ottenute sieno tutte ipotetiche.

Nell'efflusso per esempio dai vasi conici se per un momento non si richiedesse l'esattezza differenziale del trinomio

$$udx + vdy + wdz,$$

e se si ponesse per unica condizione che le molecole del liquido non escano da'piani meridiani, e che quello in contatto con le superficie del vaso vi rimangano durante il moto, noi potremmo ottenere formole affatto diverse da quelle comunemente adottate: — Se $z = C\rho$ rappresenta la superficie del vaso,

$$u = -Mzx\,,\quad v = -Mzy\,,\quad w = M[z^2 - 2C^2(x^2+y^2)]$$

soddisferanno alle due equazioni idrodinamiche, ed alle condizioni imposte: ma le linee di moto non saranno più rette.

Ci pare quindi di gravissima importanza lo stabilire i casi iu cui necessariamente quel trinomio debba essere integrabile per sè stesso; imperocchè fino a tanto che ciò si riguardi come una mera ipotesi, non vi ha alcuna ragione, analiticamente parlando, che nell'efflusso de'vasi conici, per esempio, abbiano a preferirsi i valori delle velocità dati dal Venturoli a quelli ora assegnati.

EFFEMERIDE PER LE OSSERVAZIONI DI IRIDE NELLA OPPOSIZIONE

COMUNICAZIONE

DEL SIG. G. TAYLOR
di Liverpool.

Passaggio al meridiano di Greenwich.

Maggio	16	AR. 15^h	32^m	52^s.	35	Declin.	22°	37′	30″	9
»	17		31	51.	91			32	40.	8
»	18		30	51.	55			27	47.	4
»	19		29	51.	33			22	51.	1
»	20		28	51.	32			17	52.	0
»	21		27	51.	58			12	50.	6
»	22		26	52.	16			7	47.	0
»	23		25	53.	11			2	41.	6
»	24		24	54.	52		21	57	34.	7
»	25		23	56.	43			52	26.	4
»	26		22	58.	89			47	17.	1
»	27		22	1.	95			42	7.	1
»	28		21	5.	67			36	56.	1
»	29		20	10.	09			31	46.	2
»	30		19	15.	27			26	35.	8
»	31		18	21.	26			21	26.	0
Giugno	1		17	28.	10			16	16.	8
»	2		16	35.	86			11	8.	7

ELEMENTI ED EFFEMERIDI DEI PIANETI RECENTEMENTE SCOPERTI

LETTERA

DEL SIG. G. TAYLOR DI LIVERPOOL AL COMPILATORE

ELEMENTI

N. B. Le longitudini sono contate dall'equinozio medio delle epoche.

	FLORA	IRIDE	METIS	EBE	ASTREA	IGEA	NETTUNO
Epoca Tm Berlino	1 OTTOBRE 1850	16 MAGGIO 1850	19 GIUGNO 1850	1 APRILE 1850	12 AGOSTO 1848	14 LUGLIO 1850	1 GENNARO 1847
Long. media	11° 48′ 33″, 7	243°58′ 39″, 7	63° 52′ 17″, 5	189°45′ 38″, 1	321°38′ 15″, 2	279°58′ 6″, 1	328°13′ 53″, 7
Long. Perielio ϖ	32° 48′ 27″, 4	41° 24′ 10″, 7	71° 4′ 48″, 8	15° 10′ 7″, 1	135°34′ 40″, 7	234°25′ 54″, 1	11° 13′ 41″, 5
Long. nodo asc. ν	100°20′ 13″, 2	259°42′ 50″, 1	68° 29′ 22″, 3	138°31′ 38″, 2	141°26′ 13″, 6	287°15′ 27″, 5	130° 5′ 39″, 0
Inclinazione i	5° 53′ 2″, 8	5° 28′ 16″, 6	5° 35′ 36″, 4	14° 46′ 42″, 4	5° 19′ 24″, 7	5° 47′ 4″, 6	1° 47′ 1″, 5
Angolo di Eccentric. φ	9° 2′ 13″ 7	13° 25′ 49″, 2	7° 1′ 38″, 9	11° 36′ 18′, 6	10° 50′ 38″, 2	6° 53′ 41″, 5	0° 28′ 49″, 2
Moto diurno siderale medio.	1086″, 33020	963″, 31818	962″, 5156	938″, 79562	857″, 81728	624″, 61268	21″, 3774

Massa di Nettuno secondo Sir W. Herschell $= \frac{1}{1878}$

facendo quella del sole = 1

Diametro in miglia inglesi 41500

Densità 0,14 facendo quella della terra = 1

EFFEMERIDI dei Pianeti Novelli.

1850 10 Maggio T. medio di Greenwich	FLORA	IRIDE	METIS	EBE	ASTREA	IGEA
Ascensione retta	$22^h\ 41^m\ 5^s$	$16^h\ 39^m\ 6$	$3^h\ 6^m\ 2$	$12^h\ 37^m\ 5$	$5^h\ 44^m\ 3$	$19^h\ 53^m\ 9$
Declinazione	10° 25′ 7″ S	23° 7′ 3″ S	16° 7′ 1″ N	14° 54′ 8″ N	20° 54′ 6″ N	21° 41′ 2 S
Log. dist. dalla terra	0, 3404	0, 2817	0, 4945	0, 3329	0, 4573	0, 3681
Log. dist. dal sole	0, 3223	0, 4646	0, 3248	0, 4644	0, 3317	0, 4601
20 Maggio						
AR	$22^h\ 58\ 7$	$15^h\ 29^m\ 4$	$3^h\ 27^m\ 8$	$12^h\ 34^m\ 5$	$6^h\ 6^m\ 2$	$19^h\ 55^m\ 9$
Declin.	9° 8′, 5 S	22° 10′, 2 S	17° 45′, 6 N	14° 50′, 0 N	21° 11′, 7 N	21° 27′, 4 S
Log. dist. dalla terra	0, 3153	0, 2752	0, 4933	0, 3531	0, 4653	0, 3469
Idem dal sole	0, 3186	0, 4636	0, 3238	0, 4641	0, 3296	0, 4613
30 Maggio						
AR	$23^h\ 15^m\ 2$	$15^h\ 19^m\ 7$	$3^h\ 49^m\ 8$	$12^h\ 33^m\ 7$	$6^h\ 28^m\ 5$	$19^h\ 55^m\ 5$
Decl.	7° 55′, 8 S	21° 29′, 0 S	19° 10′, 8 N	14° 6′, 8 N	21° 16′ 4 N	21° 19′, 1 S
Log. dist. dalla terra	0, 2885	0, 2814	0, 4911	0, 3745	0, 4724	0, 3271
Idem dal sole	0, 3148	0, 4625	0, 3229	0, 4638	0, 3276	0, 4626
9 Giugno						
AR	$23^h\ 30^m\ 9$	$15^h\ 11^m\ 5$	$4^h\ 12^m\ 1$	$12^h\ 35^m\ 0$	$6^h\ 51^m\ 1$	$19^h\ 52^m\ 7$
Declin.	6° 49′, 2 S	20° 38′, 1 S	20° 27′, 7 N	13° 18′, 8 N	21° 8′, 4 N	21° 16′, 2 S
Log. dist. dalla terra	0, 2600	0, 2905	0, 4878	0, 3964	0, 4782	0, 3098
Idem dal sole	0, 3111	0, 4613	0, 3222	0, 4633	0, 3249	0, 4639

Continuazione delle EFFEMERIDI dei Pianeti Novelli.

1850						
19 Giugno	FLORA	IRIDE	METIS	EBE	ASTREA	IGEA
T. medio di Greenwich						
Ascensione retta	$23^h\ 45^m\ 7^s$	$15^h\ 5^m\ 0$	$4^h\ 34^m\ 8$	$12^h\ 38^m\ 3$	$7^h\ 13^m\ 9$	$19^h\ 47^m\ 6$
Declinazione	5° 51′ 5″ S	19° 52′ 8″ S	21° 33′ 5 N	12° 18′ 5″ N	20° 47′ 5 N	21° 18′ 1 S
Log. dist. dalla terra	0, 2237	0, 3049	0, 4835	0, 4179	0, 4829	0, 2960
Log. dist. dal sole	0, 3073	0, 4599	0, 3217	0, 4628	0, 3243	0, 4652
29 Giugno						
AR	$23^h\ 59'\ 3$	$15^h\ 1'\ 0$	$4^h\ 57^m\ 6$	$12^h\ 43^m\ 4$	$7^h\ 36^m\ 9$	$19^h\ 40^m\ 7$
Declin.	5° 4′, 9 S	19° 16′, 2 S	22° 27′, 6 N	11° 9′, 0 N	20° 13′, 9 N	21° 23′, 1 S
Log. dist. dalla terra	0, 1979	0, 3228	0, 4780	0, 4387	0, 4867	0, 2872
Idem dal sole	0, 3037	0, 4584	0, 3213	0, 4621	0, 3231	0, 4666
9 Luglio						
AR	$0^h\ 11^m\ 3$	$14^h\ 59^m\ 6$	$5^h\ 20^m\ 6$	$12^h\ 50^m\ 0$	$7^h\ 59^m\ 7$	$19^h\ 32^m\ 5$
Decl.	4° 32′, 0 S	18° 50′, 7 S	23° 9′, 7 N	9° 52′, 4 N	19° 27 8 N	21° 29′, 4 S
Log. dist. dalla terra	0, 1646	0, 3432	0, 4780	0, 4553	0, 4895	0, 2840
Idem dal sole	0, 302	0, 45[illegible]5	0, 3213	0, 4614	0, 3220	0, 4650

EFFEMERIDI del Pianeta NETTUNO

1850	10 Maggio	20 Maggio	30 Maggio	4 Giugno	9 Giugno	14 Giugno
Ascensione retta	$22^h\ 35^m\ 18^s,50$	$22^h\ 35^m\ 49^s,59$	$22^h\ 36^m\ 8^s,73$	$22^h\ 36^m\ 13^s,81$	$22^h\ 36^m\ 15^s,62$	$22^h\ 36^m\ 14^s,45$
Declinazione	9° 42′ 24″, 0 S	9° 39′ 42″, 1 S	9° 38″ 11″ 7 S	9° 37′, 53″ 8 S	9° 37′ 53″ 9 S	9° 38′ 12″ 4 S
Log. dist. dalla terra	0, 4812145	0, 4788500	0, 4764185	1, 4751968	1, 4739833	1, 4727865

1850	19 Giugno	24 Giugno	29 Giugno	4 Luglio	9 Luglio
AR	$22^h\ 36^m\ 10^s,26$	$22^h\ 36^m\ 3^s,11$	$22^h\ 35^m\ 53^s,09$	$22^h\ 35^m\ 40^s,27$	$22^h\ 35^m\ 24^s,81$
Declin.	9° 38′ 48″, 4 S	9° 39′ 42″, 0 S	9° 40′, 52″, 1 S	9° 42′ 18″, 7 S	9° 44′ 0″, 2
Log. dist. dalla terra	1, 4716154	1, 4704786	1, 4693844	1, 4683407	1, 4673557

Nuova Cometa scoperta ad Altona nella costellazione del Dragone da M. Peters.

2 Maggio 1850 AR $19^h\ 24^m\ 7'$
Declin. 71° 19′ 34″
Moto diurno in AR. 485 secondi diminuendo
in declin. 8″ aumentando

OSSERVAZIONI FATTE A PARIGI

Tempo medio di Parigi	10 Maggio AR $19^h\ 11^m\ 22^s$	D = + 72° 38′ 17″, 1
	12 Maggio AR 19 6 13 60	D = + 72° 57 26. 6

DE'PESCI E DEL MARE CHE RILUCONO NELLA OSCURITA.

NOTA

DI FRANCESCO ORIOLI
Professore all' Università Romana.

L' articolo dell'ill. Sig. Prof. Carlo Matteucci sulla fosforescenza d'alcuni pesci e del mare (V. questo Giornale pag. 104, 105) mi ha rimesso nella memoria una inedita mia nota, consegnata alla carta sullo stesso argomento fin dall'anno 1831, la quale, siccome quella che serve di conferma, ed in qualche parte di modificazione e di comento al mentovato articolo, così non sarà forse inopportuno il quì stamparla a maniera d' appendice e d'aggiunta.

Dirò pertanto, che mi trovava, dal giorno 1 luglio al 25 d'agosto (prigioniero pur troppo) sulla corvetta austriaca *l'Abbondanza*, quando più volte èmmi accaduto d' esser testimone a vario grado del bellissimo fenomeno recentemente studiato dal celebre fisico Pisano : fenomeno che ho poscia pur veduto sovente nella marina di Corfù, in quella di Malta, ed altrove; ma segnatamente la sera del 31 luglio nell'indicato anno, navigando sopra Nettuno a un 20 miglia di distanza dalla terra, e potendo pur fare alcune poche osservazioni , più che sperienze, co'miei compagni di navigazione, Sigg. Marchese Pietro Petrucci di Pesaro, e professor Faustino Malaguti di Bologna, col permesso, e colla cortese assistenra dei Sigg. Ufficiali di bordo, e dando pur mano altri molti , tra' quali mi piace ricordare il fu Sig. Avvocato Antonio Silvani, il Sig. Avvocato Antonio Zanolini, e il Sig. Conte Carlo Pepoli, bolognesi essi ancora.

Il tempo era bellissimo; la notte placida e serena; il mare d'ogni intorno fortemente fosforico ad ogni muover di flutto.

Noi con un secchio attingemmo l'acqua salsa, e ci fu facile il vedere a sazietà, che, comunque agitando questa, o col dito, o con mano, o con ferro ottuso, od aguzzo nell' estremità, o con corda, o con legno, o con bastone di ceralacca stropicciato o no, quell'agitare destava uno strascico di vivissima luce d'un bianco pallido, ed altrettanto apportava ogni altro sbattimento, conservandosi a lungo nel liquido sì fatta virtù, finchè a poco a poco, di per sè, illanguidiva, e cessava estinta.

Un po' d'olio versatovi sopra non noceva al fosforeggiare, nè una quantità discreta d' alcool, o del così detto mistrac. Una più forte dose di questi due ultimi liquidi, rendeva da prima più acceso lo splendore, e faceva apparire quà e là parecchi punti d' una luce permanente e più fulgida, indi spegneva la potenza fosforica. E spegnevala pure lo scaldar l'acqua fino all'ebollizione.

Intromessevi delle bollicine d'aria (dico nell'acqua salsa e fredda) parve che alla periferia delle bolle lo splendere si facesse più intenso.

Un microscopio (per verità di non molta forza amplificativa), o a dir meglio una lente, lasciava scorgere corpicciuoli notanti di varia forma, che ci sembravano appartenenti al regno animale, ciò di che del resto non è oggi disputa.

Le mani immerse, si giudicò da molti e da me, che serbassero un piccol senso di pizzicore, ed uscivano recando seco qualche punto lucido.

Altro allora non ci fu dato notare: pur da questo poco ci confermammo nella opinione, la quale avevamo letto, che la fonte della luce erano animalcoli, il cui fosforeggiare doveva attribuirsi ad una operazione vitale, manifestantesi ogni volta che quegli animalcoli fossero infastiditi o tormentati in qualche modo. Ancora giudicammo, che questa operazione fosse propria d'un apparato analogo al respiratorio, e consistesse, in un attivarsi dell'atto ossidatore nelle già dette condizioni di molestia, pel quale ciò ch'era prima respirazione oscura diveniva respirazione fosforica, quasi come quando una combustione

lenta non manda luce, nè calore, che cominciano a svolgersi tostochè si avviva essa e diventa rapida.

Posteriormente, in un genere affine, ricorderò sempre la notte del 6 al 7 novembre del 1841. Tornando su vapore inglese da Patrasso a Corfù, con vento lene ed a seconda, noi passammo, per tutto quello spazio, in mezzo ad una sterminata colonna di meduse nuotanti tra due acque, le quali (dico le meduse) di quà e di là, fino a distanza di molte braccia, per l'agitazione del mare prodotto dall'andar della nave, e dal percuotere delle ruote, presentavano uno de' più sorprendenti spettacoli ch'io m'abbia mai visto.

Migliaia di lucidissime stelle brillavano un momento, e si estinguevano da tutte le parti a piccoli intervalli, quasi sommerse ed affogate nell'acqua, su cui molte segnavano rapide linee, quasi stelle cadenti d'un altro cielo. L'acqua, in generale, spumeggiava fosforescente; ed in mezzo a questa luce più sbiadata, nel cielo illune, centinaia e centinaia di deschi della grandezza di altrettante lune piene, splendevano poco men che d'uno splendore di plenilunio. Evidentemente le meduse tormentate dallo sbattimento delle palette e de'flutti commossi, facevansi a quella guisa lucenti per una ragione uguale a quella ond' è che rilucono gli animalcoli dianzi descritti. Qnanto all' apparire delle stelle, io l' attribuiva a frammenti avulsi, che nello schizzar via pieni ancora di vitalità, se non di vita, splendevano ancor più vivamente nella superficie del mare, siccome quelli che meglio da ogni parte erano a contatto dell'aria vitale.

Gli esperimenti del Matteucci sono in massima parte, d'un altro genere, quantunque il troppo laconismo della Nota da lui stampata renda necessaria un pò di riflessione per intendere quel ch'egli ha voluto esporre. Parla ivi principalmente di *pesci fosforescenti*, senza determinazione di generi o di specie; nè indica di qual maniera di fosforescenza favelli: donde nasce il dubbio, se intenda dire di quegli abitatori dell'acque, ne'quali il fosforeggiare è operazione fisiologica o patologica della vita, come nelle meduse testè ricordate (che sono per vero mollu-

schi anzichè pesci), o di quegli altri, che solamente dopo morte rilucono per putrefazione, come il legno fracido. Solo raziocinando si capisce che tratta di questi ultimi, perchè senza di ciò si porrebbe in contraddizione con se medesimo, quando racconta, che *la luce de'pesci fosforescenti dura per buona pezza, e senza diminuir sensibilmente, in mezzo ad alcuni gas che non contengono la minima quantità d'ossigeno;* e quando poco dopo afferma, che *se si pone un pesce ancor vivo in un gas privo d'ossigeno, non diviene fosforescente neppure dopo parecchi giorni; e ciocchè è più singolare, se in appresso si pone all' aria, non dà più luce.* Infatti si legge da ultimo, a maggior prova: *Da tali esperienze si potrebbe concludere, che la luce de' pesci fosforescenti è prodotta da una sastanza che si sviluppa nella putrefazione, e che esige perciò la presenza dell' ossigeno, ma che risplende indipendentemente dal medesimo, quasi per un'azione fisica.*

Nondimeno debbo confessare che le spiegazioni del dotto fisico e le sue deduzioni, non mi paiono rigorosamente discendere dalle premesse de'cimenti ch'ei descrive.

Certo il genere di fosforescenza ch'egli ha scelto a principale argomento di ricerche non può confondersi con quello del quale io parlava di sopra. Qui veramente è un prodotto morto della putrefazione quel che risplende. Questo prodotto, siccome raccolgo dalla nota ch'io qui esamino, è insolubile nell'acqua, ma tale che vi si stempera, e fa latteggiarla (nello stato almeno d'impurità in che i pesci putrescenti lo abbandonano al montovato liquido). Non che paia giusto però il conchiudere ch'esso non contien fosforo, così giudicando per solo aver veduto, che mentre questo cessa di risplendere in una boccia piena d'aria comune, e contenente una piccolissima quantità di etere fosforico, l' acqua invece ove i pesci putrescenti sonosi stemperati seguita a rilucervi. Come se nel composto animale non potesse formarsi qualche ignota combinazione fosforica, la quale nelle quì dette condizioni, meglio del fosforo puro, conservasse la facoltà di fosforeggiare, non ostante la presenza dell'etere.

Nè mi par giusto l'affermare, che, salvo la necessità della

presenza dell'aria vitale per determinare la formazione del prodotto fosforico durante il putrefarsi, l'aria vitale non abbia parte all'eccitamento effettivo dello splendore. I fatti addotti non lo provano. Se i suoi pesci, e l'acqua delle lor lavande, seguitavano à rilucere per qualche tempo ne'gas non misti ad ossigeno, e sotto l'olio, e nel voto barometrico, ben può ciò attribuirsi al pabolo dell'aria vitale condensata e disciolta, o dentro essa acqua, o dentro i vasi aeriferi, e le porosità di essi pesci, o nelle lor cavità idrofore. Chiaro è che si fatti depositi e quasi magazzini possono bastare a mantenere per lungo tempo la minima combustione che alla fosforescenza è sufficiente; e dico minima perchè tale io reputo ogni ossidazione donde luce senza calor si svolge. Il dar sola luce nella combustione non dipende dalla quantità di materia che s'ossida ad ogni istante, ma dall'energia del conflitto chimico, e dal bastevole ravvicinamento de'pochi o molti atomi ossidantisi donde nascono le vibrazioni eteree, le quali, anche con poca densità (per così esprimermi) son atte a farsi sentire alle delicatissime fibre nervee della retina. Il dar luce e calore vuole invece una maggior massa di particelle combinantesi, acciocchè le ondulazioni calorifiche indi destate, ed aggiunte alle lucifiche, acquistino intensità sufficiente a renderle percettibili al grossolano e pigro senso del tutto.

Conferma questa dottrina l'essersi notato che l'acqua delle lavande, contenente in dissoluzione il composto fosforico, perde notabilmente la potenza di risplendere dopo alquante agitazioni entro i gas privi d'aria vitale, e che nel vuoto ne resta presto spogliata: siccome non meno l'aver veduto, che nel contatto coll'aria comune l'ultimo ad estinguersi è il fosforeggiare della superficie con che il liquido tocca l'aria.

Gli altri esperimenti dimostrano che alla generazione del composto fosforeggiante il contatto del gas ossigeno è in realtà necessario, gli atomi associandosi in altro modo quando esso non interviene; e dimostrano altresì che questo composto non ancora analizzato, nè qualitativamente, nè quantitativamente, è alterabilissimo dalle reazioni che gli si faccian patire

dagli acidi, o dagli alcali, o dall'alcool e dall' etere solforico, o da una elevazione di temperatura che passi i 38° ai 40° cent., mentre un abbassamento della medesima di pochi gradi sotto lo zero sospende la virtù fosforica, ma non la estingue.

Altri faccia soggetto d'ulteriori studi, se nelle condizioni normali, quel produrre dopo la morte de'pesci il fenomeno fin qui discorso, proceda da un composto inorganico, o da qualche nuova organica combinazione, e da una specie di nuovi viventi, i quali nascano *ex putri* per generazione spontanea: questione di esclusiva competenza della zoologia e fitologia microscopica.

Finalmente, per tornare a quel che propriamento è fosforescenza dell'acqua marina, cioè alla fosforescenza da me osservata navigando, l'essersi notato dal Matteucci che la temperatura di + 3° o 4° cent., o l'aggiunta dell'ammoniaca, dell'alcool, e degli acidi, aumenta la lucentezza, come in parte io pur vidi, e di sopra descrissi, riceve facile spiegazione dicendo significar ciò l'effetto d'uno stimolo vivo, che, prima di distruggere la vitalità, l'accresce, ed accrescendola aggiunge energia straordinaria alla funzione per la quale gli animalcoli natanti, come a suo luogo s'è detto, fosforeggiano.

SULLE APPARIZIONI DELL' AURORA BOREALE NEI TEMPI EQUINOZIALI E NEI SOLSTIZIALI

NOTA

DI FRANCESCO PISTOLESI

Il Sig. Hansteen in una memoria diretta alla R. Accademia di Bruxelles ha confermato, mediante le apparizioni dell' Aurola boreale in Cristiania dall'aprile 1837 al settembre 1846, quanto già annunziò il Mairan, cioè che le apparizioni nei dintorni dei Solstizj sono in minor numero che in quelli degli equinozj (L'Institut. n. 710, p. 159, anno 1847).

Ho voluto verificare cosa dichiarassero sul proposito i dati da me raccolti. Desumendo dalla mia Nota meteorologica inserita nei *Nuovi Annali delle scienze naturali* di Bologna (tom. 8.° p. 365, anno 1842) le apparizioni dell'aurora boreale che ho notate dall'Era cristiana a tutto il 1840 per i mesi spettanti agli equinozj ed ai solstizj, trovo quanto appresso

Equinozio di primavera (marzo e aprile) .	N.°	462
Equinozio di autunno (settembre e ottobre)..	»	597
	N.°	1059
Solstizio di verno (dicembre e gennajo). .	N.°	382
Solstizio di estate (giugno e luglio) . . .	»	101
	N.°	484

I suddetti numeri confermano i resultati di Mairan e del sig. Hansteen.

Prendendo ora le apparizioni delle aurore nei quattro giorni 20, 21, 22 e 23 dei mesi di marzo, giugno, settembre e dicembre, i quali giorni si riferiscono ai rammentati punti cardinali, abbiamo un risultato quasi conforme:

Giorni di marzo	N.°	35
» di settembre. . . .	»	50
Totale negli equinozj. .	N.°	85
Giorni di giugno	N.°	6
» di dicembre. . . .	»	32
Totale nei solstizj . .	N°.	38

Credo che non dispiacerà la consonanza che passa fra i dati e la seguenti proporzione

$$1059 : 484 :: 85 : 38,8$$

perchè questa consonanza dà valido appoggio ai dati medesimi.

Da una *Lista delle aurore boreali insigni, delle più rimarchevoli e di quelle vedute in Italia od in altri siti ancor più meridionali a tutto l'anno* 1843 da me compilata nel 1847, si ha quanto segue:

Equinozio di primavera (marzo e aprile). .	N.°	58
» di autunno (settembre e ottobre) . .	»	94
	N.°	152
Solstizio di verno (dicembre e gennajo). .	N.°	58
» di estate (giugno e luglio) . . .	»	24
	N.°	82

Questi nuovi numeri non solo ratificano la maggior frequenza delle aurore boreali negli equinozj a fronte dei tempi solstiziali, ma indicano ancora che per le aurore insigni questa frequenza si accresce di circa un quinto.

SOPRA UN TEOREMA DEL MÖBIUS RIGUARDANTE LA SPECIE DELLA SEZIONE CONICA CHE PASSA PER CINQUE PUNTI DATI IN UN PIANO

NOTA

DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS
di Padova.

Il Möbius dimostra mediante il suo calcolo baricentrico (Der barycentrische Calcul. Leipzig. 1827. §. 255) che se per quattro A I K L dei punti dati si facciano passare due parabole, la conica A I K L M sarà un'ellisse oppure un'iperbola, secondo che il quinto punto M cadrà dentro di una parabola e fuori dell'altra, oppure dentro o fuori di ambedue.

I principj della Geometria di derivazione danno facile modo di ridurre questo teorema ad altro per sè stesso evidente. Mediante quella derivazione da figura a figura che io chiamai

trasformazione (Vol. IV. dei Nuovi Saggi dell' Accademia di Padova), e che era già conosciuta per le opere dei Poncelet, Steiner, ec., le coniche AIKL possono trasformarsi in linee rette passanti per un punto fisso A'. Tra i varj modi per istabilire questa trasformazione, uno dei più elementari sarà di tener fissi i tre punti I K L, e per qualsiasi punto X determinare il suo trasformato X' in guisa che sieno eguali e rivolti nello stesso senso i due angoli IKX' XKL, nonchè i due ILX' = XLK, il che dà pure KIX' = XIL. Inoltre se una retta CD non passi per alcuno dei punti I K L la sua trasformata sarà una conica IKLC'D'.

Ora se in questa figura trasformata il punto A' sia unito ad un punto qualunque M' è palese che la retta A'M' toccherà la conica IKLC'D' solamente quando M' venga a situarsi sopra una delle tangenti condotte dal punto A'; e che ogni qual volta il punto M' passi dall'una all'altra parte di una di queste tangenti, la retta A'M' si cangerà da secante in non-secante o viceversa.

Da ciò risulta, tornando alla figura primitiva, che se il punto M si muove comunque, la conica AIKLM (di cui la retta A'M' è la trasformata) tocca una data retta CD quando il punto M appartiene ad una delle due coniche che soddisfanno a tal condizione, e che ogni qualvolta il punto M attraversi una sola di queste due coniche, la conica AIKLM se prima tagliava la retta CD, poscia non la taglierà, o viceversa. Conseguenza che la legge di continuità ci lasciava facilmente prevedere.

Se la retta CD si supponga a distanza infinita, le due coniche AIKL che la toccano sono due parabole, quelle AIKLM che la tagliano sono iperbole, le altre sono ellissi: così si ha il teorema del Möbius.

Nel caso che dal punto A' non si possono condurre le due tangenti alla conica IKLC'D' (trasformata della retta CD situata a distanza infinita) è evidente che essa sarà tagliata da tutte le rette A'M': perciò se pei punti A I K L non può passare alcuna parabola, tutte le coniche AIKL saranno iperbole.

SULL'INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONI DIFFERENZIALI

STUDII

DEL PROF. GASPARE MAINARDI

(Continuazione V. pag. 50).

Dimostrerò in seguito il Teorema ricordato con una analisi diretta la quale condurrà a conseguenze più generali.

L'uso delle funzioni determinanti indicato nel §. 4.° si applica a qualunque equazione differenziale lineare

$$(1) \qquad P_0 y^{(n)} - P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} \ldots\ldots \pm P_n y = 0$$

quando venga preventivamente ridotta alla forma

$$(2) \qquad A_0 y^{(n)} - A_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots \pm A_n y = 0.$$

Per conseguire l'intento, osserviamo che essendo

$$A_0 = S\left(p_1 p'_2 p''_3 \ldots p_{m-1}^{(m-2)}\ p_m^{(m-1)}\right),\quad A_1 = S\left(p_1 p'_2 p''_3 \ldots p_{m-1}^{(m-2)}\ p_m^{(m)}\right)$$

$$d_x A_x = S\left(p'_1 p'_2 p''_3 \ldots p_{m-1}^{(m-2)}\ p_m^{(m-1)}\right) + S\left(p_1 p''_2 p''_3 \ldots p_{m-1}^{(m-2)}\ p_m^{(m-1)}\right)$$

$$\ldots + S\left(p_1 p'_2 p''_3 \ldots p_{m-1}^{(m-1)}\ p_m^{(m-1)}\right) + S\left(p_1 p'_2 p''_3 \ldots p_{m-1}^{(m-2)}\ p_m^{(m)}\right)$$

tutti i termini del secondo membro sono nulli identicamente, eccettuato l'ultimo, il quale è la stessa A_1 talchè si ha

$$d_x A_0 = A_1 .$$

Indichiamo con ω il moltiplicatore che rende la equazione (1) identica alla (2), ed avremo

$$A_0 = \omega . M_0 , \quad A_1 = \omega M_1 ,$$

ossia

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{M_1}{M_0} - \frac{dM_0}{M_0} ,$$

e

$$\omega = \frac{1}{M_0} e^{\int \frac{M_1}{M_0} dx} .$$

§. 9.° La integrazione delle equazioni differenziali non lineari presenta difficoltà ancora più gravi. Ecco un metodo che mi si offerse considerando alcuni facili problemi di geometria (*).

Cerchiamo la trajettoria ortogonale delle ellissi omofocali? Riferite le curve alle rette in cui giacciono gli assi delle ellissi, rappresentata una di queste linee colla equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{e supposto} \qquad a^2 - b^2 = c^2 ,$$

la equazione della trajettoria che si ottiene eliminando a, b dalla

$$1 - \frac{b^2 x}{a^2 y} y' = 0$$

sarà

$$(1) \qquad (x + yy')(xy' - y) = c^2 y.$$

Per integrarla vi introduco un moltiplicatore M, e la decompongo nelle

$$(2) \qquad x + yy' = My' , \quad M(xy' - y) = c^2$$

Elimino y' ed ottengo

$$(3) \qquad c^2(M - y) + M^2 y = M(x^2 + y^2),$$

la quale differenziata ci dà

$$M'(c^2 + 2My - x^2 - y^2) = (M^2 + c^2)y'$$

e divisa per la (3), scritta nel seguente modo

$$M(c^2 + 2My - x^2 - y^2) = (M^2 + c^2)y,$$

(*) Questo argomento si trova esposto in una Memoria inserita nel vol. 24 degli Atti della Società Ital. delle Scienze.

fornisce $\frac{M'}{M} = \frac{y'}{y}$ ossia $M = A.y$: essendo A la solita costante arbitraria . Avremo quindi l'integrale cercato

$$\frac{Ax^2}{c^2(A-1)} - \frac{A}{c^2}y^2 = 1$$

che rappresenta un sistema di ellissi o iperbole omofocali: come è ben noto.

Proponiamoci di determinare la curva della quale ogni tangente forma angoli uguali coi raggi vettori che uniscono il punto di contatto con due punti dati? La linea cercata sia riferita a due assi ortogonali, uno dei quali passi per i punti dati, l'altro divida in due parti eguali la retta che li congiunge; la lunghezza della quale indico colla lettera a. La equazione differenziale della linea sarà

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{y - (x - a)y'}{\sqrt{[y^2 + (x - a)^2]}},$$

ovvero

$$(1) \quad 2y'(x^2 + y^2) = (2x - a)(yy'^2 + 2xy' - y).$$

Moltiplicata questa equazione per un fattore M, si decomponga nelle

$$(2) \quad My' = 2x - a\ ;\ M(yy'^2 + 2xy' - y) = 2(x^2 + y^2);$$

elimino y' ed ho

$$(3) \quad 2M(x^2 + y^2) = y(2x - a)^2 + 2Mx(2x - a) - My^2.$$

Differenzio questa equazione ed eliminato di nuovo y' ottengo

$$2M'(y^2 - x^2 + My + ax) = \frac{2x - a}{M}[(2x - a)^2 + M^2]$$

la quale divisa per la (2) scritta come segue

$$2M(y^2 - x^2 + My + ax) = y[(2x - a)^2 + M^2]$$

ci dà

$$\frac{M'}{M} = \frac{2x - a}{My} = \frac{y'}{y}, \quad \text{onde} \quad M = Ay,$$

e finalmente ottengo l'integrale cercato

$$A(A+2)y^2 = (2x - a)^2 + 2Ax(x - a)$$

che è la equazione di una conica avente i fuochi nei punti dati, come sappiamo.

Cerchiamo le trajettorie oblique delle ellissi omofocali? Usando le denominazioni del primo esempio, indicata colla lettera n la tangente dell'angolo d'incontro, avremo da eliminare i parametri a, b dalle equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 - b^2 = c^2, \quad ayy' + b^2x = n(a^2y - b^2xy'),$$

e siccome

$$a^2 = \frac{x(1+ny')}{x(1+ny') - y(n-y')}c^2,$$

$$b^2 = \frac{y(n-y')}{x(1+ny') - y(n-y')}c^2,$$

la equazione della trajettoria sarà

(1) $[nx+y+y'(ny-x)][x-ny+y'(nx+y)] = c^2(1+ny')(n-y')$.

Moltiplicata per M, si decomponga nelle

(2) $M[nx+y+y'(ny-x)] = c^2(n-y')$;

$$x - ny + y'(nx+y) = M(1+ny').$$

Eliminato y' si ottiene

(3) $(x^2+y^2+c^2)M = x(c^2+M^2)$,

la quale differenziata, ed eliminato nuovamente y', fornisce

$$(M^2 - c^2)[x(x-M)(M+xM') + y(xM' - M)] = 0.$$

Si hanno per ultimo le due equazioni

$$n(x-\mathrm{M})(x\mathrm{M})' + yx^2\left(\frac{\mathrm{M}}{x}\right)' = 0,\ \mathrm{M}y^2 = (x-\mathrm{M})(c^2 - x\mathrm{M})$$

dalle quali deduciamo

$$n\frac{(x\mathrm{M})'}{x\mathrm{M}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c^2}{x\mathrm{M}}-1\right)}} + \frac{\left(\frac{\mathrm{M}}{x}\right)'}{\frac{\mathrm{M}}{x}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{M}}{x}\right)}} = 0;$$

ed integrando

$$2n.\mathrm{Ang.\,tang.}\sqrt{\left(\frac{c^2}{x\mathrm{M}}-1\right)} - \log\frac{1+\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{M}}{x}\right)}}{1-\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{M}}{x}\right)}} = \mathrm{cost.}$$

da cui, sostituendo il valore di M, caviamo l'integrale cercato.

Proponiamoci ancora d'integrare la equazione

$$(1-x^2)y'^2 + (1-x)(x-2y)y' + y(y-1) = 0,$$

ossia

$$(1)\qquad (1-x)y'[(1-x)y' + (x-2y)] = y(1-y).$$

Mediante il solito moltiplicatore M ottengo le

$$(2)\quad y'(1-x) = \mathrm{M}y,\ \mathrm{M}[(1-x)y' + (x-2y)] = 1-y$$

da cui, eliminato y', desumo

$$(3)\qquad y(1-\mathrm{M})^2 = 1-\mathrm{M}x\ .$$

Differenziando questa equazione, ed eliminando nuovamente y', con facili riduzioni ottengo

$$\mathrm{M}'(1-x) = \mathrm{M}(1-\mathrm{M}),$$

quindi

$$\mathrm{M} = \frac{1}{1+\mathrm{A}(1-x)},$$

e finalmente l'integrale cercato

$$y(1-x) = \frac{1+\mathrm{A}}{\mathrm{A}}\left(\frac{1+\mathrm{A}}{\mathrm{A}} - x\right).$$

OCCULTAZIONE DI α TORO
Osservata nel Pontificio Ossarvatorio di Campidoglio nel giorno 19 marzo 1850

NOTA

DAL PROF. IGNAZIO CALANDRELLI

letta nell'accademia de'nuovi Lincei nella tornata del 16 aprile 1850.

La base e il fondamento pel calcolo delle osservazioni è la cognizione esatta della posizione geografica del luogo dell' osservatore. Sorgeva appena la Specola del Collegio romano nel 1787, e il prof. Giuseppe Calandrelli fondatore e direttore di questo scientifico stabilimento coll'esame delle osservazioni fatte dal P. Boschovich nel museo Kircheriano, e colle proprie osservazioni ne determinava la latitudine. Col mezzo poi delle occultazioni delle fisse dietro la Luna, le quali osservazioni si trovano riportate nelle conoscenze dei tempi di Parigi pubblicate dal cel. La-Lande determinava la longitudine della Specola rispetto al meridiano di Parigi. Le osservazioni di Conti, di Ricchebach , di Oriani, e le ultime del P. De-Vico confermarono i risultamenti ottenuti dal Calandrelli , e la posizione geografica della Specola del Collegio romano è in tal maniera determinata che nulla di più esatto può desiderarsi.

Non può dirsi egualmente del piccolo osservatorio che sorge sulla torre orientale del Campidoglio. Dal 1828 epoca in cui fu eretto fino ai tempi presenti niuna osservazione fu direttamente instituita per fissarne la geografica posizione. Nel 1842 fu a me affidata la direzione di questa Specola, ma siccome sembrava che in altro luogo dovesse erigersi l' osservatorio della Università, così non ebbi coraggio di fare una serie di osservazioni dirette a fissarne la latitudine e la longitudine. Nella memoria pubblicata dagli astronomi del Collegio romano Conti e Ricchebach, nella quale con osservazioni geodetiche si fissa la posizione geografica di moltissimi luoghi di

Roma e delle sue adiacenze, risulta la latitudine di Campidoglio di 41°. 53′. 33″. 3 e la longitudine all'oriente contata dal meridiano di Parigi di 10°. 8′. 37″. 02, per cui la differenza de' meridiani in tempo è di 40′. 34″. 77. Di questi elementi mi sono finora servito nel calcolo delle osservazioni.

Ora però che per sovrana clemenza dell'immortale PIO IX ha sede stabile nel Campidoglio l'accademia de' nuovi Lincei; e l'annesso osservatorio astronomico, sarà mio pensiero fissarne la posizione geografica con osservazioni dirette. E poichè riguardo alla longitudine bastano le occultazioni delle fisse dietro la Luna, così mi occuperò di queste nel corrente anno.

Darò conto intanto della occultazione di α Toro del giorno 19 Marzo passato. Il fenomeno accadeva un' ora circa dopo il mezzogiorno, e non avendo telescopi di forte ingrandimento, disperava di poterlo osservare. Il cielo limpidissimo, la luna nella parte opposta al sole che già declinava verso ponente, contribuì alla osservazione, e colla parallattica cui è annesso un ottimo telescopio, potei vedere la fissa pochi istanti prima della immersione.

Ecce dunque l'osservazione e il calcolo della medesima.

Occultazione di α Toro.

1850 Marzo 19 Tempio med. a Roma

Immersione. . . .	0.^{or} 57′. 10″
Emersione	1. 57. 59

Posizione apparente della stella rispetto al piano dell'equatore e della ecclittica

$$A = 66.^{\circ}\ 49'.\ 39''.\ 60$$
$$D = 16.\ 12.\ 2.\ 14\ B$$
$$L = 67.\ 41.\ 26.\ 40$$
$$\lambda = 5.\ 28.\ 40.\ 50\ A$$

Dalle effemeridi di Milano ricavai la longitudine vera della luna pel mezzodì medio a Roma

$$L' = 66^\circ.\ 24'.\ 19''.\ 8$$
$$\lambda' = 5,\ 3.\ 10.\ 6\ A$$

Colla interpolazione dedussi il movimento orario della Luna in longitudine e in latitudine

$$m = +\ 34'.\ 42''.\ 9$$
$$n = +\ 0.\ 44.\ 9$$

Ottenni poscia la longitudine e la latitudine della Luna negli istanti della immersione ed emersione

$$L'' = 66^\circ.\ 57'.\ 27''.\ 5 \qquad \lambda'' = 5^\circ.\ 2'.\ 27''.\ 8\ A$$
$$L''' = 67,\ 32,\ 38.\ 8 \qquad \lambda''' = 5,\ 1,\ 42.\ 3\ A$$

I movimenti dunque veri in longitudine e in latitudine nello intervallo delle osservazioni saranno

$$\mu = +\ 35'.\ 11''.\ 3$$
$$\mu' = +\ 0,\ 45.\ 5$$

Dalle stesse effemeridi ricavai i semidiametri orizontali della Luna negli istanti delle osservazioni

$$\rho = 15'.\ 58''.\ 2$$
$$\rho' = 15,\ 58.\ 4$$

Posta la latitudine dell'osservatorio di $41^\circ.\ 53'.\ 33''.\ 3$ e preso lo schiacciamento dello sferoide terrestre stabilito dal celebre Oriani nella sua trigonometria sferoidica risulta l'angolo della verticale $\varphi = 10'.\ 11''.\ 2$, e il raggio della terra sotto questa latitudine $\nu = 0.\ 9983269$; sarà quindi la latitudine corretta $l = 41^\circ.\ 43'.\ 22''.\ 1$, e la parallasse orizontale della Luna nel momento delle osservazioni

$$\pi = 58'.\ 24''.\ 9$$
$$\pi' = 58.\ 25''.\ 9$$

Colle note formole calcolai la longitudine e l' altezza del nonagesimo, e quindi le parallassi di longitudine e di latitudine.

Pel tempo dell'immersione.

$$N = 28^\circ.\ 20'.\ 32''.\ 8$$
$$h = 56.\ 21.\ 33.\ 7$$
$$\rho = +\ 30.\ 56.\ 8$$
$$\rho' = -\ 35.\ 54.\ 1$$

Pel tempo dell'emersione.

$$N = 40^\circ.\ 16'.\ 39''.\ 6$$
$$h = 61.\ 21.\ 43.\ 2$$
$$\pi = +\ 23.\ 41.\ 9$$
$$\pi' = -\ 32.\ 13.\ 8$$

Secondo il metodo proposto da Carlini si ha la longitudine e la latitudine vera della Luna negli istanti delle osservazioni delle seguenti formole

$$L'' = L - p - \frac{\rho \text{sen}.\alpha}{\cos.\beta}$$

$$\lambda'' = \lambda - p' - \rho\cos.\alpha$$

$$L''' = L - \pi + \frac{\rho \text{sen}.\alpha'}{\cos\beta}$$

$$\lambda''' = \lambda - \pi' - \rho\cos.\alpha'$$

nelle quali ρ è il semidiametro orizontale della Luna corrispondente alla metà dell'intervallo che separa le due osservazioni; $\beta = \lambda - \left(\frac{p' + \pi'}{2}\right)$, e finalmente α ed α' sono due angoli che si hanno dalle formole

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = \frac{\mu' + \pi' - p'}{(\mu + \pi - p)\cos.\beta}$$

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha) = \frac{(\mu + \pi - p)\cos.\beta}{2\rho\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}$$

Dal calcolo numerico ottenni

$\alpha = 52°.\ 53'.\ 39''.\ 5$
$\alpha' = 70.\ 58.\ 42.\ 7$

$L'' = 66°.\ 57'.\ 42''.\ 5$
$\lambda'' = 5.\ 2.\ 26.\ 5$ A

$L''' = 67°.\ 32'.\ 53''.\ 8$
$\lambda''' = 5.\ 1.\ 41.\ 0$ A

Dal paragone di queste posizioni con quelle ottenute dalle effemeridi si hanno gli errori in longitudine di 15″ e nelle latitudini di 1″. 3. La congiunzione poi accadde nel giorno Marzo 19 alle 2.or 12′. 44″. 9 di tempo med. a Roma, essendo in questo momento

Longitud. della luna = 67°. 41′. 26″. 4
Latitud. . . . . = 5. 1. 39. 9 A

Non avrei trattenuta l'Accademia sulla semplice occultazione di una stella, se non dovessi communicare alla medesima alcune riflessioni che possono essere utili alla scienza, e che volentieri sottometto al savio giudizio degli astronomi. Da poi che la perfezione degli stromenti ottici ci porge il vantaggio di poter osservare gli astri nel pieno giorno, a me sembra 1.° che in tali osservazioni il momento della emersione sia più deciso di quello della immersione. Nel primo giorno il bordo oscuro della Luna non è visibile, e un occhio assuefatto alla luce del giorno, stanco dalla impressione di questa luce può giudicare che sia sparita la stella quando realmente non siasi occultata. Il bordo lucido poi si presenta ben terminato, privo di quella viva luce con cui risplende nella notte, e progettato sull'azzurro del cielo: fissando dunque l'occhio sul punto del bordo da cui deve emergere la stella, si potrà con certezza notare il tempo della emersione. 2.° Che in tali osservazioni possa decidersi qualche cosa sul diametro apparente della fissa. Il cel. Herschel assegna all' α del Toro un diametro di 1″½. Ma se la fissa ha un diametro sensibile, il fenomeno della im-

mersione e della emersione non deve essere istantaneo, come risulta finora da tutte le osservazioni fatte con ottimi telescopi. Se il diametro sia solamente di 1″, avendo riguardo al movimento medio della Luna, dovrebbero trascorrere due secondi di tempo dal principio della ecclisse fino alla totale disparizione della stella. Ora se l'occhio non percepisce la successiva disparizione della stella non si potrebbe ciò attribuire alla vivacità della luce con cui esse risplendono di notte, al continuo scintillamento di cui sono dotate, e alla luce troppo viva della Luna? Ma tutte queste cause cessano nel pieno giorno. La luce della stella e della luna è debole, calma, e tranquilla; ogni scintillamento cessa o è molto diminuito; cessa quindi quello splendore che circonda il corpo della stella, e con telescopi di buona costruzione io sono persuaso che potrebbe distinguersi il corpo netto della stella; e giudicare in qualche modo del suo apparente diametro. Poichè il bordo oscuro della Luna non è visibile nel pieno giorno, l'osservazione propria a questa ricerca è l'emersione. Io non era affatto prevenuto, e se, non mi sono illuso, posso assicurare di avere notato un piccolo tempo dal momento in cui vidi apparire la fissa nell' emergere al momento in cui mi sembrò tangente al bordo lunare. — Gli astronomi che posseggono ottimi stromenti potranno colle loro delicate osservazioni o confermare questo fatto, o dimostrare che la mia fu una illusione.

NOTIZIE BIBLIOGRAFICHE

The Cambridge and Dublin Mathematical Journal.

Giornale matematico di Cambridge e di Dublino pubblicato dal Sig. W. Thomson N. XXII.

1.° *Sulla teoria matematica dell' elettricità in Equilibrio.* Investigazioni geometriche relative ai conduttori sferici di W. Thomson. Art. VI. Avendo già trovate nei numeri precedenti l'espressione della forza per un punto su di un conduttore

sferico elettrizzato, si distende questa a più punti, e si conclude che l'azione tra un conduttore qualunque ed una sfera elettrizzata passa sempre pel centro di quest'ultima.

2.° *Sopra alcuni teoremi del calcolo delle operazioni di* W. F. Donkin. In questa Memoria sono specialmente da notarsi delle analogie, che passano fre le potenze, ed i differenziali, le quali servono in molti casi per facilitare l'integrazione delle equazioni differenziali.

3.° *Sulle curve a doppia curvatura e superficie sviluppabili* di A. Cayley. Questa memoria con piccole alterazioni è stata pubblicata nel Giornale di Liouville t. X, ed è qui posta come preambolo alla seguente.

4.° *Sulla classificazione delle curve a doppia curvatura di* G. Salmon. Esposti i principii di tale classificazione dedotti dalla intersezione delle superficie curve, si dimostra in particolare come la intersezione di due superficie di 2.° ordine produce tutte le curve possibili di terzo grado.

5.° *Sopra le superficie sviluppabili che nascono da due superficie di second'ordine di* A. Cayley. Due superficie qualunque considerate in relazione l'una dell'altra danno origine ad una intersezione, o come l' autore lo chiama *Intersetto*, e ad una circoscritta sviluppabile o Inviluppo; talchè l' intersetto è lo spigolo di regresso di una certa sviluppabile che può esser chiamato Intersetto sviluppabile. L' autore cerca le equazioni a queste superficie nel caso delle superficie di 2° ordine.

6.° *Sopra i teoremi nello spazio analoghi ai teoremi di Pascal, e di Brianchon nel piano* di T. Weddle. Molte e curiose proprietà si dimostrano intorno alle superficie di second'ordine che passano pei vertici di un poliedro inscritto, o toccano le faccie di un poliedro circoscritto, e singolarmente belli sono i teoremi intorno al parallelepipedo inscritto e all' ottaedro circoscritto all'ellissoide.

7.° *Sulle corde bifocali delle superficie di second' ordine* di I. Rutledo. Questo lavoro fa seguito ai lavori di Mac Cullagh su la nuova maniera di concepire la generazione delle superficie di second' ordine. Si cercano specialmente le proprietà

delle rette, che si appoggiano sopra due curve focali, e sono terminate da una parte qualunque alla superficie curva di second' ordine. Molti teoremi già noti sono in nuova maniera dimostrati, e molti altri nuovi affatto sono per la prima volta proposti, alcuni dei quali relativi alla linea geodesica.

8.° *Dimostrazione analitica di un teorema di Carnot nella teoria delle trasversali* di W. Walton. Questo è il teorema finale in cui Carnot nell'opera citata parla delle intersezioni delle linee rette, e che non è stato finora dimostrato che sinteticamente.

SULL' APPLICAZIONE DEL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE ALLE QUESTIONI DI ANALISI INDETERMINATA.

NOTA

DEL DOTTOR GABRIO PIOLA

DI MILANO

membro corrispondente dell'Accademia Pontificia de' nuovi Lincei,

letta dal prof. Paolo Volpicelli nella medesima il 16 Aprile 1850.

Fino dall'anno 1831, in una memoria inserita negli Annali delle scienze stampati a Padova, ebbi a dire che il calcolo delle differenze finite poteva applicarsi con felice successo alla risoluzione di varie questioni di analisi indeterminata, e che bastava riflettere alla struttura di quello e all' indole di queste per comprendere la verità della proposizione. Ognuno infatti capisce che le variabili assoggettate alla condizione di prendere per valori numeri interi, crescono e calano per differenze finite: e inoltre, che essendo finito l'intervallo fra un' equazione avverata da certi valori, e la stessa equazione più prossimamente avverata da altri valori, si può introdurre il giuoco degli indici. Eppure un punto di vista sì ovvio pare non abbia fermato abbastanza l'attenzione di varii insigni geo-

metri che scrissero della scienza dei numeri. Nella ricordata memoria, volendo aggiungere all'asserzione una prova di fatto, mostrai come il metodo notissimo per la risoluzione delle equazioni indeterminate di primo grado a due incognite, si potea far discendere dalla integrazione di un'equazione alle differenze finite lineare di second' ordine. Pongo ora qui un secondo esempio a fine di non lasciar perire un' idea che potrebbe diventar utile anche per ricerche di maggior portata, in un ramo di analisi tuttora ingombro di oscurità, e dove furono altresì smarriti alcuni metodi già conosciuti : cito i teoremi di Fermat, dei quali è perduta la chiave.

Mi propongo di trovare due nuove formole per mezzo delle quali s'introduca nella risoluzione delle equazioni indeterminate di secondo grado a due incognite un perfezionamento simile a quello che si osserva nella soluzione delle equazioni indeterminate a due incognite di primo grado. Sappiamo che data l'equazione

$$ax - by = c$$

se α, β sono due valori particolari di x, y atti a verificare l'equazione, tutte le soluzioni possibili sono comprese nelle due formole

$$(1) \qquad x = b\omega + \alpha; \quad y = a\omega + \beta;$$

essendo ω una variabile la quale può prendere tutti i valori interi positivi e negativi, a meno che molti di essi non siano esclusi dell'altra condizione che esige per x, y valori non solo interi, ma anche positivi. Vediamo pertanto di ottener formole contenenti questa arbitraria ω, le quali somministrano tutte le soluzioni anche dell'equazione di secondo grado

$$(2) \qquad y^2 = ax^2 + b.$$

Eulero nel capo VI della sua analisi indeterminata suppone che si conoscano due valori particolari f, g di x, y i quali soddisfacciano alla precedente equazione, e inoltre due altri valori particolari m, n, che verifichino l'altra equazione

$$(3) \qquad m^2 = an^2 + 1$$

la quale è un caso particolare della precedente per $b=1$. Dopo di che dimostra soddisfare alla equazione (2) anche i valori

$$(4) \qquad y = gm + afn\,; \qquad x = fm + gn\,;$$

ciò che prontamente si riconosce vero *a posteriori* mediante la sostituzione. Come si trovino i quattro valori particolari f, g, m, n, è altrimenti noto: lo scopo ch' Eulero si propone nel luogo citato, è d' insegnare un processo, pel quale data una soluzione dell' equazione (2), se ne deducano tutte le altre. Egli dice: poichè anche i valori (4) soddisfanno alla (2), possiamo assumere adesso questi secondi pei valori di f, g in luogo dei primi, e così dedurne due altri, poi coi terzi operare egualmente, e così via via. Ora è appunto l' operazione quì descritta a parole, che intendo presentare sotto quella forma che dà presa al calcolo delle differenze finite, e vedremo quanto la questione ne avvantaggi.

Si chiamino x_0, x_1, x_2 .... i valori di x delle successive soluzioni dopo il primo f, e y_0, y_1, y_2, ... i corrispondenti di y dopo il primo g. Avremo in conseguenza dalle equazioni (4)

$$(5) \left\{ \begin{array}{ll} x_0 = mf + ng & y_0 = anf + mg \\ x_1 = mx_0 + ny_0 & y_1 = anx_0 + my_0 \\ x_2 = mx_1 + ny_1 & y_2 = anx_1 + my_1 \\ \text{ec.} \quad \text{ec.} & \text{ec.} \quad \text{ec.} \end{array} \right.$$

Se i valori di x_0, y_0 si sostituiscono in quelli di x_1, y_1, otteniamo

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = (m^2 + an^2)f + 2mng \\ y_1 = 2amnf + (m^2 + an^2)g \end{array} \right.$$

i quali sono della forma

$$Af + Bg\,, \quad Cf + Dg$$

come quelli di x_0, y_0, ma coi coefficienti di f, g diversi. Similmente se i valori ora trovati di x_1, y_1 si ponessero in quelli di x_2, y_2, si avrebbero per x_2, y_2 valori della stessa

forma $Af + Bg$, $Cf + Dg$, ma coi coefficienti di f, g ancora diversi, e così sempre in tutte le successive sostituzioni. Adunque segnando con x_p, y_p i valori di x, y che risulterebbero dopo p sostituzioni, potremo mettere

$$(7) \qquad x_p = A_p f + B_p g \; ; \quad y_p = C_p f + D_p g$$

dove A_p, B_p, C_p, D_p sono quattro funzioni dell'indice p che rimangono a determinarsi.

Per riuscirvi osserviamo che le precedenti, aumentando p di un'unità, danno

$$(8) \qquad x_{p+1} = A_{p+1} f + B_{p+1} g \; ; \; y_{p+1} = C_{p+1} f + D_{p+1} g$$

e che di più, a motivo delle (4), si hanno le

$$x_{p+1} = m x_p + n y_p \; ; \quad y_{p+1} = a n x_p + m y_p \, .$$

Posti in queste ultime per x_p, y_p i valori (7), il confronto delle equazioni risultanti colle (8) dà le quattro

$$(9) \qquad \begin{aligned} A_{p+1} &= m A_p + n C_p \; ; & B_{p+1} &= m B_p + n D_p \; ; \\ C_{p+1} &= a n A_p + m C_p \; ; & D_{p+1} &= a n B_p + m D_p ; \end{aligned}$$

che serviranno a determinare le quattro funzioni

$$A_p \, , \; B_p \, , \; C_p \, , \; D_p \, .$$

È assai facile, dopo aver associate alle equazioni precedenti le quattro che risultano da esse mettendovi $p + 1$ per p, passare a quattro equazioni di second'ordine contenenti una sola funzione incognita. Così fra la prima e la terza può eliminarsi C, ed avere una sola equazione in A: ovvero A, ed avere una sola equazione in C: così per le altre due. Le quattro equazioni con una sola incognita sono:

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_{p+2} - 2m A_{p+1} + (m^2 - a n^2) A_p &= 0 \\ B_{p+2} - 2m B_{p+1} + (m^2 - a n^2) B_p &= 0 \\ C_{p+2} - 2m C_{p+1} + (m^2 - a n^2) C_p &= 0 \\ D_{p+2} - 2m D_{p+1} + (m^2 - a n^2) D_p &= 0 \end{aligned} \right.$$

Esse ci presentano tutte una medesima struttura, e questo vuol dire che, integratane una, per esempio la prima, i valori di B_p, C_p, D_p non potranno differrire da quello di A_p se non per diversi valori delle due costanti arbitrarie introdotte dall' integrazione.

A integrare quella prima osserveremo ch'essa è lineare di second'ordine a coefficienti costanti. Porremo quindi, giusta il metodo noto,

$$A_p = H\alpha^p$$

essendo H una costante che rimane arbitraria, ed α un' altra costante da determinarsi. La sostituzione, dopo la divisione per $H\alpha^p$, lascia l'equazione

$$\alpha^2 - 2m\alpha + m^2 - an^2 = 0$$

dalla quale risulta

$$\alpha = m \pm n\sqrt{a}\,.$$

Con ciascuno dei valori delle due radici veniamo a formarci un integrale particolare, e il completo si avrà dalla somma dei due, cioè sarà

$$(11) \qquad A_p = H(m + n\sqrt{a})^p + K(m - n\sqrt{a})^p$$

colle H, K costanti arbitrarie.

A determinare le due costanti arbitrarie ricorreremo ai primi valori di A_p, quando $p = 0$, $p = 1$. Avendo sott' occhio le equazioni (5), (6), (7), vediamo subito che

$$A_0 = m\,,\ A_1 = m^2 + an^2\,.$$

La (11) pertanto ci somministra le due equazioni

$$m = H + K$$

$$m^2 + an^2 = H(m + n\sqrt{a}) + K(m - n\sqrt{a}).$$

Possiamo sottrarre alla seconda la prima moltiplicata per m, e così ridurla alla

$$n\sqrt{a} = H - K\,;$$

quindi subito

$$H = \frac{1}{2}(m + n\sqrt{a})\ ;\quad K = \frac{1}{2}(m - n\sqrt{a}),$$

e la (11) diventa

$$(12) \qquad A_p = \frac{1}{2}(m + n\sqrt{a})^{p+1} + \frac{1}{2}(m - n\sqrt{a})^{p+1}$$

Secondo il già detto i valori di B_p, C_p, D_p saranno della stessa forma data nella (11) alla A_p, e potranno scriversi

$$(13) \quad \begin{cases} B_p = L(m + n\sqrt{a})^p + M(m - n\sqrt{a})^p \\ C_p = N(m + n\sqrt{a})^p + O(m - n\sqrt{a})^p \\ D_p = P(m + n\sqrt{a})^p + Q(m - n\sqrt{a})^p. \end{cases}$$

Per determinare le sei costanti L, M, N, O, P, Q terremo un andamento affatto simile al già seguito per le H, K del valore di A_p. Pertanto dapprima avremo

$$B_0 = n, \qquad B_1 = 2mn$$

e corrispondentemente

$$L = \frac{1}{2\sqrt{a}}(m + n\sqrt{a}); \quad M = -\frac{1}{2\sqrt{a}}(m - n\sqrt{a})$$

poscia per

$$C_0 = an, \quad C_1 = 2amn$$

$$N = \frac{\sqrt{a}}{2}(m + n\sqrt{a}); \quad O = -\frac{\sqrt{a}}{2}(m - n\sqrt{a})$$

e da ultimo per

$$D_0 = m, \quad D_1 = m^2 + an^2$$

$$P = \frac{1}{2}(m + n\sqrt{a}); \quad Q = \frac{1}{2}(m - n\sqrt{a})$$

Questi valori mutano le (13) nelle

$$(14) \quad \begin{cases} B_p = \frac{1}{2\sqrt{a}}(m + n\sqrt{a})^{p+1} - \frac{1}{2\sqrt{a}}(m - n\sqrt{a})^{p+1} \\ C_p = \frac{\sqrt{a}}{2}(m + n\sqrt{a})^{p+1} - \frac{\sqrt{a}}{2}(m - n\sqrt{a})^{p+1} \\ D_p = \frac{1}{2}(m + n\sqrt{a})^{p+1} + \frac{1}{2}(m - n\sqrt{a})^{p+1}. \end{cases}$$

Ora colle equazioni (13), (14) vediamo avverarsi in generale una bella proprietà di questi coefficienti, la quale pei casi particolari $p=0$, $p=1$ si riscontra nelle formole (5), (6), cioè che si hanno

$$(15) \qquad D_p = A_p; \qquad C_p = aB_p$$

Cosicchè basterà sempre calcolare i valori di A_p, B_p per conoscere subito anche quelli degli altri due coefficienti.

I valori (12), (14) sostituiscansi nella equazione (7), e ponendo ω in luogo di $p+1$, avremo le formole

$$(16) \quad \begin{cases} x = \dfrac{(m+n\sqrt{a})^\omega + (m-n\sqrt{a})^\omega}{2} f \\ \qquad + \dfrac{(m+n\sqrt{a})^\omega - (m-n\sqrt{a})^\omega}{2\sqrt{a}} g \\ y = \dfrac{(m+n\sqrt{a})^\omega - (m-n\sqrt{a})^\omega}{2\sqrt{a}} af \\ \qquad + \dfrac{(m+n\sqrt{a})^\omega + (m-n\sqrt{a})^\omega}{2} g. \end{cases}$$

le quali sono le annunciate di principio di cui andavamo in traccia, cioè quelle che contengono (come le (1) per l'equazione di primo grado) tutte le soluzioni dell'equazione (2), dando ad ω successivamente i valori 0, 1, 2, 3 ..... di tutti i numeri interi all'infinito. Tali formole presentano denominatori e segni d'irrazionalità, il che pare contraddire alla condizione che x, y siano sempre numeri interi. Però la forma frazionaria ed irrazionale non è che apparente, e ce ne convinceremo svolgendo i binomj. Presentiamo pertanto la soluzione dell' equazione

$$y^2 = ax^2 + b.$$

colle due formole

$$(17) \qquad x = Af + Bg; \quad y = aBf + Ag$$

avendo messa a profitto la proprietà scritta nelle (15), ed essendo

$$(18)\begin{cases} A = m^{\omega} + \dfrac{\omega(\omega-1)}{2} m^{\omega-2} n^2 a + \dfrac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{2.3.4} m^{\omega-4} n^4 a^2 + \text{ec.} \\ B = \omega m^{\omega-1} n + \dfrac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{2.3} m^{\omega-3} n^3 a + \text{ec.} \end{cases}$$

formole che risultano dallo svolgimento dei trovati valori di A, B, ove ω stìa per $p+1$. Esse sono serie che finiscono sempre, perchè ω è numero intero, e tutti i loro termini sono numeri interi, giusta la nota proprietà dei coefficienti del binomio di Newton.

Se l'equazione proposta a risolvere fosse, non la

$$y^2 = ax^2 + b,$$

ma la più semplice

$$(19) \qquad z^2 = au^2 + 1;$$

non farebbero più bisogno i quattro valori particolari f, g, m, n, ma essendo la prima equazione (2), come la seconda (3), si potrebbero prendere $f = n$, $g = m$. Ciò semplifica d'assai le due formole (16), che fatta $\xi = \omega + 1$, diventano

$$(20)\begin{cases} u = \dfrac{(m + n\sqrt{a})^{\xi} - (m - n\sqrt{a})^{\xi}}{2\sqrt{a}} \\ z = \dfrac{(m + n\sqrt{a})^{\xi} + (m - n\sqrt{a})^{\xi}}{2} \end{cases}.$$

Che queste ultime soddisfacciano alla (19), qualunque sia ξ, quando m, n verificano la $m^2 = an^2 + 1$, è cosa di cui possiamo subito persuaderci *a posteriori* colla sostituzione: la ξ deve prendere tutti i valori 1, 2, 3 .... Lo svolgimento dei binomj ci porge per u, z valori fatti come quelli di B, A nelle (18), essendo la ξ al posto dell'ω.

Per un esempio: prenderemo quello di Eulero al n.° 87 del capo VI. Sia da risolversi l'equazione

$$(21) \qquad y^2 = 2x^2 - 1.$$

Si conoscono per x, y i due valori particolari $f=1$, $g=1$ che vi soddisfanno: e per l'equazione $m^2=2n^2+1$, i due $m=3$, $n=2$. Le formole (17), (18) danno immediatamente per la soluzione della proposta (21)

$$x=A+B\,; \qquad y=2B+A$$

essendo

$$A=3^{\omega}+4\omega(\omega-1)3^{\omega-2}+8\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)4^{\omega-5}+\text{ec.}$$

$$B=2\omega 3^{\omega-1}+8\omega(\omega-1)(\omega-2)3^{\omega-4}+\text{ec.}$$

dove ω deve prendere successivamente i valori 0, 1, 2, 3, 4, ec. Così si trovano per x i valori successivi

$$x=1,\ 5,\ 29,\ 169,\ 985,\ \text{ec.}$$

e corrispondentemente quelli di y

$$y=1,\ 7,\ 41,\ 239,\ 1393,\ \text{ec.}$$

senza passare per tutte le sostituzioni indicate da Eulero. Un' osservazione che pare sfuggita all'Eulero, si è che il suo metodo per risolvere l'equazione (2), qui riprodotto sotto forme più larghe, se dà un gran numero di soluzioni dell'equazione proposta, qualche volta però non le dà tutte ma può condursi a darle mettendo a profitto una facile avvertenza.

Sia per esempio l'equazione

$$y^2=5x^2+4.$$

Essa è soddisfatta dai valori $y=3$, $x=1$, che prenderemo per quello di g, f, ec. quanto all'equazione di sussidio

$$m^2=5n^2+1$$

assumeremo i valori $m=9$, $n=4$, che la verificano. Avremo pertanto dalle formole (17)

$$(22) \qquad x=A+3B\,; \qquad y=3A+5B$$

e dalle formole (18)

$$A=9^{\omega}+40\omega(\omega-1)9^{\omega-2}+\frac{800}{3}\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)9^{\omega-4}+\text{ec.}$$

$$B=4\omega 9^{\omega-1}+\frac{160}{3}\omega(\omega-1)(\omega-2)9^{\omega-3}+\text{ec.}$$

Facendo successivamente $\omega = 0$, 1, 2, 3, ec. ci risultano

$$(23) \quad \begin{cases} A = 1, & 9, & 161, & 2889, & \text{ec.} \\ B = 0, & 4, & 72, & 1292, & \text{ec.} \end{cases}$$

e corrispondentemente

$$(24) \quad \begin{cases} x = 1, & 21, & 377, & 6765, & \text{ec.} \\ y = 3, & 47, & 843, & 15127, & \text{ec.} \end{cases}$$

Ma c'è anche la soluzione $x = 3$, $y = 7$, che ognuno può verificare, e che non è compresa fra le precedenti.

A spiegare questa anomalia e a dedurre dalle nostre formole anche le soluzioni che sembrano sfuggirvi, ecco l'avvertenza che si richiede. I valori di x, y, m, n atti a verificare le equazioni (2), (3) possono manifestamente essere presi anche negativi: le equazioni sono soddisfatte egualmente non entrandovi che i quadrati di detti numeri. Non così può dirsi delle formole (4) e delle più generali (18), che risentino un cambiamento se alcuna delle m, n si assume negativa. Eppure il cambiare i segni alle m, n deve esser lecito per ciò che si è detto riguardo alle formole (2), (3). Considerando la forma delle (18) si capisce che A, B, mutando il segno ad una delle m, n, o a tutte e due, non mutano la grandezza del valore, ma possono ricevere il segno contrario. Se diventano negativi insieme, questo non muta la sostanza della soluzione, perchè allora (osservinsi le (17)) x, y diventano negativi conservando la grandezza dei valori, il che già dicemmo non far differenza. Ben possono riuscir diversi i valori di x, y, se una delle A, B nelle (17) si fa negativa: ed è poi indifferente quale delle due, giacchè scambiando di segno fra loro non fanno che produrre un simile cambiamento anche nei valori di x, y, non alterandone la grandezza. Concluderemo che nelle formole (17) quella che più piace delle A, B può anche prendersi negativa: il che potrà condurre a nuove soluzioni. Così nelle formole (22), quando facemmo $A = 9$, $B = 4$, vedemmo uscirne $x = 21$, $y = 47$: ma prendiamo nella prima $A = -9$, $B = 4$,

e nella seconda $A = 9$, $B = -4$, otterremo $x = 3$, $y = 7$, cioè la nuova soluzione sopraccennata. La susseguente coppia delle (23) $A = 191$, $B = 72$, se si prende nella prima delle (22) A negativa, B positiva, e viceversa nella seconda, ci conduce a trovare $x = 55$, $y = 123$, altra soluzione che non è compresa fra le (24), e che può facilmente verificarsi.

Alla fine del capo più volte citato Eulero ci fa notare che pei successivi valori di x, y soddisfacenti ad una equazione proposta (per esempio quelli segnati (24)) vi ha una costante relazione o scala, in virtù della quale, dati due di seguito, si ottiene l'altro immediatamente seguente, senza bisogno di ricorrere al precedente metodo di soluzione. Possiamo colle nostre formole dimostrare in un tratto di penna questa proprietà. Usando delle equazioni (7) formiamoci i valori dei due trinomj

$$x_{p+2} - 2mx_{p+1} + x_p; \quad y_{p+2} - 2my_{p+1} + y_p;$$

il primo ci risulterà eguale alla quantità

$$(A_{p+2} - 2mA_{p+1} + A_p)f + (B_{p+2} - 2mB_{p+1} + B_p)g;$$

ma questa si riconosce zero, viste le prime due delle equazioni (10), e ponendo mente che $m^2 - an^2 = 1$ in forza dell' equazione (3). Dunque quel primo trinomio è zero: e lo stesso si prova del secondo, richiamando le altre due equazioni (10); dunque veniamo ad avere

$$x_{p+2} = 2mx_{p+1} - x_p; \quad y_{p+2} = 2my_{p+1} - y_p$$

che sono le due scale indicate da Eulero. Osserveremo però che queste scale ci condurrebbero all' errore quando intercalassimo fra i successivi valori di x, y in ordine di grandezza anche quelli trovati cambiando i segni alle A, B, giusta il detto qui sopra.

Eulero ai §. 92, 93 del capo medesimo tratta eziandio l' equazione più generale

$$25) \qquad y^2 = ax^2 + bx + c;$$

egli prova che conoscendosi anche in questo caso due valori

particolari f, g di x, y soddisfacenti all' equazione, e di più due valori m, n, che verificano come sopra la

$$m^2 = an^2 + 1,$$

viene l'equazione (25) soddisfatta anche dai valori

$$(26) \quad \begin{cases} x = (m^2 + an^2)f + 2mng + n^2b \\ y = 2amnf + (m^2 + an^2)g + mnb, \end{cases}$$

Di ciò possiamo senza difficoltà convincersi *a posteriori* mediante la sostituzione. L'autore poi ci mette qui pure sott'occhio la continua sostituzione come mezzo a trovare tutte le altre soluzioni.

Chiunque mi ha tenuto dietro fin qui, capirà subito che per la ricerca di quest'altre soluzioni può seguirsi un andamento molto simile al tracciato di sopra. Non ostante tal somiglianza, domando la permissione di esporlo in succinto, sì perchè si viene così a ribadire la proposizione che forma il soggetto di questo scritto, sì perchè si arriva ad alcune deduzioni non prive d'interesse.

Poniamo per comodo

$$(27) \qquad q = m^2 + an^2; \quad r = 2mn;$$

scriveremo da capo le (26) sotto la forma

$$(28) \quad \begin{cases} x_0 = qf + rg + n^2b \\ y_0 = arf + qg + mnb; \end{cases}$$

poi, assunti x_0, y_0 in luogo di f, g,

$$x_1 = qx_0 + ry_0 + n^2b$$
$$y_1 = arx_0 + qy_0 + mnb,$$

che, se si sostituiscano per x_0, y_0 i valori precedenti, diventano

$$(29) \quad \begin{cases} x_1 = (q^2 + ar^2)f + 2qrg + [(1 + q)n^2 + rmn]b \\ y_1 = 2aqrf + (q^2 + ar^2)g + [(1 + q)mn + arn^2]b. \end{cases}$$

In generale porremo

$$(30)\quad \begin{cases} x_p = A_p f + B_p g + E_p b \\ y_p = C_p f + D_p g + F_p b. \end{cases}$$

Aumenteremo in queste p di un' unità, poi confronteremo i valori di x_{p+1}, y_{p+1} con quelli risultanti dalle

$$x_{p+1} = qx_p + ry_p + n^2 b$$
$$y_{p+1} = arx_p + qy_p + mnb$$

ove mettansi per x_p, y_p i precedenti valori (30): otterremo così le sei equazioni

$$(31)\quad \begin{cases} A_{p+1} = qA_p + rC_p \;; & B_{p+1} = qB_p + rD_p \\ C_{p+1} = arA_p + qC_p \;; & D_{p+1} = arB_p + qD_p \\ Ep_{+1} = qE_p + rF_p + n^2 \;; & F_{p+1} = arE_p + qF_p + mn \end{cases}$$

Le prime quattro sono affatto simili alle (9), non notandosi altra differenza che l'esservi le q, r in luogo delle m, n. Pertanto allo stesso modo colà indicato si potrà passare alle equazioni di second'ordine contenenti una sola funzione incognita dell'indice p. Quella in A risulta

$$(32)\qquad A_{p+2} - 2qA_{p+1} + (q^2 - ar^2)A_p = 0$$

ed ugualmente costrutte sono le tre in B, C, D. Considerando che tali quattro equazioni contengono le q, r come le (10) le m, n, e che egualmente fatti colle q, r in luogo delle m, n sono i valori particolari per $p = 0$, $p = 1$, cioè A_0, A_1; B_0, B_1, ec. adoperati a fine di determinare le costanti arbitrarie introdotte dalle integrazioni, come si fa manifesto per l'ispezione delle equazioni (28), (29): ci persuaderemo facilmente che i valori di A_p, B_p, C_p, D_p avranno espressioni di forma affatto eguale a quella delle (12), (14), colle q, r in luogo di m, n. Osservando poscia che, stanti le (27), abbiamo

$$q + r\sqrt{a} = m^2 + an^2 + 2mn\sqrt{a} = (m + n\sqrt{a})^2$$
$$q - r\sqrt{a} = m^2 + an^2 - 2mn\sqrt{a} = (m - n\sqrt{a})^2$$

conchiuderemo da ultimo essere

$$(33)\quad \begin{cases} A_p = \frac{1}{2}(m + n\sqrt{a})^{2p+2} + \frac{1}{2}(m - n\sqrt{a})^{2p+2} \\ B_p = \frac{1}{2\sqrt{a}}(m + n\sqrt{a})^{2p+2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}(m - n\sqrt{a})^{2p+2} \\ C_p = \frac{\sqrt{a}}{2}(m + n\sqrt{a})^{2p+2} - \frac{\sqrt{a}}{2}(m - n\sqrt{a})^{2p+2} \\ D_p = \frac{1}{2}(m + n\sqrt{a})^{2p+2} + \frac{1}{2}(m - n\sqrt{a})^{2p+2} \end{cases}$$

Colle quali ci è fatto palese a colpo d'occhio verificarsi anche per questo caso più generale la proprietà già scritta nelle (15)

$$(34)\qquad C_p = aB_p\,; \qquad D_p = A_p$$

Nell'attuale questione scorgiamo dalle (31) essere sei invece di quattro le funzioni incognite di p da determinarsi. A venire in cognizione delle due rimanenti elimineremo dapprima la E fra le ultime due delle (31), e arriveremo così alla

$$F_{p+2} - 2qF_{p+1} + (q^2 - ar^2)F_p = (1 - q)mn + arn^2.$$

Il secondo membro, sostituiti per q, r i valori (27), risulta zero. È dunque questa equazione affatto simile alla (32) e alle altre tre di cui tenemmo discorso: quindi della stessa forma sarà altresì l'integrale completo, cioè

$$F_p = H(m + n\sqrt{a})^{2p} + K(m - n\sqrt{a})^{2p}$$

Per determinare le due costanti arbitrarie ricorreremo ai valori di F_0, F_1, i quali avendo sott'occhio le (30), si cavano dalle (28), (29), e risultano rispettivamente

$$mn,\ mn(1 + m^2 + 3an^2).$$

Troveremo per tal maniera

$$H = \frac{1}{4\sqrt{a}} + \frac{n}{2}(m + n\sqrt{a})\,;\ K = -\frac{1}{4\sqrt{a}} + \frac{n}{2}(m - n\sqrt{a})$$

valori che riducono la precedente alla

$$(35)\quad \begin{cases} F_p = \frac{1}{4\sqrt{a}}\left((m+n\sqrt{a})^{2p} - (m-n\sqrt{a})^{2p}\right) \\ \quad + \frac{n}{2}\left((m+n\sqrt{a})^{2p+1} + (m-n\sqrt{a})^{2p+1}\right). \end{cases}$$

Finalmente l'eliminazione di F fra le due ultime equazioni (31) lascia l'equazione di second'ordine

$$(36)\quad E_{p+2} - 2qE_{p+1} + (q^2 - ar^2)E_p = (1-q)n^2 + rmn,$$

dove il secondo membro, sostituiti i valori di q, r, non risulta zero; ma eguale a $2n^2$.

Per integrare tale equazione faremo uso della elegantissima formola generale di cui fu inventore il Brunacci : vedi corso di Mat. sub. T. I.° cap. III. n.° 58. Questa c'insegna che essendo α_1, α_2 le due radici dell'equazione

$$\alpha^2 - 2q\alpha + q^2 - ar^2 = 0$$

si ha nel caso attuale

$$E_p = \alpha_1^p \sum \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^p \sum \frac{2n^2}{\alpha_2^p}$$

giacchè sparisce un denominatore per essere

$$(37)\quad q^2 - ar^2 = (m^2 + an^2)^2 - 4am^2n^2 = (m^2 - an^2)^2 = 1.$$

Effettuate le due integrazioni, la precedente formola ci dà

$$E_p = \frac{n^2}{1-q} + Q(q + r\sqrt{a})^p + R(q - r\sqrt{a})^p$$

essendo Q, R le due costanti arbitrarie. La giustezza di un tal valore può facilmente verificarsi colla sostituzione nella (36). Osservando che $1-q$ si riduce $-2an^2$, la precedente può anche scriversi

$$E_p = -\frac{1}{2a} + Q(m + n\sqrt{a})^{2p} + R(m - n\sqrt{a})^{2p}$$

Le due Q, R si determinano per $p=0$, $p=1$, notando essere

$$E_0 = n^2 \; ; \quad E_1 = n^2(1 + 3m^2 + an^2)$$

e risultano

$$Q = \frac{1}{4a} + \frac{n(m+n\sqrt{a})}{2\sqrt{a}} \; ; \quad R = \frac{1}{4a} - \frac{n(m-n\sqrt{a})}{2\sqrt{a}} \; ;$$

conseguentemente si ha

$$(38) \left\{ \begin{aligned} E_p = & -\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a}\left((m+n\sqrt{a})^{2p} + (m-n\sqrt{a})^{2p}\right) \\ & + \frac{n}{2\sqrt{a}}\left((m+n\sqrt{a})^{2p+1} - (m-n\sqrt{a})^{2p+1}\right). \end{aligned} \right.$$

Vedemmo che per mezzo delle equazioni (34) si hanno subito i coefficienti C, D quando si conoscono i due A, B, talchè non fa bisogno di calcolare se non le prime due delle (33); si domanda se può aversi un simile vantaggio anche relativamente ad E, F. Rispondiamo che si, ed ecco in qual maniera.

Dalle prime due delle (33) deduciamo

$$(m + n\sqrt{a})^{2p+2} = A + B\sqrt{a}$$
$$(m - n\sqrt{a})^{2p+2} = A - B\sqrt{a}.$$

Queste, dividendo per $m + n\sqrt{a}$, e per $(m + n\sqrt{a})^2$; per $m - n\sqrt{a}$, e per $(m - n\sqrt{a})^2$, danno i valori da introdursi nelle formole (35), (38). Facciasi, e poscia si noti che riducendo a due a due le frazioni al medesimo denominatore, i denominatori comuni spariscono essendo manifestamente eguali all'unità. Allora dopo alcune facili riduzioni si ottengono le due formole assai singolari

$$(39) \qquad E = \frac{A-1}{2a} \; ; \quad F = \frac{B}{2}.$$

Sapendo che E, F non possono essere che numeri interi, risulta da queste formole che B è sempre numero pari, A sempre numero dispari, e che di più $A - 1$ deve sempre essere divisibile per $2a$.

Pertanto, a motivo delle equazioni (34), (39), la soluzione della equazione (25), può presentarsi al modo che segue.

Sono

$$(40)\quad \begin{cases} x = Af + Bg + \dfrac{A-1}{2a}\, b \\[2ex] y = aBf + Ag + \dfrac{B}{2}\, b \end{cases}$$

e tutti i valori di A, B si cavano dalle due formole

$$(41)\quad \begin{cases} A = m^{2\omega} + \dfrac{2\omega(2\omega-1)}{2}\, m^{2\omega-2} n^2 a \\[2ex] \qquad + \dfrac{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)2\omega-3)}{2.\,3.\,4}\, m^{2\omega-4} n^4 a^2 + \text{ec.} \\[2ex] B = 2\omega m^{2\omega-1} n + \dfrac{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)}{2.\,3}\, m^{2\omega-3} n^3 a + \text{ec.} \end{cases}$$

dando ad ω successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ec.

Queste due ultime (41) risultano dallo svolgimento delle prime due delle (33), avendovi posto ω in luogo di $p+1$, e sono affatto simili alle (18), colla sola differenza dell' esservi 2ω invece di ω.

Per un esempio: prenderemo quello di Eulero al luogo citato ove è proposta a sciogliere l'equazione

$$y^2 = 2x^2 - x.$$

Il confronto colla (25) dà $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$.
Si conoscono poi i primi valori particolari di x, y che vi soddisfanno, cioè $f = 1$, $g = 1$; e i due $m = 3$, $n = 2$ che verificano l'equazione di sussidio $m^2 = 2n^2 + 1$.

Le formole (40) diventano

$$x = \frac{3A+1}{4} + B; \quad y = A + \frac{3B}{2}.$$

Le (41), fattavi successivamente $\omega = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ somministrano

$$A = 1\ ,\ 17\ ,\ 577\ ,\ 19601,\ \text{ec.}$$
$$B = 0\ ,\ 12\ ,\ 408\ ,\ 13860,\ \text{ec.}$$

e però le due precedenti danno corrispondentemente

$$x = 1,\ 25\ ,\ 841\ ,\ 28561\ ,\ \text{ec.}$$
$$y = 1\ ,\ 35\ ,\ 1189\ ,\ 40391\ ,\ \text{ec.}$$

Qui pure, come per l'altro caso più semplice, può assegnarsi una scala fra i successivi valori di x, mediante la quale conoscendone due consecutivi, passare immediatamente al seguente senza calcolare ogni volta le formole (40), (41). Diremo lo stesso pei successivi valori di y: però questa volta le due scale non riescono eguali. Giungeremo a dimostrare quanto si è ora asserito cercando i valori dei due trinomj

$$x_{p+2} - 2qx_{p+1} + (q^2 - ar^2)x_p$$
$$y_{p+2} - 2qy_{p+1} + (q^2 - ar^2)y_p$$

per mezzo delle formole (30), e considerando l'equazione (32), le altre quattro simili per B, C, D, F, e finalmente la (36) fatta colla E. Troveremo che il valore del primo trinomio è $2bn^2$, e quello del secondo, zero. In appresso, avendo posto per q il suo valore noto, e richiamata la (37), vedremo vere le equazioni

$$x_{p+2} = 2(m^2 + an^2)x_{p+1} - x_p + 2bn^2$$
$$y_{p+2} = 2(m^2 + an^2)y_{p+1} - y_p$$

le quali costituiscono le due scale di cui si è detto.

Porrò termine con una osservazione suggerita dalle equazioni (39), nelle quali mi parve di scorgere l'indizio d'uno de' più notabili vantaggi che possano provenire alla scienza dei numeri dal trattarne alcune questioni alla maniera proposta in questo scritto. Da una parte è evidente che la continua sostituzione, come nel caso attuale è insegnata da Eulero, non può condurre a trovare pei valori dei coefficienti funzioni dell'indice se non numeri interi. Da un'altra parte le formole generali ottenute dal calcolo delle differenze finite, sono talvolta fra-

zionarie. Siccome adunque la forma frazionaria in tali formole non può essere che apparente, viene così dimostrata la divisibilità di certe espressioni numeriche per certe altre, dimostrazione ch'io non so se per altra via sia possibile di conseguire.

STORIA FISICA DEL BACINO DI ROMA

MEMORIA

DA SERVIRE DI APPENDICE ALL'OPERA
IL SUOLO FISICO DI ROMA
DI G. BROCCHI

DEL PROF. GIUSEPPE PONZI LINCEO.

Letta nella sessione 8. del 23 settembre 1849
nell'accademia pontificia de'nuovi Lincei.

Come la Geologia è la scienza delle antichità delle antichità della natura: così l' archeologia è quella delle antichità umane. Benchè l'uno dall'altro questi rami dello scibile si distinguono; pur tuttavia tali e tante sono le affinità e le relazioni che s' incontrano sulla linea di loro contatto, che ben spessevolte insieme si confondono, e l'una nell'altra si compenetra a soccorrerla con utili servigi. Della qual cosa tutto dì ne vediamo frequentissimi esempi; ma nessuno per fermo più luminoso di quello che s'incontra nell'esame del bacino di Roma. La forma del suolo, la sua divisione in sette colli, la vallata istessa entro cui scorre il Tevere appartengono ai fasti della terra, e legati sono a quelle vicissitudini operate dalla natura, avanti che l'uomo si trasportasse in queste contrade.

Il mio divisamento in questo scritto è quello di prendere ad esame que'fatti, e con mezzi geologici studiarli per conoscere quale fu l'origine della grande vallata trascorsa oggi dal fiume, quale quello dei suoi tributari, quale delle colline che la fiancheggiano, quale in fine l'aspetto del suolo prima e dopo la fondazione di Roma. Forse da taluno si stimerà arroganza tornare su di un argomento così mestrevolmente trattato dal

celebre Brocchi nell'opera intitolata *Il suolo fisico di Roma*, opera inoltre corredata di una carta geologica che a ragione può dirsi aver servito di modello a tutte le altre di simil genere. Però ove si rifletta allo stato infantile della scienza nel tempo in cui quell'uomo infaticabile scrisse, nel quale non si erano peranche distinte le età della terra, ne assegnati giustamente i caratteri dei fossili delle diverse formazioni, né comparse erano ancora le teorie dei sollevamenti e dei vulcani: io sarò pienamente giustificato se non toccando affatto le saggie di lui osservazioni, mi limito soltanto ad aggiungere tutto quello che il progresso della scienza è arrivato a conoscere fino al giorno d'oggi.

Premessa una tal dichiarazione, che era pur necessaria; avanti di entrare a discorrere del bacino romano, credo cosa ben fatta ricordare la storia teoretica e fisica delle epoche terziaria e quaternaria delle nostre contrade, onde meglio farne l'applicazione al mio assunto. Questa storia non è nuova, avvegnachè può rinvenirsi tanto nelle memorie già da me pubblicate, quanto negli scritti di altri che ne trattarono. La reputo però indispensabile per alleggerire i meno istrutti del peso di ricercarla altrove, e così aggevolar loro il sentiero nelle cognizioni delle cose del nostro paese.

Divido pertanto questo mio ragionamento in tre parti: nella prima parlerò dei fasti della terra nelle epoche che ci precedettero: nella seconda farò un'analisi del suolo romano, ove si rinvengono tutte le prove di quelle vicende: nella terza esaminerò partitamente i speciali cambiamenti, a cui andò soggetto il bacino di Roma fino ai tempi storici.

L'aspetto largamente ondulato della campagna nostra, la maniera di stratificazione dei terreni che la compongono, le conchiglie marine che in essi si rinvengono, e la loro estenzione in tutto il rimanente dell' Italia, io credo potere oggi persuadere tutti, che questo piano chiaramente rappresenti un fondo di mare, abbandonato dalle acque. Se a queste osservazioni poi aggiungasi che dal lato adriatico si rinvengono gli stessi depositi, contenenti le stesse conchiglie, elevati alla stessa

altezza; sorge spontanea l'idea che tutta intiera l'Italia emerse dalle acque, e dividendo il mare che la bagna ne restrinse i confini in cui oggi lo scorgiamo. Questa verità ci viene eziandio rischiarata dall'esame comparativo dei livelli, a cui da ambo i lati giunsero le successive deposizioni del mare, di mano in mano che ristringeva i suoi confini, tracciando così una storia, dalla rivoluzione appennina fino a dì nostri.

Ciò posto si conviene oggi da tutti i geologi che quelle ingenti masse calcari che costituiscono i più alti monti a stratificazioni inclinate, e contenenti prodotti marini, fossero spostate rintorte e sollevate in quella guisa da una subitanea e validissima eruzione di serpentine, operata dalle forze centrali del globo su di una fenditura della crosta solida del Globo stesso, diretta dal N. O. al S. E., e quelle roccie trasportate sotto il dominio atmosferico si mostrarono quale prima orditura dell'Italia. Compiuta quella apparizione, le forze che con tanta violenza aveano sopra di esse operato, si vennero quindi per gradi snervando, per produrre sulle terre ancora sottomarine un sollevamento sempre più lento graduale e ordinato.

È ben naturale che le superficie emerse dovettero andare incontro a quel disfacimento, che tutte le intemperie continuamente vi operarono, e i loro detriti trasportati dalle pioggie ai flutti burrascosi che irrompevano sulle coste; dovettero dare origine a quei depositi di marne, ciottoli e sabbie, di che vediamo comporsi i monti subappennini, che innalzandosi a loro tempo dalle acque restringevano queste a più angusti confini, e le rendevano comparativamente più basse.

In quei remotissimi tempi però le forze della natura furono di tale potenza, che in onta del perenne stato burrascoso del cielo e del mare una ricchissima vegetazione coprì le terre emerse, e quei densissimi boschi si popolarono di animali speciali, e ora da noi sconosciuti in Italia. Le numerose ossa di elefanti, rinoceronti, ippopotami e cervi, mescolate a conchiglie marine, parte di specie perduta, parte viventi ma di gigantesca statura, che ad ogni istante si rinvengono nelle sabbie e nelle breccie subappennine, ci danno chiaramente a divedere che il

clima di quel tempo uguagliasse quello che oggi rinveniamo sotto la zona torrida. Le generazioni poi così moltiplicate di quegli esseri ci dimostrano aver decorsi tempi lunghissimi per il compimento di tali fenomeni.

Seguitando a sollevarsi il terreno e limitate le acque alle radici dei monti sub-appennini, dal lato del mediterraneo comparvero i vulcani, i quali facendosi luogo sotto le acque stesse marine dovettero colle loro spinte eruttive contribuire non poco agli ulteriori sollevamenti delle terre. I loro crateri vomitarono lave e tanta quantità di scorie lapilli e ceneri, che depositate parte all'intorno, parte trasportate dalle acque non solo li fecero emergere colle loro cime per le continue sovraposizioni; ma si diffusero eziandio per tutto, ove le onde giungevano. Sul dorso dei coni che formarono si scorgono ancora i livelli a cui arrivano le materie impastate e solide, sormontate dalle incoerenti e disgregate. Molte furono quelle bocche ignee e ampissime, quali si riscontrano nei laghi di Bolsena, di Vico, di Bracciano ec. e tutti irregolarmente disposte in linea pressochè paralella agli appennini (*). Tanta poi fu la quantità di materie elaborate, e ejettate dalle loro bocche, che le acque marine non depositando più sabbie e ciottoli, formarono solo banchi di tufi e pozzolane. Questi ne segnarono i confini in quell'epoca, distesi per la più gran parte sui piani della campagna romana.

I depositi vulcanici non ci danno fossili tali da argomentare dallo stato di quel clima, perchè sia per la mobilità delle materie trasportate, sia per la loro radente scabrezza, sia per la loro aridezza, sia per qualche principio vulcanico sciolto in quelle acque, non vi fu luogo affatto a vegetazione sottomarina e per conseguenza ad animali acquatici. Solo vi scorgiamo quà e là disseminati pezzi di tronchi di alberi terrestri, i quali ci dimostrano lo stato boschivo del terreno emerso.

(*) Vedasi la mia memoria *Sur la zone vulcanique italienne*, pubblicata dalla società geologica di Parigi.

Riempito per tanti depositi il fondo del mare, e salito così verso la superficie delle acque, il sollevamento, benchè per gradi sempre più lento doveva comparire più rapido, conciossiachè in un suolo quasi orizzontale qualunque piccolo movimento è molto per uscire tutto fuori dalle onde. Così vediamo che le acque si limitarono a segno da ravvicinare molto gli attuali confini, e il suolo al terminare dell'epoca terziaria comparve in secco con una superficie largamente ondulata, quale dovea risultare da un mare in continua tempesta.

Restate asciutte quelle vaste pianure, e giunta l'epoca diluviana, le pioggie dirotte che ebbero luogo sui monti, delle quali abbiamo prove irrefragabili, dovettero far precipitare in basso da quelle pendici masse immense di acqua, che portarono la distruzione di tutto ciò che incontravano. Dalla mancanza degli alvei artificiali ne venne che quelle fiumane corsero a loro bell'agio su di un terreno ineguale, e facile ad essere sconvolto. Allungando il loro corso quelle acque tumultuarie e vorticose prima di versarsi nel comun ricettacolo, si scavarono ampie fosse proporzionate al loro stesso volume. Dentro quelle fosse rimescolando marne, sabbie, ciottoli, e materie vulcaniche, e tutto ciò infine, che nel loro passaggio incontravano, dovettero depositarvi nel fondo banchi disordinati di quelle sostanze, che trascinate altresì nel mare, questi tornò a depositare sabbie ricomposte che oggi contornano i suoi confini.

Queste acque tenendo in soluzione molti principii calcari a due si riducono le specie di sedimenti che ci sono dati a studiare; *le sabbie e i travertini*: le prime tenute in soluzione meccanica nelle acque, gli altri in soluzione chimica. Le sabbie quaternarie fluviali rinvengonsi nel fondo delle valli e tracciano l' andamento delle correnti che le scavarono. I depositi loro si conformano in strati corti embricati e disordinati, e la loro composizione dei materiali di tutti i terreni precedenti insieme mescolati, ed è perciò che si distinguono dalli terziari, perchè questi tengono il loro posto fra le marne e i tufi con una stratificazione rettilinea e concordante, senza che alcuna minima particella di quelli vi si comprenda. I travertini poi

veggonsi rappresi sui fianchi incrostanti tutto ciò che v'incontrarono, specialmente in quei luoghi sottratti dalla corrente, dove un'acqua tranquilla e pacifica si rendeva opportuna a quei sedimenti chimici. Essi sono distribuiti in masse più o meno grandi e non oltrepassano mai la linea orizzontale, che ci segna l'altezza a cui saliva l'acqua diluviana.

L'epoca diluviana non fu al certo eziandio di tanto breve durata, perchè vi vediamo sviluppata la vita degli esseri organici in una maniera così attiva, che i depositi restati, sono ricchissimi di spoglie di animali e vegetabili di quel tempo. Il clima però era dal precedente cambiato e molto ravvicinato all'epoca nostra, avvegnachè quei vegetabili e quelli animali molto ai viventi e moderni somigliano; e se v'ha differenza questa riducesi alla maggiore statura del loro corpo, e alla mancanza di alcune specie, fra le quali un bove gigantesco a grossissime corna, alcuni cervi e qualche carnivoro. Le sabbie fluviali contengono inoltre i frantumi di quelle stesse ossa che notammo nelle breccie terziarie, trasportate da queste e maggiormente logorate. Ad una immensa quantità di ossa di mammiferi che vi si rinvengono debbonsi ancora aggiungere quelle di uccelli e rettili, specialmente del genere *rana* e delle anguille fra i pesci. Oltre poi alle ossa fossili è pur agevole il riconoscervi una infinità di conchiglie d'acqua dolce e terrestri, spettanti ai generi *Lymnaea*, *Planorbis*, *Paludina*, *Cyclas*, *Unio*, *Helix*, *Pupa*, *Bulimus* ec. (*). Nei travertini in fine abbondano i vegetabili a segno che spesso ne formano un'impasto. Vi si distinguono specialmente specie terrestri e palustri.

Venne finalmente anche il compimento di questo periodo, nel quale diminuite le pioggie, e il cielo fatto più mite, il terreno s'innalzò, il mare si racchiuse negli attuali suoi termini, e i fiumi si ridussero a correre nel fondo delle valli,

(*) Chi avesse diletto conoscere il catalogo degli animali, le cui ossa sono state rinvenute nella campagna romana, legga gli atti del congresso di Genova, dove trovasi da me pubblicato.

lasciando scoperto un terreno ineguale, e ingombro nelle depressioni da paludi e stagni. Qui se taluno si facesse a domandare la causa di quest'ultimo sollevamento, che pur è provato si effettuasse con una certa rapidità; io non saprei rispondere che con una probabile congettura. Se si rifletta che al declinare di questo tempo comparvero i vulcani del Lazio, e che questi si manifestarono con impeto e forza; io stimo che altri s' indurrà a credere, le forze eruttive della natura avere ancora operato sul suolo italiano con una tale energìa, da poter loro attribuire quel movimento che distingue l'epoca diluviana dalla nostra.

I depositi lasciati dai fiumi nei primi tempi dell'era attuale sono pure caratteristici, considerando la diminuzione delle loro masse, e perciò il rallentamento delle correnti. I fiumi non furono più capaci di trasportare quella gran quantità di ghiaie, e di massi erratici come per lo addietro, ma in vece una sabbia fina e una belletta melmosa, che nelle escrescenze riempiendo le scabrosità uguagliarono le asprezze delle valli, le convertirono in pianure, e le renderono più acconcie alla vegetazione. Così a poco a poco la propagazione delle piante discese dai colli che fiancheggiavano quelle valli e ne occupò tutto il fondo, e nel correre del tempo crescendo, i luoghi occupati prima dalle acque si convertirono in densissime selve. La moltiplicazione degli animali fu conseguenza del lussureggiar delle piante, e quei boschi non ancor tocchi dalla mano dell'uomo, divennero sicuro rifugio di belve di ogni specie.

Non possiamo rimanerci da non attribuire alle moderne acque la stessa facoltà che ebbero nelle precedenti vicende, però in un grado molto inferiore, giacchè quella di depor sedimento, e quella d'incrostare di travertino s'indebolirono talmente da non vedere risultati rilevanti, se non in un lungo corso di anni. Se ne facciamo un paragone coll'epoca precedentemente trascorsa, facilmente vedremo essere stata tale e tanta la virtù delle acque nel depositare i travertini, e così rapida, da formare masse colossali di essi, e da incrostare e comprendere non solo le foglie fresche dei vegetabili, ma perfino i più de-

licati petali dei fiori, come io diceva con mirabile celerità. Ora questi depositi sono così indeboliti che si ottengono lentissimamente dei leggieri strati su materie solide e incorruttibili. Il clima attuale poi ci viene manifestato dalle reliquie degli animali, e dalla qualità dei vegetabili che si scorgono nei depositi più moderni, che se non tutti, per la massima parte almeno sono quelli che oggi vivono fra noi.

Ma se ora non osserviamo più la natura spiegare quella potenza produttrice come nelle epoche che ci precedettero, non la dobbiamo supporre una malefica matrigna, perchè essa ci portò un clima tanto più dolce e ridente. Le piogge diluviane cessarono, e il sole sgombro di vapori, che ne offuscavano la vista, risplendette in un cielo più puro, e il mare non più tempestoso ma tranquillo, lambì dolcemente la spiaggia depositandovi leggieri banchi di fina sabbia. Se poi il suolo italiano non ci dà sicure testimonianze di essere stato abitato nei primi tempi della umana esistenza, dobbiamo ritenere che gli uomini non tardarono a recarvisi e stabilirvisi, allettati dal florido e ricco aspetto di questa bella parte di Europa.

Tutto il nostro discorso fin qui si é aggirato sulle terre emerse, quali doveano essere le loro condizioni, e quali estenzioni occuparono; io non saprei chiudere questa storia se non portassi qualche considerazione anche sulle acque, per arrivare a conoscere le diverse quantità delle loro masse che cuoprirono le nostre contrade, o il valore dei sollevamenti medesimi. A questo effetto benissimo ci serviranno le osservazioni fatte sulla specola del collegio romano dagli astronomi Conti e Richebac per determinare la latitudine e la longitudine di Roma, e in questi ultimi tempi le misure barometriche, prese per mire geologiche del Marchese Lorenzo Pareto, e da me sul versante mediterraneo, come dal Conte Alessandro Spada, e dal Prof. Antonio Orsini sull'adriatico.

Per non abusare adunque del tempo io non istarò a ripetere tutte quelle livellazioni; solo mi limiterò ad una media proporzionale, perchè le differenze di quelle comparazioni poco o punto influiscono a variare i fenomeni che abbiamo narrato.

Conoscendo ora che l'altezza massima degli appennini al Vettore, monte più alto della catena della Sibilla, è di metri 2478: che le ghiaie subappennine si elevano fino a metri 370 : i tufi vulcanici depositati dal mare a metri 194, e i sedimenti marini dell'epoca quaternaria a metri 30 : possiamo tirarne la conseguenza, che le scambievoli differenze fra quelle quantità ci somministreranno il criterio per istabilire: 1.° il sollevamento violento degli appennini essere stato di metri 2108: 2.° che i subappennini allorchè comparvero le materie vulcaniche, si erano innalzati metri 176 : 3.° che al compiere dell' epoca diluviana i terreni vulcanici erano in asciutto per l'altezza di metri 164: 4.° che l'innalzamento per cui comparvero fuori delle acque i depositi diluviani fu di metri 30. Ne siegue da queste riflessioni quello che da principio notammo, cioè che il sollevamento dell' Italia fu da principio violento, quindi si fece più lento e guadruale.

Benchè in questa guisa arriviamo a calcolare la quantità e la qualità delle elevazioni delle terre, pure ci sono negati i mezzi a conoscere esattamente la profondità di quei mari, per lo stato loro tempestoso, e la mobilità del loro fondo. Possiamo però congetturare in genere che quelle profondità risultarono sempre minori, sia per i sollevamenti stessi del suolo, sia per le continue e ripetute deposizioni delle materie. Al compimento di tutti questi fenomeni dovette correre una lunga serie di secoli che non ci è data sottoporre a calcolo. Noi manchiamo dei mezzi sui quali fondare un giusto criterio. Ma se non possiamo considerarne l'età assoluta, abbiamo almeno la relativa, per la quale ordiniamo in una serie successiva le fasi che in quelle rimote età si svolsero.

Soddisfatto alla storia teoretica dei tempi geologici trascorsi, una alquanto ricercata analisi sullo stato attuale del suolo romano basterà a giudicarne dell'applicazione. Se dall'alto di una eminenza volgiamo attorno i nostri occhi, l' aspetto del suolo largamente ondulato ci comparirà orizzontale, se le acque che vi scorrono non dassero chiaro segno di una certa inclinazione. Noi osserveremo che queste pianure spaziano fin sotto i

monti in vasti campi, e ci accorgeremo che una spaziosa valle interrompendone la continuità, li trascorre da settentrione a mezzo giorno, alla quale si aggiungono a modo di rami di un albero, valli minori. Vedremo come il Tevere con replicate spire la percorre, i fiumi secondari per le altre minori valli vi si uniscono, onde tutti insieme raggiungere il comun ricettacolo. Noteremo finalmente come le sponde di queste si dispongano in una serie di poggi, i quali altro non sono se non la pianura del suolo istesso, ripartita per la erosione di quelle fosse. Dentro quella principale che sopra abbiamo accennata risiede Roma coi suoi sette colli.

Per incominciare adunque l'analisi del suolo romano, io mi accorgo essere bastante portare l'attenzione alle colline stesse di Roma, per le erosioni che maggiormente vi operarono le acque, ne discoprirono i fianchi, e misero allo scoperto tutta la loro struttura. La riva destra della valle tiberina si compone di varie eminenze, le cui sommità portano diverse denominazioni; il monte Mario e quello delle Crete, che ne è la continuazione, il monte Vaticano e il Giannicolo, che termina col monte Verde, dei quali il solo Giannicolo e una parte del Vaticano, sono compresi entro le mura della moderna Roma. Tutta questa estensione, seguendo la base di quelle giogaie può riputarsi distesa per 15 miglia romane. L' elevazione sul livello del mare presa sul Giannicolo alla fontana dell' acqua Paolina, è di piedi romani 322. Tutti questi colli posti sulla riva destra del Tevere furono distinti dagli antichi col nome di Giannicolensi da Giano che primo stimavasi avervi fabbricata una città col nome di Antipoli.

La riva sinistra poi si compone dei monti Parioli, che si estendono dalla foce dell'Aniene alle mura della moderna città; del Pincio o colle degli Ortuli degli antichi, per i giardini che vi coltivarono, che si erge a livello dei monti Parioli, dei quali in sostanza non è che la continuazione. Succede a questi il Quirinale, così detto dall' ara di Quirino che vi fu eretta. Questo monte benchè legato per una lingua al piano della campagna vicina, pure sporge per 15, 700 piedi di giro alla sua

base, e si eleva a 180 piedi sul livello del mare. Viene in seguito il Viminale per i vinchi che lo ricuoprirono, quasi nascosto da un braccio del Quirinale medesimo, ed è il più piccolo di tutti, perchè conta di base 6,600 piedi, e 173 di altezza. Quindi l'Esquilino che si avanza verso il Tevere con due bracci chiamati Oppio e Cispio. Questo gira per 13,000 piedi ed alza le cime a 200 piedi. Il Celio che fu detto anche *Querquetulano* per le quercie che vi vegetarono, colle molto prolungato che ha 16,000 piedi di base, e 171 di altezza. L'Aventino finalmente, monte parimenti protratto, é diviso in due da una valle traversa; il posteriore che propriamente forma seguito ai monti della riva sinistra, fu detto *Falso-Aventino*, l'anteriore isolato, *Vero-Aventino.*

Se bene si osservi la carta di Roma si vedrà, che lo spazio della vallata che intercorre fra queste sponde, viene interrotto da tre poggi di varia grandezza e figura. Questi sono il Tarpeo poi detto Capitolino dal capo umano rinvenuto nello scavare i fondamenti del tempio di Giove, la cui base ha la figura di un'ellissi allungata, distesa per 4,400 piedi, e la sommità divisa in due cime è portata sul livello del mare a piedi 160. Il secondo monte isolato è il *Palatino* da *Pallantium* o *Palatium*, il quale presenta una figura quadrilatera trapezoidale; gira piedi 6,500 e s'innalza 173. Finalmente il *Vero Aventino* prende un'aspetto cordiforme, ed è il più grande dei tre, giacchè conta 11,000 piedi di base e 158 di elevazione.

Dalla loro enumerazione si scorge che non tutti sono compresi nei sette colli sui quali si distese l'antica Roma, che si mostrano tutti sul lato sinistro, perchè il più accidentato, e si riducono al Palatino, Capitolino, Aventino, Celio, Esquilinio, Viminale e Quirinale. E se noi vi abbiamo accennati anche quegli altri, ciò è per meglio progredire nell' analisi che andiamo tessendo.

Facil cosa è indagare la natura delle materie che compongono quei poggi, avendone le erosioni delle acque discoperti i fianchi, e resi manifesti gli strati che li compongono. Io sono perfettamente d'accordo colle esatte e minute osservazioni prat-

ticatevi dal Brocchi e dal Riccioli circa la natura loro geologica, le quali corrispondono esattamente colle mie, con quelle del marchese Lorenzo Pareto, e di tanti altri, estese a tutta la campagna romana, le quali non lasciano dubio appartenere ai terziari subappennini. Si compongono dal basso all'alto di letti di marna figulina, di sabbia gialla unita a ciottoli di varia grandezza, e di tufi vulcanici, tutti concordanti, e deposti dalle acque marine, che un dì ricuoprirono la vasta estenzione della nostra campagna. Se si ascenda sul monte Mario si percorreranno gli strati di quelle tre diverse materie, disposte con quello stesso ordine che noi abbiamo detto: nel basso le argille marnose, sul corpo del monte la sabbia, finalmente sulla cima i tufi vulcanici che le ricuoprono come di un cappello. Queste osservazioni si possono ripetere sul Giannicolo. Che se non occorre notarle sulle colline del lato sinistro, ciò vuol dire, che per quella larga ondulazione accennata le marne e le sabbie s'immergono al di sotto del suolo che si camina. Le indagini stesse del Brocchi pratticate nei cunicoli dei sotterranei dell'ospedale della Consolazione, prolungati entro la base del Capitolino ci dimostrano questo fatto, perchè sono precisamente scavati nel punto in cui le sabbie si convertono in tufi, Così dobbiamo ritenere che quelle masse di materie vulcaniche, che per intiero costituiscono i monti di sinistra, riposino tutte sopra i letti di sabbie e argille che a noi non si manifestano, ma che pur trascorrono sotto i nostri piedi.

Questi giudizi sono convalidati dai fossili di che abbondano le marne e le sabbie. Nelle cave di argilla del monte delle Crete fuori della porta Angelica, si rinvengono quelli strati gremiti di conchiglie marine, fra cui letti intieri di Cleodore (*), e fra queste legni bituminosi, schiacciati e carbonizzati

(*) Di queste conchiglie, a mio credere, se ne rinvengono in quel luogo tre specie. Furono osservate altre volte dal Brocchi e dal Riccioli, e giudicate per opercoli di *Balani*. Poscia insieme al conte Alessandro Spada io le determinai per *Cleodore*. Il sig. Alessandro Calandrelli

zati, chiaramente spettanti ad una specie di Pino di cui si rinvengono ancora i frutti. La presenza e la quantità di questi vegetabili terrestri c'indica che in quell'epoca terziaria estollevano le loro cime sui monti emersi, e ne rivestivano la superficie.

Le frequenti ossa fossili elefantine, rinvenute nelle sabbie e giaje di Acquatraversa, fra le quali vertebre, ossa del capo, e mascelle coi denti di quella specie perduta: le conchiglie marine di che son ricchissime le sabbie di monte Mario, restatevi comprese nella stessa positura in cui vivevano, e sulle quali tante scoperte furono fatte dal Bonanni e dal Brocchi: la sola presenza dei legni carbonizzati che s' incontrano nei tufi specialmente dell'Aventino, sono altrettante prove dirette ad attestare essere stati questi terreni depositati dal mare terziario, perchè concordano colle ragioni addotte nella prima parte di questo ragionamento.

Esaminata la natura dei colli di Roma, ragion vuole che scendiamo nelle valli, per ricercare i testimoni della fiumana diluviana, che le scavò e trascorse. E qui noterò in primo luogo essere la grande valle tiberina più bassa della campagna romana oltre metri 30; la sua larghezza variare; ora restringersi, ora allargarsi fino a superare il miglio, e il suo piano uguale, quasi orizzontale è ricoperto di fiorente vegetazione. Il Tevere la percorre nell' imo fondo entro un' alveo speciale talvolta ristretto talvolta dilatato fino ad arrivare ai metri 60 con alternanti spire, in cui si mantiene anche nelle piene, conciossiachè le acque ordinariamente appena arrivano a soverchiare i piani della grande valle.

Questa spaziosa fossa trascorre oltre la città mantenendo sempre gli stessi caratteri, poi declinando a ponente si pro-

---

in seguito ne pubblicò due come nuove, designandole coi nomi di *Cleodora Vaticana* e *Cleodora Riccioli*, delle quali a dire la verità non può stimarsi nuova che la seconda, mentre la prima penso potersi ben riportare alla *Cleodora Lanceolata* di Rang, fossile, o la *Caudata* di Lamk, vivente.

lunga fino a circa 10 miglia, dove le ripe si aprono in una costiéra che dimostra essere stato quello il limite del mare, e la foce del fiume quaternario. Nel percorrere la via Portuense che conduce a Fiumicino, giunti sull'alto del monte dei Pisciarelli, che segna il piano della campagna romana dal lato destro del Tevere, si discende per guadagnare le pianure di Pontegalera, che sono ad un livello più basso e che conducono fino al Mediterraneo a cui formano spiaggia. Quì discesi è facile vedere come quel piano più alto si prolunghi verso Maccarese a formare colline pendenti verso il piano più basso, percorse alla lor base dal fiumicello Galera che ne raccoglie i scoli. Lo stesso osservasi avvenire sulla riva sinistra alle tenute di Dragona e Dragonella sulla via Ostiense. Nè possiamo dubitare di ciò, imperciocchè alle falde di quelle colline rinveniamo banchi quaternari deposti dai flutti, contenenti conchiglie d'acqua dolce e marine mescolate insieme, fra cui notansi quelle del genere dei Cardini e delle Ostriche, che ognun sà soggiornare in acqua non intieramente salsa.

Ma lasciamo questo luogo per risalire la valle ad esaminare le formazioni fluviali che vi si notano. Tutto il fondo è ripieno di quella mescolanza di materie ricomposte, che dicemmo avvenuta quando furono scavate le valli dalle rodenti fiumane. Se ci conduciamo a Pontemolle ove sono state aperte delle cave di sabbia per uso delle strade in quelli stessi depositi che riempiono il fondo della grande valle, ben si scorgerà di quali materie si compongono, e cosa racchiudono. Argille e Sabbie rimescolate, lavate e scolorate, miste a ciottoli calcari di varia grossezza, frammenti di tufi vulcanici rotolati e resi erratici, pezzi di lave di tutte specie, piriti convertite in ferro idrato, pezzi di travertino divelti dalle roccie, e letti di una sabbia puramente calcare formano tutto un composto disseminato di cristalli di pirosseni, e di leuciti farinose. Di tutto questo si compongono strati corti e disordinati, formanti però tutto un letto generale compreso nella estenzione del piano. Dentro un tal letto poi frantumi di ossa elefantine d'Ippopotami, e di Rinoceronti, mescolate ad ossa di Cervi, Bovi,

Cavalli ed altri scheletri conservati di animali, come il Tasso e la Lince, che possono giudicarsi contemporanei, associate ad ossa di vari uccelli e pesci di acquadolce, a legni disfatti, e a conchiglie del genere *Unio*.

Se dalle cave di Pontemolle ci conduciamo a quelle aperte sulle radici del Monte Verde fuori la porta Portese, noi avremo occasione di osservare quei depositi intieramente analoghi ai descritti, addossati al tufa liboide di che é composto il monte, il quale pure si cava come pietra di fabrica. Da ambedue queste località sono state tratte le più belle ossa fossili della mia collezione.

Non basta che questi depositi meccanici ci somministrino le prove della verità della nostra esposizione, concorrono eziandio i depositi chimici a fare altrettanto; io voglio intendere dei travertini che incrostano le roccie fiancheggianti. E quì abbiamo a ricordare che le acque non ebbero opportunità a depositarli se non dove erano tranquille e pacifiche, e perciò rinvengonsi travertini solo in quei luoghi ove si verificarono tali condizioni. Tanti però ne sono restati nella nostra vallata, da fondare comodamente il criterio relativo all'assunto che mi sono preso. Tutta la costa tiberina dei monti Parioli è ricoperta di essi, e lo era eziandio l'angolo del Pincio che sovrasta la porta dal Popolo, se non fosse stato demolito come ognun sa per farvi la villa pubblica. Questi travertini si distendono fin quasi alla foce dell'Aniene nel Tevere, seguendo l'andamento dei monti Parioli, sul lato occidentale dell'Aventino che guarda la via di Marmorata, come pure sotto il Giannicolo per servire di fondamenta ai bastioni della città alla salita del Cemeterio di S. Spirito. Lungo il restante della grande vallata si mostrano sempre quà e là sparsi sulle coste, che chiaramente dimostrano essere tutti in essa compresi.

Una delle principali cose da notarsi nei travertini quaternari é quella di non oltrepassare mai oltre un livello determinato, che segua il pelo dell'acqua fiumana al di sotto di cui si formarono. Questo livello nella campagna romana in genere può stimarsi elevato a metri 30 sul livello del mare. Agevol-

mente può osservarsi che in tutto il decorso dalla foce dell' Aniene alla porta del Popolo i travertini dei monti Parioli non si sollevano mai al di sopra di quella linea orizzontale, che nettamente seguano sulle roccie tufacee a cui sono addossati. Che queste formazioni siano assolutamente di acqua dolce, bastantemente lo provano i vegetabili terrestri e locustri, i *Limnei*, *Planorbis*, *Elici* etc. proprii di essi, che come dicemmo, ne caratterizzano l'epoca.

Finalmente i depositi moderni che s'incontrano nel suolo romano, si riducono agli antichi sedimenti dei fiumi attuali. Essi indicano a qual termine era giunta la natura in quei primi tempi dell'era nostra. Quale calma regnasse nel nostro clima noi l'abbiamo dagli antichi depositi del Tevere che riempiono gl'interstizi delle ghiaje diluviane, ne uguagliano il terreno, e lo rendono fertile. Impiccolito il fiume, allungato il suo corpo, arrestata la corrente dalle continue spire del suo alveo, le acque non ebbero il potere che di deporre una fina sabbia argillosa forse prodotta dalla stessa lavatura dei terreni su cui passava. Dentro questi depositi si rinvengono pure vestigia di vegetabili e delle ossa fossili, fra le quali quelle del Bufalo italiano e di una Damma, a cui io diedi il nome di *Dama romana,* che dimostrano essere questa deperita, quello restato fino ai nostri tempi.

Tolti così ad esame tutte le diverse specie de' terreni che si riscontrano sul suolo romano, e dimostrata con essi la storia di tutte le fasi a cui andò soggetto; fa d'uopo risalire nel campo di quelle grandi vicende, e vedere più da vicino i speciali cambiamenti che trasformarono continuamente l' aspetto del bacino di Roma fino ai tempi storici. Ed ecco che primo si affaccia alla nostra mente il suo stato, allorchè la fiumana del Diluvio la scavò, la riempì e la trascorse. Da sicuri indizi oggi sappiamo che nel luogo ove poi fu edificata Roma, in mezzo a quella piena quattro isole sorgessero. Due di queste si componevano delle cime del monte Capitolino, che di forma circolare estollevano i loro capi fuori dell'acqua, mentre il corpo del monte ne rimaneva coperto. Una di figura trapez-

zoidale più grande le seguiva, costituita dal Palatino, finalmente la quarta rappresentata dal Vero-Aventino, più grande di tutte ne compiva la serie, affettando quasi la figura di un cuore obliquo coll'apice rivolto alla corrente.

Se consideriamo lo stato tumultuario e violento del corpo di quelle acque, e la facilità che hanno questi fiumi a formare deviazione e nuovi alvei, quando la loro forza è massima, e se facciamo attenzione allo stringimento che soffriva la corrente in quel luogo per il ravvicinamento delle due sponde; noi non saremo sorpresi come questa per isfogare la quantità del fluido che trascinava si aprì un nuovo passaggio con un braccio di deviazione attraverso i tre torrenti che scaricano le acque della sponda sinistra. Così quel lato si divise in tre principali sezioni, facendo, come dissi, comparire quattro isole sporgenti sopra il iivello dell'acqua. Così concepite quelle accidentalità, andiamo ad esaminarne le prove di fatto, della loro figura, del livello delle acque, e dei depositi che rimasero.

La maniera con cui sono tagliati quei monti, ci suggeriscono le direzioni delle correnti che vi passarono. La figura circolare ellittica del Capitolino ci dà esempio di una erosione circolare, perchè primo offrivasi alla corrente costretta a ripartirsi, la quale incontrando le acque della sponda era obbligata a deviare e girargli intorno. La forma poi quadrilatera del Palatino ci somministra l' idea di due correnti ripiegate ad angolo una contro l'altra, in maniera da descrivere un quadrato. L'apice infine della figura cordata dall'Aventino ci dimostra la ripartizione delle acque, e la loro ricongiunzione alla base.

La seconda prova che questa assertiva non è ipotetica, la ricaviamo dalle livellazioni; imperocchè conoscendo l'altezza a cui quelle correnti giunsero segnata dalla linea orizzontale dei travertini noi siamo sicuri che portata lungo tutte le vallate, ci dichiara essere queste di un fondo molto inferiore, e perciò occupate dalle acque. Il piano attuale di tutte queste fosse è alto sul mare fra i 14 e i 16 metri, e il livello dei travertini, come dicemmo, è di metri 30. La differenza fra queste due cifre ci darà la profondità di quelle acque.

Affacciandosi ora alla carta pubblicata dal Brocchi, e leggendo in essa il sabbione fluviale distinto coi nomi di *Sabbia, calcaria e marna*, e di *Sabbia silicea*, e *argilla*, condotto in tutto il fondo di quelle valli; vediamo disegnarsi in esse il corso di quei bracci di fiume, e l' andamento delle loro correnti. Ma non solo una prova ne è dato trarre dal sabbione del fondo, l'abbiamo altresì dai depositi elevati sul dorso di quelle colline. Nell'intermonzio del Campidoglio la statua equestre di Marco Aurelio è piantata sullo stesso sabbione che ne riempie la concavità, contenente conchiglie fluviali, dimostrando la sommerzione di questa parte, e l'emerzione delle due cime. L'istesso sabbione che prende origine dai travertini dell' Aventino alla marmorata si prolunga in quel braccio che divide questo colle dal falso-Aventino, addossandosi al tufalitoide vulcanico che ne forma la massa. Ciò può osservarsi da tutti nella vigna dei Gesuiti sotto s. Prisca, dove sono aperte cave dell' uno e dell' altro. Vi si rinvengono in quella località ossa fossili di animali quaternari, e moltissime conchiglie del genere *Unio*, che ognun sà essere specie d'acqua dolce. Che se d' altronde non abbiamo altri esempi da citare di depositi diluviani elevati dal suolo, ciò dipende, o che le acque agitate e correnti non li lasciarono, o lasciati si distrussero dalle successive vicende a cui andò soggetta la città, ovvero perchè restano celati a noi dalle fabriche moderne.

Abbiamo già detto che quelle acque dovettero avere soggiornato a quell'altezza per lungo tempo atteso lo sviluppo delle generazioni di animali e vegetabili; ora non possiamo riferire questa quantità di tempo, poichè come dicemmo da principio, non possiamo stabilirne un criterio. Il fatto si è che le acque dopo esservi restate lunga pezza si abbassarono e scolarono nel mare, lasciando il Tevere scorrere nel fondo, residuo testimoniale di quelle vicende. I fossi delle sponde allungarono il loro corso per raggiungerlo, e il basso fondo ineguale e scabro ritenne acque stagnanti, e putride pozzanghere, forse alimentate dalle loro escrescenze. La vegetazione scese dai monti adjacenti, e rivestì quelle valli dei suoi prodotti. Così a

poco a poco le piante divenute arboree, la valle romana si rese incolta, selvaggia, umida, e insalubre. Sapendo dagli antichi scrittori che questo suolo prima che fosse popolato dagli uomini era coperto di boschi che ne rivestivano specialmente i colli, e ingombro di paludi che ne inondavano le valli.

Noi ancora non sappiamo per quanto tempo si mantenne questo stato del suolo, conosciamo però che tale ancora era all'epoca della fondazione di Roma, 753 anni avanti l'era volgare. Essendo certi peraltro che questo suolo era già abitato in quel tempo da uomini di origine diversa, dobbiamo inferirne essere in qualche modo cambiato d'aspetto specialmente presso le loro dimore; non però il sito preciso ove fu fabbricata la nostra città perchè appoggiati sempre alle autorità dei scrittori antichi, possiamo accertare che alcuni dei colli romani furono denominati a causa dei boschi che li rivestivavo. Il Celio fu detto *Querquetulano* dalle querci, il Viminale dai Vinchi, e celebri si resero i lauri e i mirti dell' Aventino, e i Faggi dell'Esquilino, molti dei quali consagrati a divinità pagane si mantennero anche nei tempi di storia certa.

Quanto alle acque stagnanti ci dicono gli antichi, due paludi essere restate quando Romolo eresse la città sul Palatino, e queste tramandare miasmi da rendere pestifero l'ambiente, e Cicerone nel libro *de Republica* ci avverte che [Romolo seppe scegliere un luogo salubre, perchè alto e fuori della zona miasmatica, alludendo allo stato del suolo sottoposto. Uno di quelli ristagni fù nella pianura del Campo Marzio chiamato *Palude Caprea*, l'altro sotto il lato occidentale del Palatino, detto *Velabro* che dividevasi a foggia di V a bracci ineguali, uno conosciuto col nome di *Velabro maggiore*, l'altro con quello di *minore*. Ambedue si resero celebri, questo perchè vi furono esposti Romolo e Remo, quello fu testimonio della morte del fondatore di Roma per opera di una congiura Senatoria.

Se attentamente si guardi la carta, tanto la palude Caprea, quanto i due Velabri si distesero lungo il corso dei tre principali torrenti, che percorrevano la valle della sponda sinistra, nel luogo dove le acque della corrente principale aveano sof-

ferta quella deviazione nell' epoca quaternaria. Questi sono: 1°, quello che raccoglieva le acque del colle degli Ortuli e del Quirinale, il quale avanti di raggiungere la corrente del Tevere dilatava le sue onde sui piani del Campo Marzio, e vi produsse la palude Caprea: 2°, quello che condusse i scoli del Quirinale, Viminale e Esquilino, scorrente fra il Palatino e il Capitolino ove poscia fu il Foro; portandosi come il primo fu la causa del piccolo Velabro, e dell'annesso *Lago Curzio* che può riguardarsi come un brano distaccato di esso; 3°, Il torrente poi che portò le acque dell'Esquilino, del Monte d'Oro e degli Aventini fu l'origine del grande Velabro che si congiunge col piccolo nel punto ove questi torrenti si scaricavano con una sola foce nel Tevere. Possiamo da tutto questo arguirne che quelle acque stagnanti erano più alte del Tevere raccolte in concavità senza scoli, e alimentate da quelli torrenti.

Scompariscono ora tutte le difficoltà dei tempi, conciossiachè entrando nelle epoche storiche abbiamo gli antichi scrittori stessi che ci avvisano delle vicende del Tevere, fino alla sua totale e artificiale riduzione. Da essi sappiamo pertanto, che sotto l'ultimo Tarquinio l'ingrandimento della città obbligò quel Re dei romani ad occuparsi di sgombrare delle acque il Velabro. Costrusse la cloaca massima, opera degna di loro, che dopo 23 secoli e mezzo tuttora esiste per essere ammirata dal mondo, e servire ancora allo stesso fine, cioè di condurre le acque al Tevere. Ricaviamo ancora che la Palude Caprea fu altresì diseccata, e quella contrada del Campo Marzio fu denominata *Capriliae*. Finalmente per testimonianza loro conosciamo che il suolo romano fu diselvato, e consagrato alla cultura dei campi, e che perciò tanto migliorò nel suo clima, indipendentemente dalle patologiche condizioni dell' atmosfera che tuttora si mantengono.

A ridurre in completo l' enumerazione delle principali vicende a cui fu sottoposto il nostro Tevere, resta a dire alcuna cosa dell'Isola tiberina, la quale ci dimostra quanto questo fiume anche nei tempi storici venne a degradarsi e impoverirsi di acque. Sono pienamente d'accordo gli antichi scrittori che

il Tevere lasciasse quà e là nel suo decorso dei banchi di sabbia, che restavano poi allo scoperto nelle acque magre in tempo d'estate. Ora l'anno di Roma 246, tanto fu l'odio concepito dai romani contro i Tarquini, che il Senato ordinò fossero confiscati i loro beni, e donati al popolo. Questi furono messi a sacco, e le biade recise furono gettate nel Tevere. Trasportate dalla corrente, si arrestarono in uno di quei banchi che scuoprivasi sotto il monte Capitolino, e servirono di barriera ad altre materie trascinate dalla corrente. Queste accumulate ridussero quel banco in una piccola isola, la quale si fece permanente, dapoichè si cuoprì di vegetazione, e si cambiò in bosco. L'industria dei romani si aggiunse a quelle operazioni naturali, avvegnachè ajutata da palizzate, e quindi da opere murarie si cambiò in una contrada della città, ove furono elevate fabbriche sontuose, delle quali ancora ammiriamo le vestigia.

Queste vicende del Tevere si notano anche al giorno d'oggi, motivo per cui possiamo con ragione credere che molte isolette siano comparse nel suo alveo negli andati tempi, e che non ajutate dall'arte, siano quindi scomparse nei cambiamenti di direzione della corrente, e nelle erosioni che continuamente vi operano le acque. Non ostante i continui cambiamenti a cui vanno soggette le ripe e i banchi depositati dai fiumi, un altra di quelle isolette è giunta a noi, oltre l'isola Tiberina, cioè quella di rimpetto la fontanella di Acquacetosa fra questa e la tenuta di Tor di Quinto, ricoperta di bosco, che ripartisce le acque del Tevere in due bracci ineguali. Questa è certamente posteriore all'isoletta Tiberina, e forse assolutamente moderna, perchè non la troviamo mai menzionata nelle epoche trascorse.

Che il Tevere poi abbia continuamente cambiato il suo alveo e variamente decorsa la grande valle quaternaria, ne abbiamo una pruova sulla via Flaminia per quel tratto che scorre dalla porta del Popolo a Pontemolle. Il taglio a picco che scorgiam fuori di quella porta sui travertini dei monti Parioli, fu opera del Console C. Flaminio l'anno 567 di Roma, espressamente fatto per far passare la sua strada a lato del Tevere,

che radente scorreva sotto quelle rupi, dove si mantenne fino al VII secolo dell'era volgare, dopo la quale, spostandosi si avvicinò sempre più alla riva destra per giungere fin dove oggi si trova.

Ecco compiuto l'assunto che mi sono proposto, di aggiungere cioè alle osservazioni diligenti del Brocchi la storia fisica del bacino di Roma. Avanti però di chiudere questo qualunque siasi ragionamento, credo poter conchiudere:

1. Che il piano della campagna romana fu un fondo marino, nell'epoca terziaria:

2. Che posto all'asciutto fu percorso nell'epoca quaternaria dalle acque diluviane, le quali vi scavarono il bacino di Roma:

3. Che dopo questo passaggio, avanti la fondazione di questa città, il luogo fu ingombro di orride boscaglie e pestifere paludi:

4. Che occupato dagli uomini fu ridotto a quello stato in cui oggi lo scorgiamo:

5. Finalmente che i climi nel decorso di quelle vicende furono sempre diversi, e la natura agitata e sconvolta, a poco a poco divenne calma e benefica, rendendo questo suolo fertile e ridente.

Roma li 2 Settembre 1849.

LETTERA
DEL SIG. PROF. VINCENZO AMICI
AL COMPILATORE

Pregmo Signore.

Nel fascicolo del giugno 1850 del suo riputato giornale ho letto una Nota del sig. Placido Tardy sopra una nuova Equazione di Idrodinamica dove gli è piaciuto di avvertire che nel mio corso di Idraulica si riscontra la seguente espressione

$$V = \frac{A}{RR'd\tau d\tau'}.$$

in cui R ed R′ sono i raggi osculatori delle due linee di curvatura al punto x, y, z della superficie di spostamento, $d\tau$, $d\tau'$ gli angoli di contingenza delle stesse linee al medesimo punto, ed A una quantità variabile col tempo e da una trajettoria all'altra. — Aggiunge poi che egli la crede *inammissibile* perchè *non presenta un espressione finita*, e perchè è *mal valutata* l'area elementare del filetto fluido.

Risponderò brevemente che nel mio corso di Idraulica non esiste precisamente la formula citata, ma bensì la seguente (§. 343.)

$$V = \frac{B}{rr'd\varepsilon d\varepsilon'} = \frac{Wdm}{rr'd\varepsilon d\varepsilon'}$$

In questa equazione $d\varepsilon$, $d\varepsilon'$, r, r' sono rispettivamente gli angoli di contingenza, ed i raggi d'osculo di due archetti esistenti in una superficie normale ai filamenti fluidi, e *perpendicolari* fra loro nel punto delle coordinate x, y, z; e poichè dm rappresenta un differenziale di superficie, dello stesso ordine del prodotto $d\varepsilon d\varepsilon'$ si rende manifesto che il valore di V è finito, e la formola è ammissibile contro il parere del sig. Tardy.

Ad unica prova poi del secondo asserto il sig. Tardy rimanda alla pagina 34 della sua Memoria per il calcolo dell' area della sezione infinitesima del filetto fluido. Ed io accettando la sua autorità, e le sue denominazioni gli farò osservare che nell' ipotesi da me assunta l' angolo ω è retto, e però sen.$\omega = 1$, e l'elemento superficiale eguale a $\Delta\ \Delta_1$, ossia eguale al prodotto di due archetti fra loro normali che hanno rispettivamente per valore $r\varepsilon$, ed $r\varepsilon'$, e che coincidano in questo caso colle normali infinitesimi $\Delta\ \Delta_1$.

Potrei altresì dimostrargli che l'aver supposto l' angolo $\omega = 90°$ non induce nessuna variazione nel valore della velocità. Imperocchè una tale ipotesi somministra l'equazione

$$f'(x)\,\varphi'(z) + f'(y)\,\varphi'(y) + f'(x)\,\varphi'(z) = 0$$

che introdotta nell'espressione di $\Delta\Delta_1$, e sostiuito nel valore

$$V = \frac{A d\alpha d\beta}{\Delta\Delta_1}$$

dà l'identico risultato ottenuto altrimenti dal sig. Tardy.

Resta dunque provato che la mia formula non solo è ammissibile perchè può ridursi a forma finita, ma che da essa può anche dedursi quella del Tardy, che ne rappresenta una trasformata.

È tanto più da meravigliarsi che il sig. Tardy abbia così mal a proposito citata e criticata la mia formula quando si consideri che prima ancora della pubblicazione della sua Memoria io aveva letto al congresso scientifico di Genova, e fatto di pubblica ragione coll'aggiunta di varie annotazioni uno scritto intitolato : *Considerazioni sulla teoria del moto dei liquidi*, nel quale si additavano le applicazioni della citata formula nel senso preciso con cui la proposi, e quando ancora si sappia che fino da quell'epoca ebbi col sig. Tardy frequenti colloqui intorno a questo e ad altri argomenti idraulici, circa i quali non gli occultai nè le mie idee nè i miei calcoli in parte eseguiti, in parte abbozzati ; e che pure avevano una singolare analogia con alcuni di quelli che riscontrai nella sua memoria posteriormente data alla luce.

Le sarò grato se ella vorrà inserire in uno de'prossimi numeri queste mie brevi osservazioni, ed intanto profitto di questa occasione per confermarmi con distinta stima

Firenze 30 Giugno 1850.

Suo devmo Servitore

VINCENZO AMICI.

SOPRA LA COMETA DI PETERSEN ATTUALMENTE VISIBILE AD OCCHIO NUDO

NOTA

COMMUNICATA
DAL PROF. A. COLLA
Direttore dell'Osservatorio Metereologico
dell'Università di Parma.

La cometa telescopica scoperta ad Altona nella notte del 1.° al 2 maggio del corrente anno dal sig. dott. *Petersen* nel Dragone, a 19^h 25^m di ascensione retta e $+$ 71° 10′ di declinazione (V. *Annali* pag. 241), già da alcune notti è visibile ad occhio nudo come una stella nebulosa di 4.ª grandezza, e coi telescopi come un ampio ammasso circolare di luce assai brillante, con nucleo stellare e coda che si dispiega con sfumatura in direzione opposta al sole per la lunghezza di circa un grado. Dalla costellazione del Dragone in cui apparve, essa passò nell'Orsa Minore, e da questa di nuovo nel Dragone, in quella parte occupata dalla coda, e da alcuni giorni percorre la costellazione di Boote. Nella sera del 1.° corr. essa trovavasi tra la stella λ e le tre del piccolo triangolo χ, θ, ι che vedesi superiormente all'ultima stella della coda dell'Orsa maggiore, ed ora trovasi tra le due stelle λ e γ, ma più vicino a quest'ultima.

L'orbita di questa cometa è già stata calcolata da diversi astronomi. Erano appena scorsi quattro giorni dalla data della scoperta, che i sig. *Giorgio Rümker*, *Sountag* e *Riccardo Schumacher* ne diedero degli elementi approssimativi, che vennero pubblicati nel num. 715 (16 maggio, delle *Notizie astronomiche* dell'Illustre Sig. Consigl. *Scumacher*, i quali fissavano il passaggio al perielio della cometa dall'8 all'11 giugno. Ma questi astronomi ben tosto si avvidero che questi loro elementi, mentre rappresentavano in modo soddisfacente le prime osserva-

zioni, più non si presentano per le osservazioni posteriori, perciò essi ne calcolarono dei nuovi che si trovano riferiti nel num. 717 (30 maggio) delle citate *Notizie astronomiche*, secondo i quali il passaggio al perielio avrebbe luogo tra il 9 e il 23 luglio corrente.

Gli astronomi *Plantamour* e *Yvon-Villarceau*, avendo dal canto loro calcolati gli elementi dell' orbita della cometa, ma sopra osservazioni più distanti, sono d' accordo nel fissarne il passaggio al perielio ai 23 del corrente luglio. Gli elementi del sig. *Plantamour* sono fondati su di una osservazione di Berlino del 5 maggio e su due fatte a Ginevra ai 12 e 18 dello stesso mese, avendo inoltre tenuto conto delle correzioni dovute alla parallasse e all'aberrazione, e quelli del sig. *Yvon-Villarceau* sono basati su cinque osservazioni in data dei 3, 10, 16, 28 maggio e 4 giugno, la prima delle quali è una combinazione delle posizioni osservate ad Amburgo ed Altona, e le altre sono dell'osservatorio di Parigi. Ecco tali elementi :

ELEMENTI DEL SIG. PLANTAMOUR

Passaggio al perielio 1850 luglio 23, 86300 t. m. Berlino
Distanza perielia . . . 1, 081708; Log. = 0, 0341100

Longitudine del perielio	273°	31′	34″ 4	Equin. med. 24 luglio
Longit. del nodo ascend.	92	55	40, 7	
Inclinazione	68	15	58, 6	

Movimento diretto

ELEMENTI DEL SIG. YVON-WILLARCEAU

Passaggio al perielio 1850 luglio 23, 43011 t. m. Parigi
Distanza perielia . . 1, 0815269

Dist. del perielio al nodo ascend.	180°	29′	7″ 5	Equin. med. 12 maggio
Longitudine del nodo ascendente	92	52	25, 0	
Inclinazione	68	11	0, 7	

Movimento diretto

Gli elementi del sig. *Plantamour* rappresentano l' osservazione media a circa 0″, 3 in longitudine, e a 3″, 2 in latitudine, e quelli del sig. *Yvon-Villarceau* la media osservazione ne del 16 maggio a + 4″, 4 in AR., e a + 2″, 7 in decli-

nazione. Il sig. *Plantamour* mercè i suoi elementi ha calcolato una effemeride approssimativa delle posizioni geocentriche della cometa dalla fine di maggio alla fine dell'attuale mese di luglio, cioè sino all'epoca in cui la cometa cesserà di essere visibile per le nostre latitudini, ma continuerà a vedersi per un più lungo tempo nell'emisfero australe. Questa effemeride basterà per far ritrovare la posizione della cometa e per fornire i dati necessari alla riduzione delle osservazioni; essa è calcolata di due in due giorni per $11^h\ 2^m\ 24^s$ t. m. di Berlino, o in frazione di giorno 0, 46. Chi amasse di vederla per intero, la troverà nel fasc. di giugno della *Biblioth. Universelle* di Ginevra. Io mi limito a riferire quella parte che risguarda il mese di luglio

Data	ascensione retta	Declinazione	Log. distanza della cometa alla terra
Luglio 2	214° 25′, 4	+ 46° 12′, 7	9, 73775
4	212 45, 7	+ 41 55, 1	
6	211 14, 2	+ 37 14, 9	9, 70364
8	209 50, 3	+ 32 11, 5	
10	208 33, 1	+ 26 49. 9	9, 67921
12	207 21, 9	+ 21 12, 6	
14	206 16, 1	+ 15 26, 6	9, 66895
16	205 15, 1	+ 9 38, 0	
18	204 18, 6	+ 3 53, 2	9, 67512
20	203 25, 9	— 1 40, 4	
22	202 36, 8	— 6 59, 6	9, 69634
24	201 50, 8	— 11 59, 6	
26	201 7, 7	— 16 37, 6	9, 72849

Rilevasi da questa effemeride che verso il 16 o 17 di questo mese la cometa toccherà la sua più piccola distanza alla terra, la quale sarà un po' meno della distanza della terra al sole. Se la longitudine del nodo dell'orbita fosse stata maggiore di circa una trentina di gradi, la cometa sarebbe passata ad una piccolissima distanza dalla terra, giacchè il nodo discen-

dente avrebbe coinciso presso a poco col luogo occupato dalla terra al momento in cui la cometa si trovava in questo modo.

Calcolando lo splendore della cometa, mercé le distanze al sole e alla terra, il sig. *Plantamour* ha trovato che il 16 di questo mese la cometa sarà 21 volte più brillante che non l'era all'epoca in cui fu scoperta; l'aumento di splendore sarà verosimilmente maggiore ancora in ragione dello sviluppo dello splendore intrinseco nella vicinanza del sole.

Secondo l'astronomo sig. Yvon-Villarceau (V. *Institut.* n. 860 = 26 giugno) il minimo di distanza della cometa alla terra avrà luogo tra il 12 e il 15 luglio corr. e sarà circa 0, 46 della distanza della terra al sole. La cometa a quest'epoca sarà situata quasi nel prolungamento della linea che congiunge *Arturo* e la stella ε della Vergine, e verso il 23 in cui, a parer suo, essa sarà al massimo di splendore, passerà in vicinanza della *Spica*. Egli pensa che sull' orizzonte di Parigi la cometa resterà visibile sino ai 10 o agli 11 agosto, e nell' emisfero australe sino alla fine di settembre.

Parma, 5 luglio 1850 (*).

A. Colla.

(*) Colgo quest'occasione per dire due parole intorno alle due comete *Schweizer*, *Goujon* apparse nell' anno 1849. Nella mia nota che diedi intorno a questi due astri nella *Raccolta Scientifica*, p. 223-227, annunziai che la cometa *Schweizer* alla fine di aprile aveva un movimento proprio assai rapido verso il Sud, in modo che poco dopo la metà del successivo maggio si rese a noi invisibile. Ora sappiamo che la cometa nella sua riapparizione potè essere osservata per due volte a Cambridge agli Stati Uniti alle date dei 24 e 26 agosto mentre trovavasi ad una declinazione australe maggiore di 27 gradi.

Quanto alla cometa di *Goujon* ella fu da me seguita sino ai 20 agosto, ma dopo questa data fu osservata, mercè fortissimi strumenti ottici, negli osservatorj di Berlino, di Liverpool e di Cambridge agli Stati Uniti sino ai 19 settembre e nei due primi perfino ai 22. Gli elementi definitivi di questa cometa calcolati dal sig. *Goujon* sull'insieme dalle osservazioni fatte durante la sua apparizione dal 15 aprile sino ai 22 settembre, sono i seguenti:

Passaggio al perielio 1849, maggio 26, 50453 t. m. Parigi
Longitudine del perielio 235° 43' 54" 7 } equin. medio
Longitudine del nodo ascend. 202 33 21, 9 } del 15 luglio
Inclinazione 67 9 19, 0
Distanza perielia 1,1593320
Moto diretto

ESTRATTO DI UNA LETTERA DEL SIG. SANTINI
direttore dell' Osservatorio di Padova
al direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano.

Come avrà sentito il pianeta Igea è stato di nuovo ritrovato in Berlino, ed in Napoli. Il sig. D' Arrest, dietro le osservazioni di Berlino, ha corretto gli elementi di Igea, che già si allontanavano in quest' anno sensibilmente dal vero, ed ha ottenuti il seguente sistema, che dietro un confronto da me fatto con le osservazioni di Napoli del 13 e 14 giugno non si allontanano dal vero, che pochissimi secondi.

Epoca . . . . $4 = 198°, 7'. 34'', 98$ } pel 15 aprile 1849 0^h
Perielio . . . $\pi = 226, 39. 53, 89$ } t. m. in Berlino dall'
Nodo . . . . . $\omega = 287, 35. 39, 11$ } Eq. m., o Genn. 1849.

Inclinazione $i = 3, 46. 59, 12$
Ang. di eccentricità $= \varphi = 5°, 23', 22'', 64$; e $= 0,0939280$
Log. $a = 0,4944079$; moto diurno medio sid. $= 643'', 2723, = \mu''$

Per ricercare il pianeta in questo mese, ho calcolata la seguente piccola effemeride; il sig. Trattenero crede averlo veduto; ma il cattivo tempo, non gli ha permesso di poterlo osservare in due o tre sere consecutive

Effemeride di IGEA pel mezzodì medio di Berlino.

		AR. app.	Decl. app.	Log. di dist. dalla terra
Luglio 1850	1	291°. 17', 2	—22°. 10', 3	0,2895
	5	290. 26, 7	22. 12, 2	0,2885
	9	289. 35, 8	22. 14, 2	0,2884
	13	288. 44, 0	22. 15, 4	0,2894
	17	287. 53, 1	22. 16, 6	0,2914
	21	287. 4, 1	22. 17, 3	0,2944
	25	286. 17, 9	22. 17, 6	0,2981
	29	285. 34, 4	—22. 18, 1	0,3027

Sulle indicazioni inviatemi verso la fine di maggio dall'egregio nostro collega D. Gasparis io pervenni a ritrovare il suo

nuovo pianeta Partenope. Io lo osservai per due o tre sere; ma in seguito avendo dovuto intraprendere per consiglio medico una cura di bagni, ho dovuto abbandare le osservazioni astronomiche del pianeta e della cometa. Il sig. D. Trattanero, abilissimo giovane, mio aggiunto, le ha però continuate con cura, ed asserisce essere ormai divenuto sommamente debole, e difficile a vedersi mentre invece la cometa (che si avvicina al suo perielio) è molto splendente, e distinguesi anche ad occhio nudo. Eccole le nostre osservazioni di Partenope.

Osservazioni di Partenope

Giugn. 1850	T.m. di Padova	AR. osservata	Decl. osservata	N.° dei confronti	Osservatori
9	10h, 44', 21''.9	224,° 21', 13. 4	— 9°, 43', 26''.6	2	Santini
10	10, 35, 94. 7	224, 12, 16. 2	9, 43, 46. 7	4	Santini
11	10, 28, 53. 7	224, 4, 47. 8	9, 44, 9. 3	3	Tratte.
14	10, 26, 25. 9	223, 43, 6. 5	9, 46, 18. 1	3	T.
26	9, 52, 5. 8	222, 55, 9. 6	10, 8, 19. 2	2	T.
28	10, 0, 20. 2	222, 52, 55. 4	10, 13, 50. 9	3	»
30	10, 25, 17. 0	222, 52, 37. 8	10, 20, 6. 2	3	»
Luglio 3	9, 49, 44. 7	222, 55, 21. 5	10, 30, 36. 0	3	»
4	10, 5, 11. 6	222, 57, 13. 8	—10, 34, 9. 0	1	»

Dietro le operazioni dei giorni 18 e 31 maggio fatte in Napoli, e 14 Giugno fatta in Padova, ho indagato l'orbita del pianeta, e sono giunto al seguente sistema di elementi, che rappresenta con molta fedeltà anche le ultime osservazioni. (Le longitudini sono riferite all'Equinozio apparente.)

Epoca delle anomalie medie per		
0 giugno 1850. Tempo M. in Berl.	=	286°. 31′, 57″, 48
π	=	319°. 28′, 14″, 8
ω	=	124°. 53′, 56″, 7
i	=	4°. 38′, 11″, 6
φ		5°. 8′, 24″, 4
Log.a		0. 388657
Log.e = Log.senφ . . .	=	8. 952266
Log.μ''	=	2. 967021

$\mu'' = 926'', 874$. Tempo della rivoluz. sider. 1398,23 giorni.

L'anomalia vera ed il raggio vettore mediante l'anomalia eccentrica E si ottengono dalle seguenti formole

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,v\sqrt{r} = A\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,E \qquad \text{Log.A} = 0{,}212961$$

esssendo

$$\cos\tfrac{1}{2}\,v\sqrt{r} = B\cos\tfrac{1}{2}\,E \qquad \text{Log.B} = 0{,}173947$$

Per ultimo le coordinate eliocentriche del pianeta rapporto al piano dell'Equatore per facilitare il calcolo delle posizioni geocentriche; si ottengono (dietro i superiori elementi) delle seguenti equazioni

$$x = mr\,\text{sen}(v + M') \qquad \text{Log.}m = 9.99905 +;\ M' = 49°\,33',6$$

$$y = nr\,\text{sen}(v + N') \qquad \text{Log.}n = 9.97086 +;\ N' = 320°\,59',5$$

essendo

$$z = pr\,\text{sen}(v + P') \qquad \text{Log.}p = 9.55690 +;\ P' = 309°\,40',0$$

dietro questi numeri il sig. Trattenero ha calcolato la seguente effemeride per predisporre e facilitare le osservazioni del pianeta.

Effemeride di Partenope per 0h Tempo medio di Greenwich.

Giugno 1850	AR.del Pian.	Declinazione	long. dist. dalla terra
20	223° 12′, 54	— 9° 54′. 0	0. 1923
24	222 59, 04	10 2. 2	0. 2009
28	222 52, 64	10 12. 6	0. 2101
Luglio 2	222 52, 64	10 25. 2	0. 2194
6	222 59, 50	10 39. 7	0. 2291
10	223 12, 40	10 56. 0	0. 2391
14	223 33, 28	11 14. 3	0. 2489
18	223 59, 77	11 34. 1	0. 2589
22	224 32, 24	11 55. 2	0. 2689
26	225 10, 36	12 17. 5	0. 2789
30	225 54, 04	—12 40. 9	0. 2887

SULLA PROPAGAZIONE DELLA CORRENTE ELETTRICA NELL'INTERNO DI UNA SFERA

NOTA

DI R. FELICI DI PISA

1.° È noto che la teoria matematica del calore può generalmente servire alla ricerca delle leggi secondo le quali la corrente elettrica si proponga in un corpo conduttore; purchè la variabile che in detta teoria rappresenta la temperatura sia volta a rappresentare lo stato elettrico, o forza elettroscopica, pure variabile del corpo stesso, secondo i suoi diversi luoghi, e sia invariabile col tempo; e che di più si intenda nulla la dispersione del fluido elettrico per l'aria, o pel mezzo qualunque che circonda il conduttore, e si chiami corrente elettrica ciò che in quella teoria si dice eflusso di calore (*).

(*) Vedi in proposito una memoria del sig. Luigi Ridolfi inserita nel Giornale il Cimento. Anno 1847. Maggio—Giugno. Pisa, dalla Tipografia di Rocco Vannucchi.

Se, ciò ammesso, si tratta il caso di una sfera che abbia i poli di una pila in comunicazione con due punti qualunque della sua superficie, per mezzo di due reofori uguali fra loro e di assai tenui dimensioni in confronto alla distanza che li separa, e si cerca come varia la intensità della corrente al variare di questa stessa distanza, ed al variare del diametro della sfera, si trova il seguente teorema.

La corrente che si ottiene, nelle condizioni indicate più sopra, interponendo una sfera omogenea in un circuito voltaico, rimane costante, quando il rapporto fra la distanza dei reofori ed il diametro della sfera resta parimente invariabile.

Da questo teorema si ricava un corollario semplicissimo che può divenir utile nelle ricerche della fisica esperimentale; ed è il seguente:

« Le diverse intensità delle correnti che si possono ottenere interponendo in uno stesso circuito delle sfere omogenee ma di varie conducibilità, applicandovi i reofori alle estremità di un diametro, saranno indipendenti dai diametri delle sfere stesse, ma dipendenti solamente dalle loro conducibilità.

Ecco in brevi parole come si può dare di tutto ciò la dimostrazione analitica.

2.° Sia u lo stato elettrico variabile di un punto qualunque della sfera, e le di cui coordinate siano x, y, z; ed i reofori della pila sian posti, come già lo dicemmo, alla sua superficie. Avremo a soddisfare alla nota equazione differenziale di condizione

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

che è la stessa che si riscontra nella teoria del calore, quando è indipendente dal tempo la variabile u, che ora per noi esprime uno stato elettrico, ma che in quella teoria corrisponde alla temperatura. Chiamando r la distanza di un punto qualunque della sfera dal suo centro, la equazione che nella detta teoria deve aver luogo alla superficie si riduce nel nostro caso alla seguente

$$(2) \qquad \frac{du}{dr} = 0$$

nella quale si dovrà fare $r = a$ raggio della sfera. Ciò posto si troverà che il valore di u che soddisfa in pari tempo alle (1) (2) si potrà porre sotto la forma

$$(3) \quad u = K\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{K}{2a}\log\frac{r+r_1-a}{r+r_1+a} - \frac{K}{2a}\log\frac{r+r_2-a}{r+r_2+a},$$

K essendo un coefficiente costante, ed r_1 r_2 le distanze di un punto qualunque della sfera dal reoforo del polo positivo e dal reoforo del polo negativo della pila.

Per brevità tralascio di indicare il calcolo che mi ha condotto alla (3); ma sarà facile il verificarla sostituendo tal valore generale di u nelle formule (1) e (2), assumendo per valori di r, r_1, r_2 i seguenti

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_1^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$
$$r_2^2 = (x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 + (z-\gamma_1)^2,$$

ove α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 sono qualunque, purchè soddisfino alla equazione della superficie sferica di raggio a. E gioverà di più l'osservare che fra le variabili r, r_1, r_2, esisteranno l' equazioni di condizione

$$a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(rr_1),$$
$$a^2 = r^2 + r_2^2 - 2rr_2\cos(rr_2);$$

e che i tre termini del secondo membro della (3) soddisferanno parzialmente alla (1).

Supponiamo ora, per più semplicità, che i detti reofori siano posti nel piano delle xz, a distanze α uguali dall' asse delle z supposto, per esempio, verticale, talchè si abbia

$$\alpha = -\alpha_1, \quad \beta = \beta_1 = 0, \quad \gamma = \gamma_1,$$

e cerchiamo la intensità della corrente che attraversa la sfera. È chiaro che tale intensità sarà data dalla somma delle cor-

renti che attraversano il piano delle yz; perchè esso è normale alla retta α, e dividendo la sfera in due parti eguali circa alle varie direzioni ed intensità delle correnti parziali che la percorrono, è incontrato perpendicolarmente da tutte queste correnti, che sono quindi nel loro punto d'incontro con detto piano paralelle all'asse delle x. Seguendo sempre la teoria del calore si dovrà, per avere l'intensità dell'eflusso che attraversa il piano delle yz paralellemente all'asse delle x in un elemento Δ qualunque di detto piano, derivare la u rapporto ad x, e moltiplicare tale derivata per la conducibilità c della sfera, e per Δ, dopo avervi fatto $x=0$. Ciò dunque eseguendo e rimarcando che, relativamente al piano delle yz, si ha $r_1=r_2$, si troverà per l'intensità della corrente parziale Γ il valore

$$\Gamma=2\alpha c\mathrm{K}\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_1(r+r_1-a)(r+r_1+a)}\right)\Delta$$

Chiamando φ l'angolo che nel hostro caso fa la r (contenuta nel piano yz) coll'asse delle z, si avrà $\Delta=rdrd\varphi$; e la somma F cercata sarà espressa da

$$\mathrm{F}=2\alpha c\mathrm{K}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\varphi}{r_1^3}-2\alpha c\mathrm{K}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\varphi}{r_1(r+r_1-a)(r+r_1+a)}$$

Ora sarà facile vedere che si ha

$$r_1^2=r^2+a^2-2r\sqrt{(a^2-\alpha^2)}\,.\cos\varphi,$$

e che facendo

$$r=as\,,\ r_1=a\lambda\,,\ \lambda=\left[1+s^2-2s\sqrt{\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2}\right)}.\cos\varphi\right]^{\frac{1}{2}}$$

si avrà

$$(4)\ \mathrm{F}=2\frac{\alpha}{a}c\mathrm{K}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{sdsd\varphi}{\lambda^3}-2\frac{\alpha}{a}c\mathrm{K}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{sdsd\varphi}{\lambda(\lambda+s+1)(\lambda+s-1)}$$

e tal valore di F non dipendendo che dal rapporto $\frac{\alpha}{a}$ contiene la dimostrazione cercata.

3.° Quando si ha $a = \infty$ mentre α conserva un valore finito si potrà verificare che il primo integrale definito che entra nel secondo membro della (4) diventa parimente infinito; e ciò infatti deve essere giacchè F non può diventar nulla in tal caso, anzi essa è ridotta al valore seguente

$$(5) \qquad F = 2\pi c K;$$

e da ciò possiamo assicurarci con un calcolo semplicissimo.

Quando $a = \infty$ la (3) assume la forma semplicissima

$$u = K\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Poniamo l'origine delle coordinate nel punto di mezzo della retta 2α che separa i reofori della pila posti sulla superficie della sfera, ora però ridotta ad un piano che limita un mezzo di profondità infinita; e sia la retta 2α nell'asse delle x come dianzi. In questo caso r sarà la distanza del punto di mezzo della distanza dei reofori, ad un punto qualunque della sfera, e la forza F della corrente sarà, pure in questo caso, data dalla somma delle correnti paralelle alla x che attraversano il piano yz. Perciò chiamando φ l' angolo della r contenuta nel piano delle yz, coll'asse delle z verticale; si avrà facilmente la formula

$$F = 2\alpha c K \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{r dr d\varphi}{(r^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi c K$$

il quale valore è rimarchevole, per essere indipendente dalla distanza 2α dei reofori della pila.

La formula (5) è applicabile al caso della terra nelle esperienze del genere di quelle di già tentate dal Matteucci e dal Magrini.

La costante K può in quest'ultimo esser determinata in modo da somministrare una equazione di relazione fra la conducibilità della terra, e quella del circuito metallico che serve a terminare il circuito della pila, ed i dati dell'esperienza.

Sieno i reofori, nel caso ultimo citato, della terra, formati da due cilindri di raggio ρ e retti, posati colle loro basi sulla superficie della terra. Sia μ_1 la semidifferenza fra gli stati elettrici dei due reofori, relativamente alle loro superficie circolari che toccano la terra; ossia abbiasi

$$u = \mu' \quad \text{quando} \quad r_1 = \rho\,,\ r_2 = 2\alpha - \rho\,,$$
$$u = -\mu' \quad \text{quando} \quad r_1 = 2\alpha - \rho\,,\ r_2 = \rho\,,$$

e dalla formula

$$u = K\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

trascurando il rapporto $\frac{\rho}{2\alpha}$ si avrà

$$K = \rho\mu'\,, \qquad F = 2\pi\rho c\mu'\,.$$

Sia L la lunghezza del filo, o cilindro di rame, se di rame pure sono i reofori, che rappresenta una resistenza al passaggio della corrente uguale a quella presentata dalle pile e dal rimanente del circuito che serve a mettere la terra in un circuito; e per semplicità di calcolo supponiamo che tal lunghezza L sia presa per un filo di diametro ρ, uguale a quello dei reofori. Sia pure L_1 una lunghezza di quel filo che rappresenta la resistenza analoga della terra al passaggio della corrente; e sia μ la semidifferenza degli stati elettrici della pila ai suoi poli. Ciò posto, la forza della corrente nel caso in cui il circuito sia chiuso comprendendovi la terra dovrà essere uguale alla forza della corrente nel caso che alla terra si sostituisca la lunghezza L_1 di filo di rame; si avrà dunque, chiamando c_1 la conducibilità del rame, la relazione

$$2\pi\rho c\mu_1 = \pi\rho^2 c_1\,\mu : L + L_1\,.$$

Ora si osservi che in primo luogo, lo stato elettrico μ_1, dei reofori non cangierà sostituendo alla terra il filo L_1; ed in secondo luogo, che sul filo di rame, partendo dai reofori e andando verso i poli della pila, gli stati elettrici varieranno in

ragione della semplice distanza, contata sul filo, dai poli, e si avrà la proporzione

$$\mu : \mu_1 :: L + L_1 : L_1 ,$$

e quindi la formula

$$\frac{c}{c_1} = \frac{\rho}{2L_1}$$

che può essere utile nelle esperienze.

SUR UNE FORMULE POUR LA QUADRATURE DES SURFACES.

NOTE

DE M. WILLIAM ROBERTS

Je me propose, dans cette Note, de chercher l'expression pour l'aire d'une surface, dont l'equation est donnée par une relation entre la perpendiculaire (R) qu'on abaisse d'un point fixe sur un plan tangent quelconque et les angles (θ, φ) qui determinent la position de cette droite. En designant par x, y, z les coordonnées orthogonales, on a

$$R = x \cos\theta + y \sin\theta \cos\varphi + z \sin\theta \sin\varphi$$

d'on l'on deduit

$$\frac{dR}{d\theta} = - x \sin\theta + y \cos\theta \cos\varphi + z \cos\theta \sin\varphi$$

$$\frac{dR}{d\varphi} = - y \sin\theta \sin\varphi + z \sin\theta \cos\varphi .$$

En vertu de la relation connue

$$\cos\theta \, dx + \sin\theta \cos\varphi \, dy + \sin\theta \sin\varphi \, dz = 0$$

les equations donnent pour x, y, z les valeurs suivantes

$$x = R\cos\theta - \frac{dR}{d\theta}\sin\theta$$

$$y = \cos\varphi\left(R\sin\theta + \frac{dR}{d\theta}\cos\theta\right) - \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{dR}{d\varphi}$$

$$z = \sin\varphi\left(R\sin\theta + \frac{dR}{d\theta}\cos\theta\right) + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{dR}{d\varphi}$$

Or on sait que l'aire S de la surface donnée a pour expression

$$S = \iint \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}\, d\theta\, d\varphi$$

ou

$$X = \frac{dy}{d\theta}\frac{dz}{d\varphi} - \frac{dy}{d\varphi}\frac{dz}{d\theta}, \quad Y = \frac{dz}{d\theta}\frac{dx}{d\varphi} - \frac{dz}{d\varphi}\frac{dx}{d\theta}$$

$$Z = \frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\theta}$$

en sorte, que n'aurons besoin, que de trouver les coefficiens differentiels

$$\frac{dx}{d\theta}, \frac{dx}{d\varphi} \text{ etc.}$$

Mais on verra facilement que

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\left(R + \frac{d^2R}{d\theta^2}\right), \quad \frac{dx}{d\varphi} = \cos\theta\frac{dR}{d\varphi} - \sin\theta\frac{d^2R}{d\theta d\varphi}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\varphi\cos\theta\left(R + \frac{d^2R}{d\theta^2}\right) + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin^2\theta}\frac{dR}{d\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{d^2R}{d\theta d\varphi}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \cos\varphi\left(\frac{dR}{d\varphi}\sin\theta + \frac{d^2R}{d\theta d\varphi}\cos\theta\right) - \sin\varphi\left(R\sin\varphi + \frac{dR}{d\theta}\cos\theta\right)$$

$$- \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{dR}{d\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{d^2R}{d\varphi^2}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \cos\theta \sin\varphi\left(R + \frac{d^2R}{d\theta^2}\right) - \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin^2\theta}\frac{dR}{d\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{d^2R}{d\theta\, d\varphi}$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \sin\varphi\left(\frac{dR}{d\varphi}\sin\theta + \frac{d^2R}{d\theta d\varphi}\cos\theta\right) + \cos\varphi\left(R\sin\theta + \frac{dR}{d\theta}\cos\theta\right)$$

$$- \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{dR}{d\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{d^2R}{d\varphi^2}.$$

Posons pour simplifier

$$A = R\sin\theta + \frac{dR}{d\theta}\cos\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d^2R}{d\varphi^2}$$

$$B = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dR}{d\varphi} - \frac{d^2R}{d\theta d\varphi},\ C = R + \frac{d^2R}{d\theta^2}$$

et nous trouverons apres quelques reductions,

$$X = \left(AC - \frac{B^2}{\sin\theta}\right)\cos\theta,\ Y = \left(AC - \frac{B^2}{\sin\theta}\right)\sin\theta\cos\varphi$$

$$Z = \left(AC - \frac{B^2}{\sin\theta}\right)\sin\theta\sin\varphi$$

en sorte qu'on ait

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \left(AC - \frac{B^2}{\sin\theta}\right)^2$$

et par consequent

$$S = \iint\left(AC - \frac{B^2}{\sin\theta}\right)d\theta\, d\varphi$$

Cette formule se verifie très aisément pour les surfaces de revolution, ainsi que pour l'ellipsoide. En se rappelant la formule remarquable de M.r Gauss pour la quadrature de surfaces, on peut s'apercevoir, qu'en designant par ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure de la surface donné, on aura

$$\rho_1\rho_2 = \frac{AC\sin\theta - B^2}{\sin^2\theta}.$$

Dublin le 21 *mai* 1850.

SOPRA UNA SEMPLIFICAZIONE DELL'ORDINARIO SISTEMA DELLE CONDIZIONI DI INTEGRABILITA' PER LE DIFFERENZIALI, E LE DIFFERENZE REPLICATE

ARTICOLO

estratto da una Memoria inedita sulle condizioni di integrabilità delle formule, e delle equazioni

DI S. R. MINICH

Professore di Matematiche in Padova.

I.

Ogni funzione differenziale alle variabili x, y, u, ec. dell' ordine n, nell'ipotesi del dx costante, riducendosi alla forma $V_n dx^r$, mercè le posizioni

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y', \ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy'}{dx}=y'', \ldots \ \dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}=y^{(n)} \\ \dfrac{du}{dx}=u', \quad \dfrac{d^2u}{dx^2}=\dfrac{du'}{dx}=u'', \text{ ec.} \end{cases}$$

ove V_n rappresenta una funzione finita delle variabili primitive x, y, u, ec., e delle ausiliarie (1) $y', y'', \ldots y^{(n)}, u', u''$, ec.; è noto che le r condizioni necessarie e sufficienti, per riguardare $V_n dx^r$ come differenziale esatta dell' ordine r, possono rappresentarsi colla formula

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{dV_n}{dy^{(m)}}\right)-\dfrac{m+1}{dx}\,d\left(\dfrac{dV_n}{dy^{(m+1)}}\right)+\ldots \\ \qquad +(-1)^{n-m}\dfrac{(m+1)(m+2)\ldots n}{2.3\ldots(n-m)dx^{n-m}}\,d^{n-m}\left(\dfrac{dV_n}{dy^{(n)}}\right)=0, \end{cases}$$

attribuendovi al numero m i valori successivi 0, 1, 2,... $r-1$ e scrivendo y in luogo di $y^{(0)}$.

Mediante il segno Σ adoperato nel senso della seguente formula del calcolo integrale alle differenze finite

$$\sum_{p=q}^{p=n+1} \varphi(p) = \varphi(q) + \varphi(q+1) + \varphi(q+2) + \ldots + \varphi(n),$$

in cui si suppone $\Delta p = 1$, si può esprimere l'equazione (2) colla notazione

$$\sum_{p=m}^{p=n+1} (-1)^{p-m} \frac{(m+1)(m+2)\ldots p}{2.3\ldots(p-m)dx^{p-m}} d^{p-m}\left(\frac{dV_n}{dy^{(p)}}\right) = 0,$$

avvertendo che il valore del coefficiente numerico si riduce all'unità per $p=m$, come è palese dall'esporre la stessa equazione nel modo seguente

$$(3)\quad \sum_{p=m}^{p=n+1} (-1)^{p-m} \frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{2.3\ldots m dx^{p-m}} d^{p-m}\left(\frac{dV_n}{dy^{(p)}}\right) = 0.$$

Ora mi propongo di dimostrare, che l'ordinario sistema delle r condizioni (3) di integrabilità si riduce al sistema più semplice delle r equazioni rappresentabili colla formula

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{p=m}^{p=n-r+m+2} (-1)^{p-m} \frac{(n-p)(n-p-1)\ldots(n-p-r+m+2)}{2.3\ldots(r-m-1)} \\ &\qquad \times \frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{2.3\ldots m dx^{p-m}} d^{p-m}\left(\frac{dV_n}{dy^{(p)}}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

ovvero

$$\sum_{p=m}^{p=n-r+m+2} (-1)^{p-m} \frac{(r-m)(r-m+1)\ldots(n-p)}{2.3\ldots(n-p-r+m+1)}$$

$$\times \frac{(m+1)(m+2)\ldots p}{2.3\ldots(p-m)dx^{p-m}} d^{p-m}\left(\frac{dV_n}{dy^{(p)}}\right) = 0;$$

il numero m assumendo tuttora i valori $0, 1, 2, \ldots r-1$. Per dimostrare questa riduzione riporteremo la formula ben nota (Cauchy, Cours d'analyse algebrique Ch. IV §. 3)

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-r+1)}{2.3\ldots r}+\frac{p(p-1)\ldots(p-r+2)}{2.3\ldots(r-1)}q$$

$$+\frac{p(p-1)\ldots(p-r+3)}{2.3\ldots(r-2)}\cdot\frac{q(q-1)}{2}+\ldots+\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{2.3\ldots r}$$

$$=\frac{(p+q)(p+q-1)(p+q-2)\ldots(p+q-r+1)}{2.3\ldots(r-1)r},$$

e poichè questa equazione identica per un numero di valori di p o di q superiore al grado r ha luogo per qualsivoglia valore di p o di q; col sostituirvi in luogo di p, q, r le quantità rispettive $n-p$, $p-m$, $r-m-1$ ne dedurremo l'identità

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{(n-p)(n-p-1)\ldots(n-p-r+m+2)}{2.3\ldots(r-m-1)}\\&+\frac{(n-p)(n-p-1)\ldots(n-p-r+m+3)}{2.3\ldots(r-m-2)}(p-m)+\ldots\\&\ldots+\frac{(p-m)(p-m-1)\ldots(p-r+2)}{2.3\ldots(r-m-1)}\\&=\frac{(n-m)(n-m-1)\ldots(n-r+2)}{2.3\ldots(r-m-1)}.\end{aligned}\right.$$

Ciò premesso sommiamo l'equazione (4) colle equazioni posteriori dello stesso sistema, che si deducono dalla formula (4) aumentando m di $1, 2, 3, \ldots r-m-1$ unità, dopo di avere rispettivamente differenziato $1, 2, 3\ldots r-m-1$ volte, e moltiplicate queste equazioni per

$$-\frac{m+1}{dx},\ \frac{(m+1)(m+2)}{2dx^2},\ -\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3\,dx^3},\ldots$$

$$(-1)^{r-m-1}\frac{(m+1)(m+2)\ldots(r-1)}{2.3\ldots(r-m-1)dx^{r-m-1}}.$$

Se ne formerà una equazione, il cui termine generale sarà il prodotto di

$$\frac{(-1)^{p-m}p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1)}{2.3..,mdx^{p-m}}\,d^{p-m}\left(\frac{dV_n}{dy^{(p)}}\right)$$

per la quantità ch' è il primo membro dell' eguaglianza (5). Questa avendo, per l'identità (5), un valore indipendente da p, diviene un fattor comune di tutti i termini che sparisce colla divisione. Estendendo la somma di questi termini a tutti i valori m, $m+1$, $m+2$, . . . n di p, trovasi riprodotta l'equazione (3). Dunque il sistema delle r equazioni (4) può sostituirsi al sistema delle condizioni ordinarie (3), come si dovea dimostrare.

L'illustre Poisson nella Memoria sul calcolo delle variazioni (Memoires de l'Academie royale des Sciences de l' Institut T. XII) ha proposto un notabile Teorema, che risulta agevolmente dal procedimento di integrazione delle funzioni a più variabili. La stessa proposizione venne pur enunciata in una Nota sulle condizioni di integrabilità presentata dal sig. Sarrus all' Istituto di Francia (Comptes-rendus de l' Academie des Sciences de Paris. Semptembre 1835). Per questo Teorema dopo di avere verificato le condizioni relative ad una variabile y, si può nelle analoghe condizioni rapporto ad u supporre y costante, e in conseguenza ridurre a zero y', y'', . . . $y^{(n)}$. Parimenti nelle condizioni relative ad una nuova variabile v si può supporre simultaneamente y, u costanti, e così di seguito. È manifesto che la medesima proposizione ha luogo del pari per le condizioni della forma (4). Ma è d'uopo avvertire che il Teorema cadrebbe in difetto, se all'annullarsi delle derivate di alcuna delle variabili y, u, etc. V_n diviene infinita.

L'uso delle condizioni (4) è di tanto maggior vantaggio, quanto più il numero r supera l'unità. Per $r=n$ si deducono dalla formula (4) le condizioni binomie

$$(6)\begin{cases} n\left(\frac{dV_n}{dy}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy'}\right)=0,\ (n-1)\left(\frac{dV_n}{dy'}\right)-\frac{2}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy''}\right)=0, \\ (n-2)\left(\frac{dV_n}{dy''}\right)-\frac{3}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy'''}\right)=0,\ \ldots\left(\frac{dV_n}{dy^{(n-1)}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy^{(n)}}\right)=0. \end{cases}$$

Per $r=n-1$ si avrebbero (4) le condizioni trinomie

$$(7)\begin{cases} \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{dV_n}{dy}\right)-\frac{n-1}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy'}\right)+\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy''}\right)=0, \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2}\left(\frac{dV_n}{dy'}\right)-2\frac{(n-2)}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy''}\right)+\frac{3}{dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy'''}\right)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{dV_n}{dy^{(n-2)}}\right)-\frac{n-1}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy^{(n-1)}}\right)+\frac{n(n-1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy^{(n)}}\right)=0. \end{cases}$$

Per $r=n-2$ si otterrebbe un sistema d'equazioni quadrinomie, e così di seguito.

Dopo di aver soddisfatto al numero q di condizioni relative ad una variabile y, onde accertarsi dell'integrabilità ripetuta q volte d' una funzione $V_n dx^r$, ovvero conoscendo preventivamente che questa funzione è differenziale esatta dell' ordine q, si rende palese dall'analisi che ci ha servito a surrogare al sistema delle condizioni (3) il sistema equivalente (4), che per riconoscere se la stessa funzione è una differenziale esatta dell'ordine $r>q$, le $r-q$ condizioni a verificarsi saranno quelle del sistema (4) che succedono alla $(q)^{esima}$.

Ciò che venne finora esposto circa alla riduzione delle condizioni d'integrabilità, nell'ipotesi d'un elemento dx costante, s'estende del pari alle funzioni differenziali in cui tutti gli elementi sono variabili. Basta allora riguardare x, y, u, ec. come funzioni indeterminate d'una nuova variabile t, la cui differenziale si ritiene costante, ed assumere in luogo delle posizioni (1)

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx'}{dt}=x'', \ldots\ldots \frac{d^nx}{dt^n}=\frac{dx^{(n-1)}}{dt}=x^{(n)},$$

$$\frac{dy}{dt}=y', \text{ ec.}$$

II.

Se con dx fosse stato supposto costante l'elemento d'un altra variabile y, non si avrebbe per questa variabile veruna condizione d'integrabilità a soddisfare, finché la forma rapporto ad y' della funzione integrale non sia anticipatamente fissata. Ma quando venga prestabilita una forma particolare rapporto ad y' alla funzione V_{n-r}, di cui si riguarda la funzione proposta $V_n dx^r$ come differenziale esatta dell'ordine r, si avrà riguardo ad y una sola condizione della forma seguente

$$(8) \quad r\left(\frac{dV_n}{dy}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy'}\right)+\frac{1}{dx^{r+1}}d^{r+1}\left(\frac{dV_{n-r}}{dy'}\right)=0,$$

la quale nel caso di $r=n$, cioè se si riguarda $V_n dx^n$ come differenziale $(n)^{esima}$ esatta d'una funzione finita V, si riduce evidentemente alla forma affatto semplice

$$(9) \qquad n\left(\frac{dV_n}{dy}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy'}\right)=0.$$

Infatti per rendere $V_n dx^r = d^r V_{n-r}$ conviene supporre simultaneamente

$$(10) \quad V_n=\frac{dV_{n-1}}{dx}, \quad V_{n-1}=\frac{dV_{n-2}}{dx}, \ldots \; V_{n-r+1}=\frac{dV_{n-r}}{dx}.$$

Ora per avverare la prima di queste eguaglianze é necessario e sufficiente, che le derivate parziali de'due membri sieno rispettivamente identiche. Per conseguenza riguardo alla variabile primitiva y avremo le eguaglianze

$$\left(\frac{dV_n}{dy}\right)=\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_{n-1}}{dy'}\right),\ \left(\frac{dV_n}{dy'}\right)=\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_{n-1}}{dy'}\right)+\left(\frac{dV_{n-1}}{dy}\right),$$

ed una coppia simile di equazioni avrà luogo per ciascuna delle r eguaglianze (10). Troviamo quindi le relazioni

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dV_n}{dy}\right)=\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_{n-1}}{dy}\right)=\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{dV_{n-2}}{dy}\right)\ldots\\ &\qquad=\frac{1}{dx^r}d^r\left(\frac{dV_{n-r}}{dy}\right),\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dV_n}{dy'}\right)=\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_{n-1}}{dy'}\right)+\left(\frac{dV_{n-1}}{dy}\right),\\ &\left(\frac{dV_{n-1}}{dy'}\right)=\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_{n-2}}{dy'}\right)+\left(\frac{dV_{n-2}}{dy}\right),\\ &\left(\frac{dV_{n-2}}{dy'}\right)=\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_{n-3}}{dy'}\right)+\left(\frac{dV_{n-3}}{dy}\right),\ldots\\ &\left(\frac{dV_{n-r+1}}{dy'}\right)=\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_{n-r}}{dy'}\right)+\left(\frac{dV_{n-r}}{dy}\right),\end{aligned}\right.$$

di cui le (11) determinano le derivate delle funzioni V_{n-1}, V_{n-2}, . . . V_{n-r} rapporto ad y, e le (12) servono poscia ad assegnare le derivate delle stesse funzioni rapporto ad y'. Ma allorchè la forma di $\left(\frac{dV_{n-r}}{dy'}\right)$ è preventivamente fissata, l'ultima delle relazioni (12) diviene una condizione ad avverarsi, donde è facile eliminare le funzioni incognite prendendo la somma delle eguaglianze (12), dopo di averle derivate rispettivamente 1, 2, 3, . . . r volte. A cagione delle equazioni (11) si otterrà immediatamente la condizione (3), che si trattava di dimostrare,

Riguardando per esempio la formula

$$Rdx^2+Sdxdy+Tdy^2,$$

in cui dx, dy sono costanti, come differenziale prima esatta d'una funzione della forma $Pdx + Qdy$, ove P, Q del pari che R, S, T rappresentano funzioni finite delle variabili x, y; avremo (1)

$$V_2 = R + Sy' + Ty'^2, \quad V_1 = P + Qy',$$

e la condizione a verificarsi (8) sviluppata nel modo seguente

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right) - 2\left[\left(\frac{dT}{dx}\right) - \left(\frac{d^2Q}{dxdy}\right)\right]y'$$
$$+ \left[\left(\frac{dT}{dy}\right) - \left(\frac{d^2Q}{dy^2}\right)\right]y'^2 = 0,$$

darà luogo evidentemente alle eguaglianze

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right) = 0, \quad T = \left(\frac{dQ}{dy}\right),$$

donde eliminando la funzione incognita Q si deduce la relazione

$$\left(\frac{d^2R}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2S}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^2T}{dy^2}\right) = 0.$$

Sia in secondo luogo la formula

$$A_0 dx^n + A_1 dx^{n-1} dy + \ldots + A_n dy^n$$

cogli elementi dx, dy costanti, da riguardarsi differenziale $(n)^{esima}$ esatta d'una funzione finita di x, y. Si avrà

$$V_n = A_0 + A_1 y'^{n-1} + \ldots + A_n y'^n,$$

e dallo sviluppo della condizione (9) cioè

$$n\left(\frac{dA_0}{dy}\right) - \left(\frac{dA_1}{dx}\right) + \left[(n-1)\left(\frac{dA_1}{dy}\right) - 2\left(\frac{dA_2}{dx}\right)\right]y' + \ldots$$
$$+ \left[\left(\frac{dA_{n-1}}{dy}\right) - n\left(\frac{dA_n}{dx}\right)\right]y'^n = 0,$$

risulteranno le relazioni seguenti fra le funzioni

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_n \quad \text{di} \quad x,\ y$$

$$n\left(\frac{dA_0}{dy}\right)=\left(\frac{dA_1}{dx}\right),\ (n-1)\left(\frac{dA_1}{dy}\right)=2\left(\frac{dA_2}{dx}\right),$$

$$(n-2)\left(\frac{dA_2}{dy}\right)=3\left(\frac{dA_3}{dx}\right),\ \ldots\ \left(\frac{dA_{n-1}}{dy}\right)=n\left(\frac{dA_n}{dx}\right),$$

III.

Onde ridurre parimenti a forma più semplice il sistema delle r condizioni d'integrabilità d'una differenza esatta dell' ordine r, conviene primieramente abbreviare le forme ben note di queste equazioni di condizione proposte dal Condorcet, esprimendole per mezzo di stati variati. Sia F_n una data funzione delle variabili x, y, u ec. e delle loro differenze finite, sino a quelle inclusivamente dell'ordine n. Supponendo F_n differenza esatta d'una funzione F_{n-1} alle differenze finite dell' ordine $n-1$, sarà necessario e sufficiente per l'identità di F_n con ΔF_{n-1}, che le derivate parziali di F_n, ΔF_{n-1} rapporto ad x, Δx $\Delta^2 x$, ... y, Δy, ec. sieno fra loro rispettivamente eguali. Ora abbiamo

$$dF_{n-1}=\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta x}\right)d\Delta x+\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^2 x}\right)d\Delta^2 x+\ldots$$

$$+\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^{n-1}x}\right)d\Delta^{n-1}x+\left(\frac{dF_{n-1}}{dy}\right)dy+\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta y}\right)d\Delta y+\text{ec.}$$

Prendendo la differenza finita di questa espressione, e denotando con E il valore variato d'una funzione, e con E^m il suo stato variato dell'ordine m, si avrà per qualunque termine del 2.° membro di detta equazione

$$\Delta\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^m x}\right)d\Delta^m x=\Delta\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^m x}\right)d\Delta^m x+E\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^m x}\right)d\Delta^{m+1}x,$$

e per conseguenza si ottiene

$$d\Delta F_{n-1} = \Delta dF_{n-1} = \Delta\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right).\,dx + \Delta\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta x}\right).d\Delta x + \ldots$$

$$+ \Delta\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^{n-1}x}\right).d\Delta^{n-1}x + E\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right).d\Delta x + \ldots$$

$$+ E\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^{n-2}x}\right).d\Delta^{n-1}x + E\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^{n-1}x}\right).d\Delta x^n + \Delta\left(\frac{dF_{n-1}}{dy}\right)dy + \text{ec.}$$

Quindi eguagliando i coefficienti delle differenziali di x, Δx, $\Delta^2 x$ ec. colle rispettive derivate parziali F_n troviamo

$$(13)\begin{cases} \left(\frac{dF_n}{dx}\right) = \Delta\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right), \quad \left(\frac{dF_n}{d\Delta_n}\right) = \Delta\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta x}\right) + E\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right), \ldots \\ \left(\frac{dF_n}{d\Delta^{n-1}x}\right) = \Delta\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^{n-1}x}\right) + E\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^{n-2}x}\right), \quad \left(\frac{dF_n}{d\Delta^n x}\right) = E\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^{n-1}x}\right). \end{cases}$$

Risalendo dall'ultima alla seconda delle presenti eguaglianze, se ne deduce

$$(14)\begin{cases} E\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^{n-1}x}\right) = \left(\frac{dF_n}{d\Delta^n x}\right), \\ E^2\left(\frac{dF_{n-1}}{d\Delta^{n-2}x}\right) = E\left(\frac{dF_n}{d\Delta^{n-1}x}\right) - \Delta\left(\frac{dF_n}{d\Delta^n x}\right), \\ \ldots E^n\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right) = E^{n-1}\left(\frac{dF_n}{d\Delta x}\right) - \Delta E^{n-2}\left(\frac{dF_n}{d\Delta^2 x}\right) \\ + \Delta^2 E^{n-3}\left(\frac{dF_n}{d\Delta^3 x}\right) - \ldots + (-1)^{n-1}\Delta^{n-1}\left(\frac{dF_n}{d\Delta^n x}\right) \end{cases}$$

Queste eguaglianze determinano le derivate parziali di F_{n-1}. Resta a verificarsi la prima delle equazioni (13), la quale variata n volte diviene mercè la sostituzione del valore (14) di $E^n\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right)$

$$(15)\left\{\begin{aligned} & E^n\left(\frac{dF_n}{dx}\right) - \Delta E^{n-1}\left(\frac{dF_n}{d\Delta x}\right) + \Delta^2 E^{n-2}\left(\frac{dF_n}{d\Delta^2 x}\right) - \cdot\cdot \\ & \qquad + (-1)^n \Delta^n\left(\frac{dF_n}{d\Delta^n x}\right) = 0 . \end{aligned}\right.$$

Sviluppando in questa equazione di condizione i valori variati si trova la condizione proposta dal Condorcet. È manifesto che se l'equazione (15) é identica, le espressioni (14) sono valori variati esatti degli ordini rispettivi 1, 2, 3, ... n. Una simile condizione (15) avrà pure luogo per ciascun' altra variabile y, u, ec., la cui differenza finita non sia soggetta a veruna particolare supposizione.

Per riguardare F_n come differenza esatta dell' ordine r d' una funzione F_{n-r}, é d'uopo supporre.

$$F_n = \Delta F_{n-1}\,,\ F_{n-1} = \Delta F_{n-2}\,,\ \ldots\ F_{n-r+1} = \Delta F_{n-r}\,.$$

Si hanno per conseguenza altrettante condizioni della forma (15) rappresentabili per

$$E^{n-m}\left(\frac{dF_{n-m}}{dx}\right) - \Delta E^{n-m-1}\left(\frac{dF_{n-m}}{d\Delta x}\right) + \Delta^2 E^{n-m-2}\left(\frac{dF_{n-m}}{d\Delta^2 x}\right) - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{n-m}\Delta^{n-m}\left(\frac{dF_{n-m}}{d\Delta^{n-m} x}\right) = 0\,,$$

ovvero per lo stato variato dell'ordine m

$$E^n\left(\frac{dF_{n-m}}{dx}\right) - \Delta E^{n-1}\left(\frac{dF_{n-m}}{d\Delta x}\right) + \Delta^2 E^{n-2}\left(\frac{dF_{n-m}}{dA^2 x}\right) - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-m}\Delta^{n-m} E^m\left(\frac{dF_{u-m}}{d\Delta^{n-m} x}\right) = 0.$$

Introducendo in questa formula i valori di

$$E^m\left(\frac{dF_{n-m}}{d\Delta^{n-m} x}\right),\quad E^{m+1}\left(\frac{dF_{n-m}}{d\Delta^{n-m-1} x}\right),\ \text{ec.}$$

deducibili dalle equazioni (14), si ottiene la formula

$$(16)\left\{\begin{array}{l} E^{n-m}\left(\frac{dF_n}{d\Delta^m x}\right)-(m+1)\Delta E^{n-m-1}\left(\frac{dF_n}{d\Delta^{m+1}x}\right)+\ldots \\ +(-1)^{n-m}\frac{(m+1)(m+2)\ldots n}{2.3\ldots.(n-m)}\Delta^{n-m}\left(\frac{dF_n}{d\Delta^n x}\right)=0, \end{array}\right.$$

che rappresenta, colla sostituzione de'valori 0, 1, 2, ... $r-1$ in luogo di m, le r condizioni relative ad ogni variabile x, la cui differenza finita sia immune da qualsivoglia ipotesi.

Mediante il segno Σ adoperato nel senso altra volta indicato (§. 1) possiamo esprimere l'equazione (16) colla notazione seguente

$$(17)\ \sum_{p=m}^{p=n+1}(-1)^{p-m}\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1)}{2.3\ldots m}\Delta^{p-m}E^{n-p}\left(\frac{dF_n}{d\Delta^p x}\right)=0.$$

Ora ci proponiamo di provare che il presente sistema delle equazioni (17) equivale a quest'altro più semplice

$$(18)\ \sum_{p=m}^{p=n-r+m+2}(-1)^{p-m}\frac{(n-p)(n-p-1)\ldots(n-p-r+m+2)}{2.3\ldots(r-m-1)}$$

$$\times\frac{p(p-1)\ldots.(p-m+1)}{2.3\ldots m}\Delta^{p-m}E^{n-p-r+m+1}\left(\frac{dF_n}{d\Delta^p x}\right)$$

Imperocchè sommando l'equazione generale (18) variata $r-m-1$ volte colle posteriori equazioni dello stesso sistema rispettivavamente differenziate 1, 2, 3 ... $r-m-1$ volte, variate $r-m-2$, $r-m-3$, ... 2, 1, 0 volte, e moltiplicate per

$$-(m+1),\ \frac{(m+1)(m+2)}{2},\ldots(-1)^{r-m-1}\frac{(m+1)(m+2)\ldots(r-1)}{2.3\ldots(r-m-1)},$$

se ne ottiene una nuova equazione che ha per termine generale il prodotto di

$$(-1)^{p-m}\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{2.\,3\ldots m}\Delta^{p-m}E^{n-p}\left(\frac{dF_n}{d\Delta^p x}\right)$$

per la quantità (9) che é costante. Tolto questo fattor comune di tutti i termini, si torna evidentemente all'equazione generale del sistema (17).

Nel caso di $r=n$ le n condizioni relative ad ogni variabile x, sulla cui differenza finita non sia stabilita veruna ipotesi, avrebbero pertanto la forma binomia

$$(19)\begin{cases} nE\left(\frac{dF_n}{dx}\right)-\Delta\left(\frac{dF_n}{d\Delta x}\right)=0,\ (n-1)E\left(\frac{dF_n}{d\Delta x}\right)-2\Delta\left(\frac{dF_n}{d\Delta^2 x}\right)=0,\ldots \\ E\left(\frac{dF_n}{d\Delta^{n-1}x}\right)-n\Delta\left(\frac{dF_n}{d\Delta^n x}\right)=0. \end{cases}$$

Allorchè la funzione F_n é data per mezzo de'valori variati $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... $x^{(n)}$, $y^{(1)}$, ec. di x, y, u ec., sarà più comodo ottenere le condizioni di integrabilità di F_n in funzione di queste variate, attesoché le loro espressioni sono più semplici delle formule (17) (18). Infatti avendosi allora

$$dF_{n-1}=\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF_{n-1}}{dx^{(1)}}\right)dx^{(1)}+\left(\frac{dF_{n-1}}{dx^{(2)}}\right)dx^{(2)}+\ldots$$

$$+\left(\frac{dF_{n-1}}{dx^{(n-1)}}\right)dx^{(n-1)}+\text{ec.}$$

se ne deduce

$$d\Delta F_{n-1}=EdF_{n-1}-dF_{n-1}=-\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right)dx$$

$$-\left(\frac{dF_{n-1}}{dx^{(1)}}\right)dx^{(1)}-\ldots-\left(\frac{dF_{n-1}}{dx^{(n-1)}}\right)dx^{(n-1)}$$

$$+E\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right)dx^{(1)}+\ldots+E\left(\frac{dF_{n-1}}{dx^{(n-2)}}\right)dx^{(n-1)}+E\left(\frac{dF_{n-1}}{dx^{(n-1)}}\right)dx^{(n)}.$$

$$-\text{ec.}$$

Paragonando i coefficienti di dx, $dx^{(1)}$, . . . $dx^{(n)}$ colle derivate parziali di F_n rapporto ad x, $x^{(1)}$, . . . $x^{(n)}$ avremo

$$(20)\begin{cases}\left(\frac{dF_n}{dx}\right)=-\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right), \left(\frac{dF_n}{dx^{(1)}}\right)=E\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right)-\left(\frac{dF_{n-1}}{dx^{(1)}}\right),\\ \ldots\ldots\left(\frac{dF_n}{dx^{(n)}}\right)=E\left(\frac{dF_{n-1}}{dx^{(n-1)}}\right).\end{cases}$$

da queste eguaglianze, esclusa la prima, ricavasi

$$(21)\begin{cases}E\left(\frac{dF_{n-1}}{dx^{(n-1)}}\right)=\left(\frac{dF_n}{dx^{(n)}}\right), E^2\left(\frac{dF_{n-1}}{dx^{(n-2)}}\right)=E\left(\frac{dF_n}{dx^{(n-1)}}\right)+\left(\frac{dF_n}{dx^{(n)}}\right),\\ \ldots E^n\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right)=E^{n-1}\left(\frac{dF_n}{dx^{(1)}}\right)+\ldots+\left(\frac{dF_n}{dx^{(n)}}\right),\end{cases}$$

e sostituendo nella prima delle equazioni (20) variata n volte il valore (21) di $E^n\left(\frac{dF_{n-1}}{dx}\right)$ si ha l' equazione di condizione rapporto ad x

$$(22)\quad E^n\left(\frac{dF_n}{dx}\right)+E^{n-1}\left(\frac{dF_n}{dx^{(1)}}\right)+E^{n-2}\left(\frac{dF_n}{dx^{(2)}}\right)+\ldots+\left(\frac{dF_n}{dx^{(n)}}\right)=0,$$

ch'è più facile a verificarsi dell'equazione (15).

Si troverà in conseguenza, per considerare F_n come differenza esatta dell'ordine r, un numero r di condizioni relative ad x rappresentabili colla formula

$$(23)\quad \sum_{p=m}^{p=n+1}\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1)}{2.3\ldots m}E^{n-p}\left(\frac{dF_n}{dx^{(p)}}\right)=0,$$

e si dimostrerà analogamente che questo sistema può ridursi ad un altro più semplice designabile colla formula

$$(24)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{p=m}^{p=n-r+m+2}\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{2.\,3\ldots m}\\ \qquad\times\dfrac{(n-p)(n-p-1)\ldots(r-m)}{2.\,3.\ldots(n-p-r+m+1}\mathrm{E}^{n-p-r+m+1}\left(\dfrac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x^{p)}}\right)=0,\end{array}\right.$$

che nel caso di $r = n$ ci darà le equazioni binomie

$$(25)\left\{\begin{array}{l}n\mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x}\right)+\left(\dfrac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x^{(1)}}\right)=0\,,\ (n-1)\mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x^{(1)}}\right)+2\left(\dfrac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x^{(2)}}\right)=0,\ldots.\\ \qquad\ldots.\ \mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x^{(n-1)}}\right)+n\left(\dfrac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x^{(n)}}\right)=0\,.\end{array}\right.$$

Le condizioni necessarie e sufficienti rapporto ad ogni variabile x, il cui stato variato non soggiace a veruna ipotesi, onde riguardare F_n come stato variato esatto dell' ordine r, sono evidentemente

$$(26)\quad \left(\frac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x}\right)=0,\ \left(\frac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x^{(1)}}\right)=0\,,\ \ldots\left(\frac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x^{(r-1)}}\right)=0\,;$$

poichè allora soltanto è possibile di retrovariare r volte la funzione F_n mutando rispettivamente $x^{(n)}$, $x^{(n-1)}$, ... $x^{(r)}$ in $x^{(n-r)}$, $x^{(n-r-1)}$, ... x. Se poi F_n è data per mezzo delle differenze finite di x, y, u ec. si avrebbe

$$\mathrm{dF}_n=\left(\frac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}\Delta x}\right)\mathrm{d}\Delta x+\ldots+\left(\frac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}\Delta^n x}\right)\mathrm{d}\Delta^n x+\text{ec.}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}\Delta x}\right)\left[\mathrm{d}x^{(1)}-\mathrm{d}x\right]+\ldots$$

$$+\left(\frac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}\Delta^n x}\right)\left[\mathrm{d}x^{(n)}-n\mathrm{d}x^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}\mathrm{d}x^{(n-2)}-\ldots+(-1)^n\mathrm{d}x\right]$$

$$+\left(\frac{\mathrm{dF}_n}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y+\text{ec.}$$

Eguagliando a zero (26) i coefficienti di dx, $dx^{(1)}$, $dx^{(2)}$.... $dx^{(r-1)}$ troveremo le condizioni relative ad x, che rendono F_n uno stato variato esatto dell'ordine r, rappresentate dalla formula

$$(27)\quad \sum_{p=m}^{p=n+1}(-1)^{p-m}\,\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1)}{2.3\ldots m}\left(\frac{dF_n}{d\Delta^p x}\right)=0.$$

Il sistema di queste r condizioni si ridurrà del pari a quest' altro più semplice

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{p=m}^{p=n-r+m+2}(-1)^{p-m}\,\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{2.3\ldots m} \\ \qquad\times\dfrac{(n-p)(n-p-1)\ldots(r-m)}{2.3\ldots(n-p-r+m+1)}\left(\dfrac{dF_n}{d\Delta^p x}\right)=0. \end{array}\right.$$

di maniera che nel caso di $r=n$, le n condizioni rapporto ad x saranno

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{c} n\left(\dfrac{dF_n}{dx}\right)-\left(\dfrac{dF_n}{d\Delta x}\right)=0,\ (n-1)\left(\dfrac{dF_n}{d\Delta x}\right)-2\left(\dfrac{dF_n}{d\Delta^2 x}\right)=0,\ldots \\ \left(\dfrac{dF_n}{d\Delta^{n-1}x}\right)-n\left(\dfrac{dF_n}{d\Delta^n x}\right)=0. \end{array}\right.$$

Termineremo coll'avvertire, che il Teorema già enunciato del Poisson sul modo di avverare le condizioni d'integrabilità delle funzioni differenziali, sussiste analogamente per le funzioni a differenze finite.

SULLE EQUAZIONI LINEARI ALLE DIFFERENZE FINITE

NOTA

DI P. TARDY

Membro corrispondente dell'Accademia Pontificia de'nuovi Lincei.

Sia data un'equazione lineare alle differenze finite dell'ordine n

$$y_{x+n} + P_1 y_{x+n-1} + P_2 y_{x+n-2} + \ldots + P_n y_x = 0 \,, \ldots \quad (1)$$

ed un'altra pur lineare dell'ordine $m > n$ che debba coesistere con la prima, che abbia cioè comuni con essa tutti gl' integrali particolari

$$z_{x+m} + A^{(1)} z_{x+m-1} + A^{(2)} z_{x+m-2} + \ldots + A^{(m)} z_x = 0 \ldots. \quad (2)$$

Il valore generale di z conterrà m costanti, quello di y ne conterrà n e però sarà della forma

$$y = z + C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} + \ldots + C_{n-m} y^{(n-m)} \,,$$

ove $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ... $y^{(n-m)}$ rappresentano gli $n - m$ integrali particolari esclusivi della (1).

Facciamo

$$u_x = y_{x+m} + A^{(1)} y_{x+m-1} + A^{(2)} y_{x+m-2} + \ldots + A^{(m)} y_x \,, \quad (3)$$

e sostituendo per y il suo valore z sparirà da sè in virtù delle (2), ed u_x risulterà una funzione della x contenente $n - m$ costanti arbitrarie in modo lineare. Però eliminando queste si avrà un'equazione lineare alle differenze finite dell' ordine $n - m$ che dinoteremo con

$$u_{x+n-m} + a_1 u_{x+n-m-1} + a_2 u_{x+n-m-2} + \ldots + a_{n-m} u_x = 0 \quad (4)$$

Rimettendo in questa per u_x il suo valore (3) e paragonando la risultante con la proposta (1) otterremo n equazioni

$$A^{(1)}_{x+n-m} + a_1 = P_1 , \quad A^{(2)}_{x+n-m} + a_1 A^{(1)}_{x+n-m-1} + a_2 = P_2 ,$$

$$A^{(3)}_{x+n-m} + a_1 A^{(2)}_{x+n-m-1} + a_2 A^{(1)}_{x+n-m-2} + a_3 = P_3 , \quad \text{ec.}$$

che procedono con legge manifesta e delle quali le prime $n-m$ serviranno a determinare i valori di a_1 , a_2 , . . . a_{n-m}, e le altre ne formeranno le condizioni cui debbono verificare i coefficienti della (1) e della (2) perchè esse coesistano. Così la soluzione della (1) è ricondotta a quella di due equazioni: una, la (3), dell' ordine m, e la seconda, la (4), dell'ordine $n - m$, ed i coefficienti di quest'ultima si ottengono senza alcuna integrazione. Questo è il teorema fondamentale del sig. Libri trasportato alle equazioni alle differenze finite , e la dimostrazione quì esposta è perfettamente analoga a quella data dal sig. Liouville per le equazioni differenziali.

Sieno ora dati $n - 1$ integrali particolari della (1); egli è noto che l'integrazione di essa si riduce a quella di un'equazione lineare del 1.° ordine, e che quindi si può trovare l'altro integrale particolare per formare il completo ; ma se co' metodi ordinari si volesse questo assegnare, sarebbe pressochè impossibile scriverne la espressione finale. Però se introduciamo l'uso delle *funzioni alternate* o *determinanti* riescirà agevole condurre il calcolo sino in fondo

Indichino $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, . . . $y^{(n-1)}$ gli $n - 1$ integrali particolari dati, e rappresenti

$$z_{x+n-1} + A^{(1)} z_{x+n-2} + A^{(2)} z_{x+n-3} + \ldots + A^{(n-1)} z_x = 0 \ldots (5)$$

l'equazione dell'ordine $n - 1$ cui essi appartengono. Avremo per determinare i coefficienti $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, . . . $A^{(n-1)}$ le $n - 1$ seguenti equazioni

$$y^{(1)}_{x+n-1} + A^{(1)}\, y^{(1)}_{x+n-2} + \ldots + A^{(n-1)}\, y^{(1)}_{x} = 0$$

$$y^{(1)}_{x+n-1} + A^{(1)}\, y^{(2)}_{x+n-2} + \ldots + A^{(n-1)}\, y^{(2)}_{x} = 0$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$y^{(n-1)}_{x+n-1} + A^{(1)}\, y^{(n-1)}_{x+n-2} + \ldots + A^{(n-1)}\, y^{(n-1)}_{x} = 0\ .$$

Il solo che importa conoscere $A^{(1)}$ è somministrato dalla formula

$$A^{(1)} = \frac{-S\left\{ \pm y^{(1)}_{x} \cdot y^{(2)}_{x+1} \ldots\ldots y^{(n-2)}_{x+n-3} \cdot y^{(n-1)}_{x+n-1} \right\}}{S\left\{ \pm y^{(1)}_{x} \cdot y^{(2)}_{x+1} \ldots\ldots y^{(n-2)}_{x+n-3} \cdot y^{(n-1)}_{x+n-2} \right\}}\ .$$

(Indico con S il determinante anzichè con Σ perchè quest'ultimo simbolo è qui impiegato nel senso ordinario d'integrazione finita).

Ciò posto la (1) e la (5) avendo a comune $n-1$ integrali particolari, siamo nel caso del teorema precedente con $m=n-1$, e però la soluzione cercata dipenderà da quello delle due equazioni

$$u_{x+1} + \left\{ P_1 - A^{(1)}_{x+1} \right\} u_x = 0\,,$$

$$y_{x+n-1} + A^{(1)}\, y_{x+n-2} + \ldots + A^{(n-1)}\, y_x = u_x\ .$$

Dalla prima si ricava

$$u_x = C_n e^{\Sigma \log \left\{ A^{(1)}_{x+1} - P_1 \right\}}$$

e dinotando il numeratore di $A^{(1)}$ con N ed il denominatore con D allorquando la x diviene $x+1$, sarà

$$u_x = C_n e^{\Sigma \log \left\{ \frac{N}{D} - P_1 \right\}}\,.$$

L'integrale della seconda si otterrà per mezzo della variazione

delle costanti arbitrarie conoscendo già tutti gl'integrali particolari di essa quando il secondo membro è nullo: poniamo quindi

$$y_x = y^{(1)} z_1 + y^{(2)} z_2 + \ldots + y^{(n-1)} z_{n-1}$$

e mettiamo

$$\Delta z_1 = v_1 u \,, \ldots \Delta z_r = v_r u \ldots \Delta z_{n-1} = v_{n-1} u \,,$$

le funzioni $v_1 \,, \ldots v_1 \,, \ldots v_{n-1}$ saranno determinate dalle equazioni

$$y^{(1)}_{x-1} v_1 + y^{(2)}_{x+1} v_2 + \ldots + y^{(r)}_{x+1} v_r + \ldots + y^{(n-1)}_{x+1} v_{n-1} = 0$$

$$y^{(1)}_{x+2} v_1 + \ldots + y^{(r)}_{x+2} v_r + \ldots + y^{(n-1)}_{x+2} v_{n-1} = 0$$

. . . . . .

$$y^{(1)}_{x+n-1} v_1 + \ldots + y^{(r)}_{x+n-1} v_r + \ldots + y^{(n-1)}_{x+n-1} v_{n-1} = 1 \,.$$

Il valore generico di v_r sarà

$$v_r = \frac{S\left\{ \pm y^{(1)}_{x+1} \ldots y^{(r-1)}_{x+r-1} \cdot y^{(n-1)}_{x+r} \cdot y^{(r+1)}_{x+r-1} \cdot y^{(n-2)}_{x+n-2} \right\}}{S\left\{ \pm y^{(1)}_{x+1} \ldots y^{(r-1)}_{x+r-1} \cdot y^{(n-1)}_{x+r} \cdot y^{(r+1)}_{x+r+1} \ldots y^{(n-2)}_{x+n-2} \cdot y^{(r)}_{x+n-1} \right\}}$$

$$= \frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{d^{(r)} y_{x+n-1}}$$

e verrà

$$z_r = C_n \Sigma \frac{1}{D} \cdot \frac{Dd}{d^{(r)} y_{x+n-1}} e^{\Sigma\left\{\frac{N}{D} - P_1\right\}} + C_r \,.$$

Questo teorema corrisponde a quello enunciato dal professore Malmsten per le equazioni differenziali nel N.° 21 del *Dublin and Cambridge Mathematical Iournal*, e la dimostrazione è per-

fettamente analoga a quella da me data di quest' ultimo nel fascicolo di Aprile di questi Annali.

Esempio I. $n=2$, la equazione data sarà

$$y_{x+2}+P_1\,y_{x+1}+P_2\,y_x=0$$

e l'integrale particolare noto $y^{(1)}$. Dalla nostra formola risulta per l'integrale completo

$$y_x=y^{(1)}\,z_1=C_1\,y^{(1)}+C_2\,y^{(1)}\,\Sigma\frac{1}{y^{(1)}_{x+1}}\,e^{\Sigma\log\left\{-\frac{y^{(1)}_{x+2}}{y^{(1)}_{x+1}}-P_1\right\}}$$

È facile ricavare il secondo integrale particolare facendo al solito $y_x=y^{(1)}\,\Sigma\,t_x$.

Esempio II. Per $n=3$, cioè per la equazione

$$y_{x+3}+P_1\,y_{x+2}+P_2\,y_{x+1}+P_3\,y_x=0\,,$$

Supposti noti $y^{(1)}$ ed $y^{(2)}$ risulta

$$y_2=C_1\,y^{(1)}+C_2\,y^{(2)}$$

$$+C_3\left\{y^{(1)}\Sigma\frac{y^{(2)}_{x+1}}{y^{(1)}_{x+1}\,y^{(2)}_{x+2}-y^{(1)}_{x+2}\,y^{(2)}_{x+1}}\,e^{\Sigma\log\left\{\frac{y^{(1)}_{x+3}\,y^{(2)}_{x+1}-y^{(1)}_{x+1}\,y^{(2)}_{x+3}}{y^{(1)}_{x+1}\,y^{(2)}_{x+2}-y^{(1)}_{x+2}\,y^{(2)}_{x+1}}-P_1\right\}}\right.$$

$$\left.-y^{(2)}\Sigma\frac{y^{(1)}_{x+1}}{y^{(1)}_{x+1}\,y^{(2)}_{x+2}-y^{(1)}_{x+2}\,y^{(2)}_{x+1}}\,e^{\Sigma\log\left\{\frac{y^{(1)}_{x+3}\,y^{(2)}_{x+1}-y^{(1)}_{x+1}\,y^{(2)}_{x+3}}{y^{(1)}_{x+1}\,y^{(2)}_{x+2}-y^{(1)}_{x+2}\,y^{(2)}_{x+1}}-P_1\right\}}\right\}.$$

Riesce assai spedito vedere come questa espressione, alla quale non è così semplice ridurre quella che si otterrebbe al modo ordinario, verifica la proposta.

Firenze 3 luglio 1850.

NUOVI TEOREMI DI ANALISI

MEMORIA

DI G. MAINARDI

Prof. Ord. nell' I. R. Università di Pavia ec.

I teoremi che dimostro sono affini, ma più generali di quelli trovati dal celebre sig. Iacobi *Theoremata nova algebrica* (*) ed ampliati dall'illustre sig. Liouville *Sur quelques propositions générales de géométrie* (**). I miei teoremi offrono un metodo per risolvere un sistema di equazioni algebriche determinate senza ricorrere alla eliminazione, nè alla risoluzione di altre equazioni: e conducono a varie proprietà delle curve algebriche: le quali cose dimostro con brevità nella presente Memoria.

§. 1.° Rammento la equazione

$$\frac{\Psi(x)}{f(x)} = \sum \frac{\Psi(a_r)}{(x-a_r)f'(a_r)}$$

nella quale $\Psi(x)$, $f(x)$ indicano due funzioni intere della variabile x, la prima di grado minore della seconda: a_r è una radice della equazione $f(x)=0$, alle quali tutte si riferisce il segno Σ: ed $f'(x)$ è il coefficiente differenziale di $f(x)$. Sia $F(x)=0$ un'altra equazione algebrica avente per radici A_1, A_2, A_3 . . . siccome

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-A_1} + \frac{1}{x-A_2} + \frac{1}{x-A_3} \cdots$$

e

$$\frac{\Psi(A_1)}{f(A_1)} = -\sum \frac{\Psi(a_r)}{(a_r - A_1)f'(a_r)},$$

$$\frac{\Psi(A_2)}{f(A_2)} = -\sum \frac{\Psi(a_r)}{(a_r - A_2)f'(a_r)}, \text{ ec.}$$

(*) Giornale del sig. Crelle T. 14.

(**) Giornale del sig. Liouville T. 6.

sommando queste ultime equazioni si ottiene

$$(a) \qquad \sum \frac{\Psi(x)}{f(x)} = -\sum \frac{F'(x).\Psi(x)}{F(x).f'(x)}$$

dove il primo Σ comprende tutte le radici di $F(x) = 0$,
il secondo $f(x) = 0$.

§. 2.° Si abbiano tre equazioni algebriche

$$F(x, y) = 0\,,\ f(x, y) = 0\,,\ \varphi(x, y) = u$$

fra le incognite x ed y. Dalla terza ricavo $y = \omega(x, u)$, che sostituito nelle due prime ci dà

$$F[x, \omega(x, u)] = 0\,,\quad f[x, \omega(x, u)] = 0\,:$$

Se in queste funzioni F, f rimetto il valore $u = \varphi(x, y)$, si riproducono sotto altra apparenza, le primitive $F(x, y)$, $f(x, y)$; e differenziate quelle risultanti ottengo

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{df(x, \omega)}{dx}\right) + \frac{df}{d\omega}.\frac{d\omega}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dx}\,;\ \frac{dF}{dx} = \left(\frac{dF(x, \omega)}{dx}\right) + \frac{dF}{d\omega}.\frac{d\omega}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dx}\,,$$

e siccome $y = \omega(x, \varphi)$, onde $\frac{d\omega}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dy} = 1$, ne seguono

$$\left(\frac{df(x, \omega)}{dx}\right) = \left\{\frac{df}{dx}.\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}.\frac{d\varphi}{dx}\right\}.\frac{d\varphi}{dy}\,;$$

$$\left(\frac{dF(x, \omega)}{dx}\right) = \left\{\frac{dF}{dx}.\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{dy}.\frac{d\varphi}{dx}\right\}.\frac{d\varphi}{dy}\,.$$

Dalla equazione (a) del paragrafo antecedente si desume

$$\sum \frac{\Psi(x, \omega)}{f(x, \omega)} = -\sum \frac{\Psi(x, \omega)\left(\frac{dF(x, \omega)}{dx}\right)}{F(x, \omega)\left(\frac{df(x, \omega)}{dx}\right)}$$

essendo il primo Σ relativo alle radici della $F(x, \omega) = 0$,
il secondo $f(x, \omega) = 0$;

quindi

$$(b)\qquad \sum\frac{\Psi(x,y)}{f(x,y)}=-\sum\frac{\Psi(x,y)\left\{\frac{dF}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dy}-\frac{dF}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dx}\right\}}{F(x,y)\left\{\frac{df}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dy}-\frac{df}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dx}\right\}}$$

comprendendo il primo Σ le radici comuni alle equazioni

$$F=0\,,\ \varphi=u,$$

il secondo $\qquad f=0\,,\ \varphi=u.$

Collo stesso discorso si dimostra essere

$$(c)\qquad \sum\frac{\Psi(x,y)}{f(x,y)}=-\sum\frac{\left\{\frac{dF}{dx}\cdot\frac{d\mu}{dy}-\frac{dF}{dy}\cdot\frac{d\mu}{dx}\right\}\cdot\frac{d\varphi}{dy}\cdot\Psi(x\,,\ y)}{\left\{\frac{df}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dy}-\frac{df}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dx}\right\}\cdot\frac{d\mu}{dy}\cdot F(x\,,\ y)}$$

riferendo il primo Σ alle radici comuni alle equazioni algebriche

$$F(x,y)=0,\ \mu(x,y)=0,$$

il secondo a quelle comuni alle

$$f(x,y)=0\,,\ \varphi(x,y)=0.$$

E le stesse equazioni (b) (c) si estendono facilmente a due sistemi di equazioni algebriche determinate coesistenti separatamente.

§. 3.° Per confermare la verità della equazione (b) e dichiararne l'uso, prendo da una Memoria di Garnier (*) le equazioni

$$\varphi=x^2-2xy+y^2-1=0\,,\ F=x^2+2(y-5)x+y^2-10y+21=0$$

le cui radici corrispondenti sono

$$x=2\,,\ 4\,,\ 1\,,\ 3$$
$$y=1\,,\ 3\,,\ 2\,,\ 4$$

(*) Discussion des racines des équations determ. du prim. degré et elimination. Paris 1813.

Supposti nella formola (b) $\Psi = 1$, $f = x$ troviamo

$$\sum \frac{1}{x} = -4 \sum \frac{y-5}{y^2 - 10y + 21},$$

e siccome la seconda Σ riguarda le radici comuni alle

$$x = 0, \ \varphi = 0, \quad \text{cioè} \quad y = \pm 1,$$

troviamo

$$\sum \frac{1}{x} = 4\left(\frac{4}{12} + \frac{6}{22}\right) = \frac{25}{12};$$

appunto eguale ad

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{3}.$$

Se nella equazione (b) poniamo $\Psi = 1$, $f = xy$ si ha

$$\sum \frac{1}{xy} = -4 \sum \frac{y-5}{y(y^2 - 16y + 21)} - 4 \sum \frac{x-5}{x(x^2 - 16x + 21)},$$

dove la prima Σ del secondo membro si riferisce alle radici comuni alle $x = 0$, $\varphi = 0$, e la seconda a quelle comuni alle $y = 0$; $\varphi = 0$; che sono $y = \pm 1$, $x = \pm 1$, onde

$$\sum \frac{1}{xy} = -8\left(\frac{3}{16} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{2.3}:$$

appunto eguale ad

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4}.$$

Se facciamo $\Psi = 1$, $f = x + 2y$, avremo

$$\sum \frac{1}{x + 2y} = -\frac{4}{3} \sum \frac{x - y - 5}{x^2 + 2(y-5)x + y^2 - 10y + 21},$$

dove la seconda Σ si riferisce alle radici comuni alle equazioni

$$x + 2y = 0, \ \varphi = 0$$

ossiano

$$x = \pm \frac{2}{3},$$

onde

$$\sum \frac{1}{x + 2y} = \frac{141}{2.10.11}:$$

appunto eguale ad

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11}.$$

§. 4.° Dovendo risolvere due equazioni algebriche

$$F(x,y) = 0, \ \varphi(x,y) = 0$$

porremo nella formola (b) $\Psi = 1$, poi successivamente

$$f(x,y) = x(x^n + y^n), = y(x^n + y^n), = xy(x^n + y^n)$$

essendo n un grande numero intero. Formate le funzioni

$$\sum \frac{1}{x(x^n + y^n)}, \ \sum \frac{1}{y(x^n + y^n)}, \ \sum \frac{1}{xy(x^n + y^n)}$$

Se divideremo la prima e la seconda per la terza, i quozienti si avvicineranno ai valori di quella coppia di radici corrispondenti x, y, le quali rendono minimo il binomio $x^n + y^n$: e l'approsimazione sarà tanto maggiore quanto più sarà grande il numero n. Sottratto poi da ciascuna funzione sommatoria il termine prossimamente noto, i quoti dei residui daranno una seconda coppia di radici: quindi ne avremo una terza ec.

Il calcolo di ogni sommatoria si eseguirà nel seguente modo. Considero

$$\sum \frac{1}{x(x^n + y^n)} = -\sum \frac{\frac{dF}{dx}.\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{dy}.\frac{d\varphi}{dx}}{\left[[(n+1)x^n + y^n]\frac{d\varphi}{dy} - nxy^{n-1}\frac{d\varphi}{dx}\right] F(x,y)}$$

la Σ del secondo membro si riferisce alle radici comuni alle

due equazioni $x(x^n + y^n) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$: cioè a quelle comuni alle $x = 0$, $\varphi = 0$, ossia alle radici di $\varphi(0, y) = 0$: ed alle radici delle $x^n + y^n = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, ovvero alle $\alpha^n + 1 = 0$, $\varphi(x, \alpha x) = 0$ ponendo $y = \alpha x$, e sarà

$$\sum \frac{1}{x(x^n+y^n)} = -\sum \frac{\Delta(0, y)}{y^n \frac{d\varphi}{dy} \cdot F(0, y)}$$

$$-\sum\sum \frac{\alpha.\Delta(x, \alpha x)}{nx^n\left(\alpha \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dx}\right)F(x, \alpha x)}$$

dove

$$\Delta(x, y) = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx} .$$

Il primo Σ del secondo membro riguarda tutte le radici di $\varphi(0, y) = 0$; il secondo Σ dupplicato si riferisce alle radici delle due equazioni $\alpha^n + 1 = 0$, $\varphi(x, \alpha x) = 0$. Siccome quelle sommatorie sono funzioni simmetriche delle dette radici, si calcoleranno senza risolvere le equazioni. E troveremo utile a questo calcolo la equazione (a) del §. primo.

§. 5.° Le nostre formole conducono a varii teoremi di geometria. Per indicarne un facile esempio, suppongo tracciate in un piano la linea algebrica rappresentata dalla equazione

$$F(x, y) = \omega(y) + x\omega_1(y) + x^2\omega_2(y) + \ldots = 0$$

ordinata secondo le potenze intere crescenti dell'ascissa x; poi l'ellisse

$$\varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 .$$

Posti nella equazione (b) $\Psi = 1$, $f = x$ si ha

$$\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{a^2 y \frac{dF}{dx} - b^2 x \frac{dF}{dy}}{a^2 y F(x, y)} .$$

Se metto nel secondo membro le radici comuni alle $x = 0$, $\varphi = 0$, cioè $y = \pm b$, abbiamo

$$\sum \frac{1}{x} = -\frac{\omega_1(b)}{\omega(b)} - \frac{\omega_1(-b)}{\omega(-b)_1}$$

la quale esprime la somma delle ascisse inverse comuni alle due curve $\varphi = 0$, $F = 0$. Se ora immagino le due tangenti l'ellisse parallelle all'asse x, le cui equazioni sono $y = \pm b$, otterrò le ascisse comuni a queste tangenti ed alla linea $F(x, y) = 0$ mediante le equazioni

$$\omega(b) + x\omega_1(b) + \ldots = 0\,,\ \omega(-b) + x\omega_1(-b) + \ldots = 0,$$

e troviamo la somma di quelle ascisse inverse eguale a

$$-\frac{\omega_1(b)}{\omega(b)} - \frac{\omega_1(-b)}{\omega(-b)}$$

cioè eguale alla somma delle ascisse inverse dei punti comuni alla linea algebrica ed all'ellisse.

Pavia li 30 giugno 1850.

DEI POLIGONI MASSIMI INSCRITTI E DEI MINIMI CIRCOSCRITTI ALL'ELLISSE; E DEI POLIEDRI ANALOGHI DELL'ELLISSOIDE.

NOTA

DI G. MAINARDI

Prof. Ord. nell'I. R. Università di Pavia ec.

Waringh, nelle miscellanee analitiche, ha osservato che nel massimo poligono inscritto in un ovale, tutta concava verso il suo interno, la diagonale che sottende ogni angolo è parallela alla tangente l'ovale nel vertice di quell'angolo: in fatti il contatto è il punto dell'arco sotteso il più lontano dalla diagonale.

Facilmente si dimostra che dei quadrilateri compresi fra due tangenti un'ellisse, la corda che unisce i contatti ed una terza tangente arbitraria dell' arco sotteso , il minimo è quello nel quale questa tangente è parallella alla corda.

Immagino un'ellisse riportata ai suoi assi : siano $2a$ la lunghezza del maggiore, $2b$ quella del conjugato . Siano

$$x_n = a\cos\varphi_n\,,\ y_n = b\,\mathrm{sen}\varphi_n$$

le cordinate del vertice n esimo di uno dei poligoni massimi inscritti all'ellisse, aventi m lati. Siccome la tangente in quel vertice deve essere parallela alla retta che unisce i vertici $n-1$, $n+1$ esimi, sarà

$$\frac{y_{n-1} - y_{n+1}}{x_{n+1} - x_{n-1}} = \frac{b^2 x_n}{a^2 y_n}\,,$$

ossia

$$\cos(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \cos(\varphi_n - \varphi_{n+1}),$$

cioè

$$\Delta_n^2 \varphi_n = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_n = \mathrm{A}.n + \mathrm{B}\,.$$

Per determinare le costanti A, B chiamo φ_1 l'angolo che corrisponde al primo vertice arbitrario del massimo poligono; perchè questo si chiuda, deve essere

$$\varphi_{m+1} = 2\pi + \varphi_1\,,$$

onde

$$\mathrm{A} = \frac{2\pi}{m},\ \mathrm{B} = \varphi_1 - \frac{2\pi}{m}\,,$$

$$x_n = a\cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{m} + \varphi_1\right),\ y_n = b\,\mathrm{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{m} + \varphi_1\right).$$

Siccome l'angolo φ_n corrisponde al vertice n esimo di un poligono regolare di m lati inscritto nella circonferenza formata sul diametro $2a$ dell'ellisse, il quale vertice ha su questo diametro la stessa proiezione dell' n esimo vertice del poligono ellittico, quindi si desume una regola facile per descrivere questo secondo poligono.

Essendo

$$\frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})(x_{n+1} - x_n) = ab \operatorname{sen}\frac{2\pi}{m} \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{m} + \varphi_1\right)$$

l'area del trapezio terminato dalle ordinate y_n, y_{n+1}, integrando questa funzione rispetto ad n, fra i limiti $n=1$, $n=m$, avremo l'area di tutto il poligono massimo di m lati inscritto nell'ellisse, espressa dal monomio

$$\frac{ab}{2} m. \operatorname{sen}\frac{2\pi}{m},$$

indipendente dall'angolo φ_1, ed il cui limite maggiore rispetto ad m è πab, appunto l'area dell'ellisse. Siccome

$$\Delta x_n = 2a \operatorname{sen}\frac{\pi}{m}.\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{m} + \varphi_1\right),$$

$$\Delta y_n = 2b \operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{m} + \varphi_1\right)$$

indicata con l_n la lunghezza dell' n esimo lato del poligono, si ha

$$l_n^2 = 2 \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{m}\left\{(a^2+b^2) - (a^2-b^2)\cos\left(\frac{(4n-2)\pi}{m} + \varphi_1\right)\right\}$$

e troviamo la somma dei quadrati dei lati del poligono espressa da

$$2(a^2 + b^2)m. \operatorname{sen}\frac{2\pi}{m};$$

costante per tutti i poligoni massimi di m lati.

Dalla espressione di l_n e dalla equazione

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{b}{a}\cot\left(\frac{(2n-1)\pi}{m} + \varphi_1\right)$$

concludiamo che, ne'poligoni pari, i lati sono due a due eguali e paralleli.

Le rette tangenti l'ellisse nei vertici dei massimi poligoni inscritti, determinano i poligoni minimi circoscritti. Dalla equazione

$$\frac{X_n x_n}{a^2} + \frac{Y_n y_n}{b^2} = 1 ,$$

ricavo le coordinate

$$X_n = a \sec\frac{\pi}{m}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{m} + \varphi_1\right) ,$$

$$Y_n = b \sec\frac{\pi}{m}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{m} + \varphi_1\right) \qquad (*)$$

dell'n esimo vertice del minimo poligono circoscritto di m lati: e siccome

$$\frac{X_n^2}{a^2} + \frac{Y_n^2}{b^2} = \sec^2\frac{\pi}{m}$$

que'poligoni sono inscritti in un' altra ellisse similmente posta i di cui semiassi sono

$$a\sec\frac{\pi}{m} , \; b\sec\frac{\pi}{m} ;$$

l'area del poligono è data dalla formula

$$abm.\tan\frac{\pi}{m} ,$$

e la somma dei quadrati dei lati dalla

$$2(a^2 + b^2)m.\tan^2\frac{\pi}{m} .$$

Pertanto le due più notabili proprietà dei diametri coniugati dell'ellisse appartengono a ciascuno dei poligoni d'area massima inscritti, e di area minima circoscritti alla curva. Anche i

(*) Il ch. prof. D. Chelini si compiacque di avvertire nel mio manoscritto la ommissione del fattore $\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{m}$ in queste, e nelle seguenti formule.

singolari teoremi degli ottaedri che hanno per diagonali i diametri coniugati di un ellissoide si verificano nei tetraedri massimi inscritti e minimi circoscritti a quella superficie, negli esaedri ec., il che si raccoglie dall' analisi che accenno brevemente.

Immagino un tetraedro regolare che abbia per lato l'unità di misura. Assumo per asse delle ordinate z la perpendicolare calata da un vertice alla faccia opposta. Dal piede di questa perpendicolare conduco l' asse y, parallello ad un lato della stessa faccia; e l'asse x passi per il vertice che si oppone a quel lato. Le equazioni delle rette parallelle agli spigoli del tetraedro che passano per l'origine delle coordinate sono due a due le seguenti

$$y=0\,,\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}}z;\quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}z,\quad x=\frac{1}{2\sqrt{2}}z;$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}z,\ x=\frac{1}{2\sqrt{2}}z;\quad z=0,\ x=-\frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$$z=0,\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x;\quad z=0,\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Se immagino una retta arbitraria la quale formi cogli assi angoli, i cui coseni indico con α, β, γ; la stessa retta renderà cogli spigoli del tetraedro angoli di cui i coseni sono

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{3}}+\gamma\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};\quad \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\beta+\gamma\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\beta+\gamma\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};\quad -\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\beta;$$

$$-\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\beta;\ \beta$$

i quali quadrati e sommati danno per somma il numero 2.

Le equazioni dei piani paralleli alle facce del tetraedro e che passano per l'origine sono

$$z + x\sqrt{2} - y\sqrt{6} = 0, \quad z + x\sqrt{2} + y\sqrt{6} = 0,$$

$$z\frac{\sqrt{2}}{4} + x = 0, \quad z = 0$$

ed i coseni degli angoli che le perpendicolari a questi piani fanno colla retta arbitraria

$$\frac{1}{3}(\alpha\sqrt{2} - \beta\sqrt{6} + \gamma); \quad \frac{1}{3}(\alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{6} + \gamma);$$

$$\frac{1}{3}(2\sqrt{2}.\alpha - \gamma); \quad -\gamma$$

di cui la somma dei quadrati eguaglia $\frac{4}{3}$.

Se moltiplichiamo le somme di quei coseni quadrati, la prima per il quadrato di uno spigolo, la seconda pel quadrato di una faccia, e prendiamo per unità il raggio della sfera circoscritta al tetraedro, si hanno i due numeri $\frac{16}{3}$ e $\frac{16}{9}$.

Applicando la stessa analisi ad un esaedro regolare inscritto nella sfera di raggio eguale all' unità, troviamo la somma dei quadrati delle projezioni degli spigoli eguale a $\frac{16}{3}$, delle facce eguale a $\frac{32}{3}$. Per l' ottaedro quei numeri sono rispettivamente 8 e 2 ec. I quali notabili teoremi si dimostrano facilmente anche col solo soccorso della geometria.

Immagino ora una sfera di raggio unità, e l'ellissoide concentrica di cui i semiassi siano indicati dalle lettere a, b, c. Riferite queste superficie alle stesse coordinate ortogonali coll' origine nel centro, chiamo punti corrispondenti, quello che è dato nella prima superficie delle coordinate x, y, z, e l'altro determinato nella seconda dalle coordinate ax, by, cz; e dirò rette, aree, volumi corrispondenti quelle determinate nell' una e nell'altra superficie da punti corrispondenti. È noto che le

proiezioni delle rette corrispondenti sugli assi coordinati x,y,z stanno fra loro geometricamente come $1:a$, $1:b$, $1:c$. Che le proiezioni delle aree piane corrispondenti sui piani coordinati xy, xz, yz, stanno come $1:ab$; $1:ac$; $1:bc$, ed i volumi come $1:abc$.

Dunque i tetraedri dell'ellissoide che corrispondono a tutti i tetraedri regolari inscritti nella sfera sono i massimi inscritti in quella superficie. E le somme dei quadrati delle facce e degli spigoli hanno i valori costanti

$$\frac{16}{9}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\ ,\ \frac{16}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Per gli esaedri massimi quelle somme sono costantemente

$$\frac{32}{3}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\ ,\ \frac{16}{3}(a^2+b^2+c^2)\ .$$

Per gli ottaedri

$$2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\ ,\ \ 8(a^2+b^2+c^2)\ ;\ \text{ec.}$$

Le quali proprietà si verificano anche ne' solidi minimi circoscritti all'ellissoide, come dichiarerò avendo tempo e salute.

Pavia li 30 giugno 1850.

SOPRA I DIFFERENTI METODI PER TROVARE CON ESATTEZZA LA DIFFERENZA DEI MERIDIANI, O DI LONGITUDINE DEI LUOGHI TERRESTRI

LETTERA

DEL SIG. PROF. G. BIANCHI

AL COMPILATORE

Chmo sig. Prof.

Modena, 15 giugno 1850.

Per due mesi continui all'incirca, e precisamente dal giorno 10 dello scorso aprile al 4 del corrente, l'atmosfera e la stagione sono state in questi nostri paesi così rotte a pessimo tempo e a prolungate pioggie, che tutte me ne sono andate fallite le osservazioni celesti di qualche importanza, e null'altro mi fu concesso di misurare, se non appunto l'esorbitante quantità della pioggia caduta. Nel corso infatti dell'accennato bimestre è qui caduta tanta pioggia, quanta ne suol cadere per medio in un mezzo anno, e val a dire dai 12 ai 13 pollici di altezza, e in uno scroscio particolarmente, che non durò più d'un'ora la sera del 3 corrente, io ne raccolsi dal pluviometro presso a 2 pollici d'altezza, che è circa la media mensile, dedotta da una serie d'anni. Una tale diuturnità d'intemperie e di condizion atmosferica offuscata e nubilosa mi ha tolto di vedere le avvenute occultazioni lunari delle stelle, fra le quali una di Aldebaran, e soprattutto mi è stata dispiacevole col nascondermi in massima parte l'occultamento di Giove e de'suoi satelliti fatto dalla luna la sera del 19 maggio prossimo scorso; fenomeno magnifico altra volta da me compiutamente osservato, la notte del 1 giugno 1831, e al recente suo rinnovarsi osservato del pari compiutamente dal Direttore di cotesta specola del Collegio Romano, il ch. P. Angelo Secchi, il quale me ne comunicava gentilmente la propria osservazione.

Mancandomi ora la materia da proseguire i miei articoli intorno le occultazioni lunari di Aldebaran e i confronti o le determinazioni relative che somministrano, mi farò invece a riflettere generalmente che quattro sono i differenti metodi attualmente in uso e praticabili per trovare con esattezza la differenza dei meridiani o di longitudine dei luoghi terrestri. Metto per 1.° quello appunto delle occultazioni lunari delle stelle, degli eclissi del sole, della distanza delle stelle o dei pianeti dalla luna, e insomma di qualunque fenomeno celeste in cui possa essere assegnato un istante preciso e comune per tutti i luoghi d'osservazione. Questo metodo ha le proprie difficoltà di osservazione e di calcolo, ma riferendosi per intero agli oggetti celesti ha poi il vantaggio di estendersi e poter essere adoperato a qualunque distanza di luoghi terrestri, con interposizione di montagne, di oceani, e di ostacoli d'ogni fatta. Lo diremo metodo *Astronomico*. Per 2.° ricordo il metodo de' segnali istantanei a esplosione e fuoco di polvere. Questo che può dirsi il metodo *pirico* è senza dubbio il più semplice e facile ad esser ripetuto quanto si vuole; ma per la visibilità dei segnali non serve che a mediocri distanze, a meno di non moltiplicar le stazioni e accensioni intermedie, ha non lievi disagi per gli operatori nelle salite e dimore notturne sopra le vette più elevate dei monti, richiede la tranquillità e limpidità dell'aria per l'osservazione dai punti più lontani, e ne'tempi di agitazioni e discordie civili non può essere praticato, come in Francia per la misura del grado. Viene 3.° il metodo da intitolarsi *cronometrico*, e consiste nel trasportar immediatamente da luogo a luogo il tempo astronomico sopra eccellenti orologi di andamento noto e uniforme. Un esempio ne hanno dato non ha guari i grandi viaggi degli astronomi russi per congiungere in longitudine le due maggiori specole di Europa, quella di Poulkova a Pietroburgo e quella di Greenwich a Londra (V. l'opera Expèdition chronomètrique exècutèe en. 1843 entre Poulkova et Altona, et en. 1844 entre Altona et Greenwich, par Struve); frutto e risultamento della quale impresa gigantesca fu di riconoscere e stabilire all' esattezza di

mezzo decimo di minuto secondo, e anche meno, la differenza dei meridiani dei due osservatorj. Ma chi consideri che a raggiungere tale scopo impiegaronsi fino a 86 cronometri e 17 viaggi nei confronti fra Poulkova e Altona, e 9 viaggi coi migliori 40 degli stessi cronometri fra Altona e Greenwich, dovrà convenire che simili determinazioni non saprebbero eseguirsi fuorchè da Potenze, e con mezzi colossali. Il 4.° metodo infine, che diremo *elettro-magnetico*, e non è stato ancora sperimentato, riuscirà per avventura il più agevole opportuno e pronto sempre a ripetersi fra luoghi anche lontanissimi, però situati nello stesso continente, o non disgiunti da molto mare, tosto che siano fra essi attivate le istantanee comunicazioni dei telegrafi elettrici, e sarà pur questo un grande vantaggio recato alla geografia e alla scienza, oltre quelli al commercio e alle relazioni sociali, che procura l' istituzione dei detti telegrafi onde le distanze terrestri percorronsi fisicamente quasi colla rapidità del pensiero di giovarsi di questo mezzo nella determinazion della differenza di longitudine dei luoghi ove perviene simultaneamente una stessa comunicazion telegrafica, basta di avere in ciascun luogo un orologio di conosciuto e regolar andamento astronomico; ed è chiaro che trattandosi anche qui di un fenomeno osservato in un istante medesimo, il confronto dei tempi della medesima specie deve porgere immediatamente la differenza dei meridiani dei due o più luoghi di osservazione. Però la difficoltà sarà di cogliere e notar bene il momento dell'apparir primo dei telegrafici segni di alfabeto o di altro modo qualunque di convenuto linguaggio che importi nel suo sviluppo e compimento una composizione e trasmissione successiva. Egli è perciò che mi sembrò degna di tutta l'attenzione e del maggior interesse la bella Relazione che ci diede il ch. P. Angelo Secchi nel fascicolo 1.° di cotesti *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* intorno lo stato attuale della telegrafia (pag. 23 alla 41); ed io vi lessi con piacere l'idea di applicar il telegrafo elettrico al problema delle longitudini proposte, e sul punto eziandio di esser praticata dal celebre sig. Airy, l'attuale astronomo del R. Os-

servatorio di Greenwich. Tuttavia dei quattro metodi fin qui accennati rimarrà sempre il pregio superiore per la necessità della preferenza e dell'uso al primo di essi, cioè all' astronomico, nel caso di riconoscere e stabilir con esattezza la differenza dei meridiani di luoghi separati da grandi.

Ora, per non venirle innanzi colle mani vuote, e trattenerla con sole poche ciance, mi permetterò di entrar in altro argomento e di presentarle quì unita la seguente

NOTA

DI TRIGONOMETRIA SFERICA

Nei trattati da me veduti di sferica trigonometria (compresi quelli del Cagnoli e del Delambre) io non trovo alcune proprietà di triangoli sferici particolari, le quali pur si deducono facilmente dalle note formole o proprietà generali, e d'altronde mi sembran curiose e degne di un cenno e di dimostrazione. Una è per esempio l'unica e semplicissima relazione fra il lato C' e l'angolo A' di un triangolo sferico equilatero, che è pur equiangolo e viceversa, qualunque. E dico qualunque in riguardo alla quantità o grandezza del lato e dell'angolo ; poichè il triangolo equilatero e insieme rettangolo , di cui tratta eziandio lungamente il Delambre , che lo denomina trirettangolo o trirettilatero (Traitè d'Astronomie théorique et pratique Chap. X. T. I.) è un caso particolare di triangolo sferico equilatero. Pertanto ciascuna delle quattro formole o proprietà differenti del triangolo sferico isoscele, nel caso dei tre lati fra loro eguali riducesi alla sola

$$\ldots\ 2\text{sen.}\tfrac{1}{2}A' = \text{sec.}\tfrac{1}{2}C',$$

proprietà semplice che esprime la natura del triangolo sferico equilatero. E supposto inoltre $A' = C'$, ne viene $\text{sen.}A' = 1$, ossia $A' = 90^\circ$; e quindi se ne ha il triangolo equilatero trirettangolo di Delambre , che è il solo triangolo *supplementare* di se medesimo.

Quest'ultima asserzione abbisogna di essere dimostrata. Io intendo per triangolo sferico supplementare di se stesso quello di cui tutti i lati siano supplementi dei rispettivi angoli opposti, ciascuno di ciascuno. Di quì la domanda se sia possibile generalmente un tale triangolo; e insieme con essa io farei l'altra se sia possibile generalmente un triangolo sferico che abbia tutti i suoi lati eguali rispettivamente a'suoi angoli opposti, ciascuno a ciascuno. Per soddisfare in un tempo ad ambi i quesiti io annunzio e dimostro il seguente

TEOREMA. In un triangolo sferico generalmente la relazione particolare di eguaglianza e di supplemento fra i lati e gli angoli opposti non può sussistere che nel solo caso di due lati eguali rispettivamente agli angoli opposti, ciascuno a ciascuno, e del terzo lato supplemento del terz'angolo.

Denominiamo A', A'', A''' gli angoli, e C', C'', C''' i lati rispettivamente opposti del triangolo. Consideriamo successivamente i due casi o supposti di

$$C''' = A''', \text{ e di } C''' = 180^\circ - A'''.$$

Sì nell'uno che nell'altro abbiamo, per essere del pari in entrambi $\text{sen}.C''' = \text{sen}.A'''$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}.A' = \text{sen}.C' \\ \text{sen}.A'' = \text{sen}.C'' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Dalla terza formola o proprietà generale de' triangoli sferici prendiamo altresì a considerare le due relazioni

$$\left.\begin{array}{l} \cos.A''\cos.C' = \cot.C'''\text{sen}.C' - \text{sen}.A''\cot.A''' \\ \cos.A'\cos.C'' = \cot.C'''\text{sen}.C'' - \text{sen}.A'\cot.A''' \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Nel primo caso di $C''' = A'''$ sommando le due precedenti, e avuto riguardo alle (1), si ottiene

$$\cos.A''\cos.C' + \cos.A'\cos.C'' = 0,$$

e val a dire

$$\cos.A''\cos.C' = -\cos.A'\cos.C'' \ldots\ldots (3)$$

la qual equazione evidentemente significa, o essere $C'' = A''$ e C' supplemento di A', o viceversa; giacchè quanto al poter essere ancora $A'' = A'$ e C'' supplemento di C', ovvero inversamente, questi ultimi due casi non appartengono alle nostre considerazioni dei lati e degli angoli opposti, ed oltreacciò dal dover essere insieme $A' = A''$, e $C' = C''$, in ambi i casi non avrebbesi fuor che particolarmente il triangolo isoscele e retto così in ciascuno degli angoli alla base come in ciascuno de'due lati eguali. Dunque il primo supposto di $C''' = A'''$ ci conduce necessariamente alla generalità di $C'' = A''$ e C' supplemento di A' o viceversa.

Nell' altro supposto di $C''' = 180° - A'''$ sottratta invece una dell'equazioni (2) dall'altra, e attese le (1), ricaviamo

$$\cos.A''\cos.C' - \cos.A'\cos.C'' = 0 ,$$

ossia

$$\cos.A''\cos.C' = \cos.A'\cos.C'' \ldots\ldots (4)$$

Quì realmente la (4) sussiste, e si verifica tanto per $A'' = C'$ e $A' = C''$, quanto per $C'' = 180° - A''$ e $C' = 180° - A'$. Ma il primo di tali due casi rientra manifestamente in quello or ora considerato del primo supposto, e quanto al secondo, se potesse aver luogo generalmente, ne seguirebbe la possibilità del triangolo con ciascuno de'suoi lati supplemento dell' angolo rispettivamente opposto. Però è da riflettere che ammessa quest'ultima possibilità ne verrebbe necessariamente l'altra di due lati del triangolo che fossero omogenei fra loro e per contrario, ciascuno con ciascuno, di specie diversa coi rispettivi angoli opposti, quelli cioè acuti e questi ottusi o inversamente. Quindi anche la semisomma dei due lati risulterebbe di specie diversa da quella dei due angoli opposti. Ma la formola di Nepero

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A'' + A') = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} A''' \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(C' - C'')}{\cos.\ \frac{1}{2}(C' + C'')} ,$$

per essere acuti $\frac{1}{2} A'''$ e $\frac{1}{2}(C' - C'')$, ci mostra che necessariamente $\frac{1}{2}(A'' + A')$ e $\frac{1}{2}(C' + C'')$ sono della medesima specie; conseguenza cui ponendo mente il Cagnoli (Trigonometria

piana e sferica, §. 1095. pag. 320. Ediz. 2.ª Bologna 1804) chiamavala una bella ed utile proprietà (*). Dunque per la realtà del triangolo in generale e nell'ipotesi di $C''' = 180° - A'''$ la formola (4) non ammette il caso di $C'' = 180° - A''$ e $C' = 180° - A'$, e lo ammetterebbe solo particolarmente, senza contraddizione colla formola di Nepero quando fosse

$$C' = C'' = A' = A'' = 90°,$$

nel qual caso dovendo pur essere $C''' = A''' = 90°$, si avrebbe il triangolo equilatero e insieme rettangolo. Dunque o si consideri per data relazione fra lati ed angoli opposti di un triangolo sferico l'eguaglianza di un lato ad un angolo, o l'angolo supplemento del lato, non può generalmente dedursene se non che l'eguaglianza di due lati a due angoli, ciascuno a ciascuno rispettivamente opposto, e il terzo lato supplemento del terz'angolo, come doveasi dimostrare.

Ch'io mi sappia, niuno ha fin quì avvertito nè dimostrato il teorema precedente; ommissione che sembrami derivata negli autori di trigonometria dall'altra di non considerare le date relazioni particolari fra gli elementi lati ed angoli di un triangolo sferico qualalunque, il che nondimeno è assai facile ad eseguir analiticamente mediante le note formole o proprietà generali. Eppure ovvio e naturale ad offerirsi è il problema: trovare un triangolo sferico il quale abbia ciascun de'suoi lati eguale rispettivamente all'angolo opposto: e similmente l'altro: ritrovar un triangolo sferico ciascun lato del quale sia supplemento del rispettivo angolo opposto. L'unica risposta e soluzione di ambo i quesiti riducesi a dire il solo triangolo sferico equilatero e rettangolo essere il cercato; ma prova ad appoggio della soluzione è il teorema che ho stimato perciò non inutile di produrre all' altrui giudizio.

(*) Anche senza ricorrere alla formola Neperiana si vede tosto che due lati non posson essere della medesima specie fra loro, e di contraria in riguardo a ciascun degli angoli opposti; poichè ne verrebbe che il lato opposto all'angolo maggiore sarebbe minore del lato opposto all' angolo minore.

Per esempio numerico prendasi a risolvere colle formole di Nepero, o per altra via il triangolo sferico di cui siano dati due lati, e l'angolo compreso, e siano questi

$$C' = 92^\circ.41'.\ 23'',8$$
$$A'' = 67.\ \ 3.\ 41,\ 5$$
$$C''' = 103.\ 12.\ \ 4,\ 0$$

Si troverà

$$A' = 87.\ 18.\ 36,\ 2$$
$$C'' = 67.\ \ 3.\ 41,\ 5$$
$$A''' = 103.\ 12.\ \ 3,\ 8$$

nel qual triangolo si vede appunto adempiuto il teorema con $A'' = C''$, $A''' = C'''$ e A' supplemento di C'. Proponendone io la detta soluzione per esercizio di calcolo e di tavole logaritmiche ai giovani studiosi, e non avendone io spiegeta loro la ragione del risultamento e l'artificio di prepararlo, essi stupiscono della singolare e semplice relazione dei trovati coi dati elementi; ma ciò stuzzicando la loro curiosità l'appaga poscia piacevolmente nel persuadersi essere un risultamento necessario quello che a prima vista credevano accidentale.

E con pienezza di stima torno a dirmi

Il Suo Dev. Serv. e Collega
GIUSEPPE BIANCHI.

DISCORSO SULLA DOTTRINA DEL CALORICO RAGGIANTE FATTO NEL 1840.

DA GIUSTO BELLAVITIS
Professore nell'Università di Padova.

La grandissima rassomiglianza che si osserva fra i fenomeni del calorico raggiante, e quelli della luce, fa nascere la idea che da una medesima causa od almeno da cause analoghe essi tutti dipendano: finchè l'Ottica fu dominata dalla teoria

dell'emanazione, questa analogia facilmente si poteva ottenere stabilendo che il calorico non meno della luce emanasse dai corpi sotto forma di raggi e si espandesse per tutto lo spazio; tale fu realmente l'ipotesi che venne adottata dai fisici, e per ispiegare alcuni fenomeni, eglino non ebbero riguardo d' ammettere anche un' altra ipotesi molto più strana ed improbabile qual'è quella dell' equilibrio mobile, secondo la quale tutti i corpi quand'anche sieno più freddi dell'ambiente emanerebbero ed assorbirebbero continuamente il calorico.

Ma le profonde investigazioni dei moderni fisici tanto mirabilmente confermate da ingegnosissime sperienze hanno oramai sostituita l'ipotesi delle ondulazioni a quella dell'emanazione. Non più è necessario supporre che infiniti raggi variamente colorati s'incontrino in tutte le direzioni senza menomamente sturbarsi nei loro movimenti; non più ci conviene accumulare ipotesi sopra ipotesi per ispiegare la polarizzazione della luce, la sua diffrazione, i colori delle lamine sottili, ec., le ondulazioni dell'etere sparso nello spazio spiegano tutti i fenomeni luminosi.

Mutata così interamente la teorica della luce è necessario od almeno opportunissimo cangiare anche quella del calorico raggiante, tanto più che nuove scoperte hanno maggiormente convalidata l'analogia tra esso e la luce; questo è lo scopo a cui tendono le considerazioni, che ho l'onore di sottoporre al giudizio di questo dotto consesso.

Prima di esporre l'ipotesi colla quale tenterei di spiegare i fenomeni del calorico raggiante e di rannodarli con quelli della luce, traccerò brevemente lo stato attuale della scienza qual sembrami risultare dalle importantissime sperienze dell'illustre italiano Macedonio Melloni ..... Si ommette come cosa cui nessun fisico può ignorare.

Con questi principj, che non sono già arbitrarie supposizioni, bensì espressioni di fatti direttamente verificati, si spiegano con tutta facilità parecchi fenomeni che da prima sembravano stranissimi; tali sono per esempio le osservazioni del De-la-roche, che i raggi solari attraversino in gran parte il vetro, il quale serve al contrario di compiuto schermaglio pei

raggi provenienti da corpi non molto caldi, e che i raggi attraversando una lamina di vetro acquistino una maggior facilità per attraversarne una seconda; così pure si spiegano le discrepanze di molti fisici nel determinare il punto di massima temperatura dello spettro solare ec.

Passiamo ora a ricercare quali cause possano attribuirsi, e quali spiegazioni possano darsi ai predetti principii dedotti dalle sperienze del Melloni. Se si volesse adottare l'emanazione del calorico, bisognerebbe ammettere non più un solo calorico, ma infiniti calorici tra loro distinti per differente grado di rifrangibilità, e per differente attitudine ad attraversare i corpi diatermani. Non credo niente più sostenibile l'idea di alcuni fisici, che il calorico dei corpi non dipende dalla presenza d'un corpo sui generis, bensì da un loro stato di maggiore o minore vibrazione. Ignoro poi che alcuno abbia spiegato i fenomeni in questione ammettendo la materialità del calorico, escludendo una vera emanazione, e rannodando tali fenomeni a quelli della luce coi quali hanno sì decisa analogia; questo é quanto ora tenterò di fare.

Mi sia permesso considerare da prima le ondulazioni aeree prodotte dal suono d'una canna d'organo; l'aria contenuta nella canna produce colle sue vibrazioni le conosciute onde alternativamente condensate e dilatate, ed il suono si propaga quantunque l'aria che lo trasmette rimanga sensibilmente in quiete. Ma se una porzione d'aria esca continuamente dalla canna saravvi di necessità un moto dal centro delle onde verso la circonferenza; moto che può supporsi consistere in un eccesso della condensazione in confronto della successiva dilatazione di ciascuna onda sonora. Questo fenomeno si rende palese in modo cospicuo allo scoppiar d'una mina, chè allora anche a grandissima distanza i corpi soffrono dall'aria un fortissimo urto contemporaneo al suono prodotto dallo scoppio, quantunque sia evidente che l'aria da cui i corpi sono urtati non è già uscita dalla mina, ma è quella stessa che stava accanto ai corpi.

Non so che i fisico-matematici si sieno ancora occupati di questa specie di onde, nelle quali le condensazioni del fluido

elastico eccedano le dilatazioni, sicchè abbia luogo un successivo spostamento di fluido da un'onda all' onda esterna; pure credo potersi ritenere che anche queste ondulazioni seguiranno le stesse leggi che valgono per le onde ordinarie, nelle quali la condensazione è precisamente uguale alla successiva dilatazione, e per le onde luminose nelle quali non vi è nè condensazione nè dilatazione.

Quando si ammetta questa nuova specie d'ondulazioni, che potremo chiamare *ondulazione di emanazione*, ecco come naturalmente si spiegano i fenomeni del calorico raggiante : il calorico è un fluido eminentemente elastico sparso per tutto lo spazio, e più o meno trattenuto dalle molecole dei corpi , in guisa però che le sue ondulazioni possano liberamente propagarsi nei corpi diatermani. Se da un corpo esce nell' aria od in altro mezzo diatermano una porzione di calorico, ciò dà origine ad una ondulazione d'emanazione , la quale si propaga colle stesse leggi che valgono per le ondulazioni luminose. La durata di ciascuna ondulazione di emanazione può essere maggiore o minore , e da ciò dipende la minore o maggiore rifrangibilità che soffrono tali ondulazioni nel passare da un mezzo all'altro. Ciò basta perchè s' intenda la perfetta rassomiglianza di cause e di effetti fra le ondulazioni di emanazione che costituiscono il calorico raggiante, e le ondulazioni che costituiscono la luce. Anzi quest' ultima teoria riceve in tal modo una non isperabile semplificazione , non essendo più necessario ammettere un nuovo fluido, od etere luminoso, giacchè il calorico sparso per tutto lo spazio può tener luogo di questo ipotetico etere, e così abbiamo un solo fluido imponderabile invece di due. Quando le durate delle vibrazioni del calorico sono comprese fra due ristretti limiti, e le vibrazioni sono perpendicolari alla direzione del raggio esse si rendono sensibili all'occhio, e costituiscono un raggio luminoso dall'estremo rosso all'estremo violetto; al di fuori di questi limiti le ondulazioni sono oscure; queste ondulazioni luminose o no possono essere accompagnate da quelle che dicemmo ondulazioni di emanazione, ed allora costituiscono i raggi calorifici.

Un vantaggio non piccolo dell'ipotesi ora abbozzata sarebbe di liberare la dottrina del calorico raggiante dall'ipotesi dell' equilibrio mobile, ipotesi che altamente fu adottata dai fisici soltanto perchè niun'altra poteva servire a spiegare una classe di fenomeni che hanno per tipo il seguente notissimo sperimento : Se due specchi parabolici sieno situati in faccia l'uno dell'altro, e nei loro fochi si pongano da una parte un corpo freddissimo dall'altra un termometro, l'abbassamento di questo sarà molto maggiore di quello che si avrebbe senza la presenza degli specchi. Colla nuova ipotesi riesce chiarissimo che come un corpo più caldo dell'ambiente produce le ondulazioni di emanazione, così pure un corpo più freddo produrrà le *ondulazioni di assorbimento*, nelle quali ciascuna condensazione sarà minore della dilatazione successiva; sicchè l'effetto di tali ondulazioni sarà uno spostamento del calorico dalla periferia delle onde verso il centro. Queste ondulazioni di assorbimento si propagheranno colle stesse leggi delle ondulazioni di emanazione, e di quelle soltanto luminose, e costituiranno dei veri raggi *frigorici*; mentre colle antiche ipotesi sarebbe stato assurdo l'ammettere tale specie di raggi. È poi palese che quando molti di questi raggi frigorifici si concentrino mediante specchi sopra un corpo, ossia in altre parole quando finiscano in esso molte ondulazioni di assorbimento, il corpo sarà rapidamente raffreddato.

Si potrebbe fare alla nuova ipotesi l' obbiezione, che non sarebbe agevole di spiegare col suo mezzo per qual ragione le onde di emanazione o di assorbimento si propaghino attraverso i corpi diatermani, e vi si rinfrangano più o meno, secondo che minore o maggiore è la durata di ciascuna vibrazione; per qual ragione esse tutte rimangono assorbite ed estinte nei corpi atermani; per qual ragione in fine alcune attraversino ed altre nò i corpi di una speciale diatermansia : ma obbiezioni precisamente ugali potrebbero farsi alla ipotesi delle ondulazioni luminose, della cui verità non è oramai permesso di dubitare; ed è palese che si potranno togliere quelle obbiezioni soltanto colle teorie matematiche riguardanti la costituzione

molecolare dei corpi e le vibrazioni di un fluido elastico interposto.

Sembrami che tornino a conferma della nuova ipotesi i colori della luce emessa dai corpi arroventati; ecco in qual modo io immagino che avvenga tale fenomeno. Quando un corpo è ad una temperatura alquanto più elevata di quella dell'ambiente esso versa la parte sovrabbondante del proprio calorico nell'aria, la quale essendo diatermana permette la formazione e la propagazione delle onde ; queste consistono non solo in una vibrazione prodotta dall'uscita del calorico, ma eziandio in una condensazione maggiore della successiva dilatazione , le quali ambedue si propagano di onda in onda dal centro alla periferia ; siccome la durata di ciascuna di tali vibrazioni è troppo grande per essere percettibile all'occhio umano, così si ha soltanto un calorico raggiante oscuro , il quale si rifrange meno della luce. Supponiamo che la temperatura del corpo si accresca fino che esso divenga incandescente, allora per la più rapida emissione di calorico si formeranno anche altre vibrazioni di minor durata, le quali saranno sensibili all' occhio e presenteranno una luce rossastra che è appunto quella che meno si rifrange: crescendo ancora la temperatura del corpo ai raggi rossi altri se ne aggiungeranno di aranci, poscia di gialli , ec. , e così il colore del corpo incandescente passerà dal rosso, al rosso-aranciato, all'arancio, e si avvicinerà ognora più al bianco che nasce dall'unione di tutti i colori elementari.

Nella dottrina del calorico raggiante, sì grandemente promossa dal chiar. Melloni, è forse ancora mancante la parte che riguarda i raggi frigorifici, sarebbe, a mio credere, molto interessante determinare la rifrangibilità dei raggi frigorifici , e cercare qual sia la loro attitudine ad attraversare i corpi di differenti diatermansie. È probabile che i corpi di temperatura non molto inferiore allo zero producano dei raggi frigorifici rifrangibili tanto quanto i calorifici emanati da una sorgente mediocremente calda : e qui si presenta al pensiero la possibilità di un fenomeno che sarebbe molto curioso di poter verificare: forse un corpo raffreddato fino a circa 600° sotto lo zero pro-

durrebbe col suo rapidissimo assorbimento di calorico delle ondulazioni tanto rapide da riuscir visibili, e così il grandissimo freddo non meno del grandissimo caldo renderebbe i corpi luminosi, e quasi diceva, roventi.

La stranezza, almeno apparente, di questo fenomeno non vi sia norma, o cortesi uditori, per giudicare dell' ipotesi di cui vi tenni parola, giacchè l'uno non è già necessaria conseguenza dell'altra.

Vorrei colle esposte considerazioni aver reso probabile — che il calorico sia una stessa cosa dell'etere luminoso, — che nel calorico, come in ogni altro fluido elastico, possano formarsi onde consistenti in condensazioni e dilatazioni alternative con preponderanza di quelle su queste o viceversa, — e che tali ondulazioni costituiscano i raggi calorifici emanati dai corpi; con ciò crederei si migliorasse la teorica del calorico liberandola dall'ipotesi dell'equilibrio mobile, e rendendola analoga a quella della luce.

LETTERA DEL SIG. PROF. VINCENZO AMICI AL COMPILATORE

Pregmo Signore

» A scanso di qualunque diversa interpretazione, mi compiaccio dichiararle, che scrivendole la mia lettera in risposta » alle osservazioni del sig. prof. Tardy sopra una mia formula, ho accennato alcune date, e alcuni fatti all'oggetto di dar » ragione della sorpresa che mi fecero le sue critiche. — D'altra parte però non ho mai dubitato che egli scientemente » siasi voluto appropriare le mie idee; imperocchè l' onestà e » la dottrina del sig. Tardy mi sono di pegno sicuro che egli » o non aveva avvertito, o aveva totalmente dimenticato quello » che dissi, e pubblicai sulla controversa formula, e sul modo » di ottenere colla variazione de' parametri delle trajettorie, » qualcuna delle principali equazioni di idrodinamica, che egli » pure ha dedotte analogamente nel suo dottissimo e d'altronde originale lavoro ». — Firenze, 13 agosto 1850.

Suo devmo servitore
VINCENZO AMICI

ESTRATTO DI UNA SECONDA NOTA SULLA GENERALE SOLUZIONE IN INTERI DELLA $x^2 + y^2 = z^2$

DEL PROF. PAOLO VOLPICELLI

Nella prima nota che pubblicai (Giornale Arcadico T. 119. 1850) sulla generale soluzione in interi della

$$x^2 + y^2 = z^2 ,$$

determinai le formole solutive della medesima in funzione delle somme, ognuna di due quadrati, nelle quali poteva essere spezzata la z. Quindi trovai che se abbiasi

$$z = A_1^2 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2 = \ldots\ldots A_\nu^2 + B_\nu^2 ,$$

debbono le formole generali solutive della proposta essere

$$(k_3) \quad \begin{cases} x = \pm (A_\alpha A_\beta \mp B_\alpha B_\beta) , \\ y = \pm (A_\alpha B_\beta \pm B_\alpha B_\beta) , \end{cases}$$

essendo α, β indici, che debbono ricevere i valori tutti da 1 sino a ν, combinati due a due in ciascun modo. Osservai pure in quella prima nota, che fatto

$$A_\alpha = B_\beta , \; B_\alpha = B_\beta ,$$

si avevano dalle (k_3), come corollario, le

$$(k_4) \quad x = \pm (A_\alpha^2 - B_\alpha^2) , \qquad y = \pm 2A_\alpha B_\alpha .$$

Queste ultime sono le formole sino ad ora considerate, come solutive della proposta; però esse comprendono un piccolo nunumero delle soluzioni di essa. In fatti le (k_4) forniscono solo

quei valori della x, y che derivano dal considerare la z^2 formata dal quadrato di uno qualunque degli spezzamenti della z, e non quelli altri che derivano dal considerare z^2 formata dal prodotto di due qualunque spezzamenti diversi della z medesima. Vero è che i valori dati dalle (k_4) sono tutti primi fra loro, e perciò anche con la z, come sarà dimostrato in appresso; ma è vero altresì che questi valori non sono tutti quelli che si cercano quando si propone a risolvere generalmente la equazione di cui parliamo, e che il maggior numero delle sue soluzioni hanno fattori comuni fra loro e perciò con la z.

La proposta non altro significa fuorchè la ricerca di tutti gli spezzamenti possibili di un quadrato nella somma di due altri, ed a questa ricerca, soddisfanno generalmente le (k_3) che contengano eziandio le (k_4). Pertanto egli è chiaro che nel risolvere generalmente la proposta, non si possano escludere dalle soluzioni sue quelle che ammettono fattori comuni con la z, perchè 1.° con questa esclusione si verrebbe a limitare il suo significato; 2.° perchè sebbene trovati quei valori delle x, y primi fra loro, cioè dati dalle (k_4), non potrebbero da questi dedursi gli altri valori delle incognite medesime non primi con la z; 3.° perchè i valori delle x, y, z soddisfacenti alla proposta posseggono tutti delle proprietà comuni, sieno essi primi o no fra loro, come vedremo in appresso. E qui osserviamo non essere abbastanza esatto, riconoscere le proprietà medesime, per quei soli valori delle x, y, z che sono primi fra loro, cioè che sono dati dalle (k_4), come si è fino ad ora praticato (comptes rendus V. 28. p. 687).

Nella citata prima nota dimostrai da ultimo alcune proprietà dei valori soddisfacenti alla equazione in proposito. Una ulteriore ricerca da me fatta sulle proprietà medesime, ha dato luogo a questa seconda nota, di cui viene quì l' estratto. È facile in fatti riconoscere, che se le formule solutive della proposta, invece di essere date in funzione degli spezzamenti della z, sieno espresse in funzione dei fattori di questa data quantità, ognuno spezzabile in due quadrati, si avranno due

vantaggi, cioè 1.° si passerà dai fattori stessi direttamente ai valori delle x, y, senza passare per la operazione lunga dello spezzamento di z nelle somme di due quadrati. 2.° Le forme dei valori determinati con questo nuovo modo, ci somministreranno un mezzo facile, per conoscere le proprietà che ai valori stessi appartengono. Questi due vantaggi formano lo scopo principale della mia seconda nota, sulla generale soluzione della proposta, che sarà presto pubblicata per esteso nel giornale arcadico.

Suppongasi

$$z = h_1 h_2 h_3 \ldots h_k ,$$

essendo

$$h_1 = a_1^2 + b_1^2 , \; h_2 = a_2^2 + b_2^2 , \ldots , \; h_k = a_k^2 + b_k^2 .$$

facilmente si dimostra quanto siegue :

1.° Se il numero dei fattori di z, tutti diversi fra loro, e ciascuno riducibile nella somma di due quadrati sia k, sarà pure k il numero delle *specie* di soluzioni della proposta.

2.° Le soluzioni della prima specie avranno tutte $k-1$ fattori comuni con la z, e saranno 2^k di numero.

3.° Le soluzioni della seconda specie avranno ciascuna $k-2$ fattori comuni con la z, e saranno di numero

$$\frac{2k(k-1)}{1 \, . \, 2} .$$

4.° Le soluzioni della terza specie avranno ciascuna $k-3$ fattori comuni con la z, e saranno di nuovo

$$\frac{2^2 k(k-1)(k-2)}{1 . 2 . 3} .$$

Si dovrà in simile guisa procedere riguardo al numero dei fattori comuni, ed a quello delle soluzioni, per le altre seguenti specie.

5.° Le soluzioni dell'ultima specie non avranno alcun fattore comune con la z, e saranno di numero 2^{k-1}.

6. Pertanto chiamando μ'' il numero di tutte le soluzioni diverse, alla proposta spettanti, sarà

$$\mu'' = 2^0 k + \frac{2k(k-1)}{1.2} + \frac{2^2 k(k-1)(k-2)}{1.2.3} + \ldots + 2^{k-2} k + 2^{k-1} ;$$

ossia

$$\mu'' = \frac{3^k - 1}{2} ,$$

Dunque il numero delle soluzioni tutte diverse della proposta, quando x sia composto di k fattori diversi, ognuno spezzabile in due quadrati, viene dato dalla somma dei coefficienti dello sviluppo del binomio, elevato all'esponente k, tranne il primo dei coefficienti medesimi, ognuno moltiplicato rispettivamente pei termini

$$2^0 , 2^1 , 2^2 \ldots , 2^{k-2} , 2^{k-1} .$$

ovvero più compendiosamente potremo anche dire, che il numero stesso è dato dalla semidifferenza fra la potenza 3^k, e l' unità.

Questa seconda espressione coincide con quella che si ottiene ponendo

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 2$$

nella formola data da Gauss (*Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae* 1801, p. 219) per assegnare il numero dello spezzamento in due quadrati di un qualunque valore numerico, capace nello spezzamento stesso.

7.° Ho dimostrato nella prima nota citata, che risolvendo la proposta per mezzo delle (k_3) e (k_4), s' incontravano soluzioni ripetute; ora per determinare il numero μ''' delle medesime, si osservi che, μ' rappresentando quello di tutte le soluzioni numeriche della proposta comprese le ripetute, abbiamo dalla prima nota stessa

$$\mu' = 2^{2(k-1)} ;$$

dunque sarà

$$\mu''' = \frac{2^{2k-1} - 3^k + 1}{2}$$

il numero delle sole ripetute.

8.° Dalla forma delle soluzioni ottenute coll'indicato nuovo

modo, si rileva che il prodotto x, y, z potrà sempre considerarsi una somma di termini ognuno della forma

$$M(a_\gamma^4 - b_\gamma^4),$$

essendo γ un indice non maggiore di k.

Da ciò discendendo altre proprietà spettanti alle soluzioni della proposta; ed altre ne discendono pure dal considerare le forme dei prodotti

$$x, y, \quad xy(x+y)(x-y).$$

9.° Se il numero $k+1$ che rappresenta quello dei fattori della z accresciuto di 1, sia primo, sarà il numero μ'' di tutte le soluzioni diverse della proposta divisibile per $2(k+1)$, tranne i casi di $k=1$, $k=2$, che non possono aver luogo in questo enunciato.

10.° In quanto alla forma delle soluzioni spettanti alla proposta, per ora noteremo solamente, che i k valori delle x, y, appartenenti alla prima specie delle soluzioni medesime, vengono così espressi generalmente

$$x = (a_\gamma^2 - b_\gamma^2)\frac{z}{a_\gamma^2 + b_\gamma^2}, \quad y = 2a_\gamma\, b_\gamma \frac{z}{a_\gamma^2 + b_\gamma^2}$$

dovendo l'indice γ ricevere, uno dopo l'altro, i valori tutti da 1 sino a k; ed essendo per ipotesi

$$z = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \ldots (a_k^2 + b_k^2).$$

Tutto ciò riceverà maggiore sviluppo nella nota, che per esteso verrà pubblicata su questo medesimo argomento.

APPLICAZIONE

DELLA TEORICA PRECEDENTE.

Nella prima citata nota furono completamente risolute, fra le altre, anche le seguenti equazioni

$$x^2 + y^2 = 13^2$$
$$x^2 + y^2 = 85^2 = (17.5)^2$$
$$x^2 + y^2 = 1105^2 = (17.13.5)^2$$
$$x^2 + y^2 = 40885^2 = (37.17.13.5)^2$$

e tornando sulle soluzioni delle medesime, vedremo da quanto siegue, che la teorica premessa, va pienamente d'accordo con questi casi particolari.

La prima di queste uguaglianze, in cui $k = 1$, ammette una sola specie di soluzioni, cioè quella che non ha fattori comuni con la $z = 13$. Il numero delle soluzioni di questa specie si trova essere

$$2^0 k = 2^{k-1} = 1,$$

ed i valori della soluzione medesima sono

$$x = 3, \quad y = 12.$$

Inoltre per questo caso abbiamo

$$\mu' = 2^{2(k-1)} = 1, \quad \mu'' = \frac{3^k - 1}{2} = 1, \quad \mu''' = \frac{2^{2k-1} - 3^k + 1}{2} = 0.$$

La seconda eguaglianza per la quale abbiamo $k = 2$, ammette due specie di soluzioni, cioè la prima in cui le soluzioni sono di numero $2^0 k = 2$, vale a dire le seguenti

$$x = 51 = 17.3, \qquad y = 68 = 17.4$$
$$x = 75 = 25.5, \qquad y = 40 = 8.5$$

che hanno un fattore comune con la $z = 17.5$; e la seconda specie, in cui le soluzioni sono di numero $2^{k-1} = 2$, cioè le

$$x = 13, \qquad y = 84,$$
$$x = 77, \qquad y = 36,$$

che non hanno verun fattore comune colla z. Per questo secondo caso abbiamo

$$\mu' = 4, \qquad \mu'' = 4, \qquad \mu''' = 0.$$

La terza equazione, in cui abbiamo $k = 3$, fornisce tre specie di soluzioni; la prima specie ne contiene $2^0 k = 3$, che sono le seguenti

$$x=\begin{cases}975 = 5.\ 13.\ 15,\\663 = 17.\ 13.\ 3,\\425 = 17.\ 5.\ 5,\end{cases}\qquad y=\begin{cases}520 = 5.\ 13.\ 8,\\884 = 17.\ 13.\ 4,\\1020 = 5.\ 17.\ 12,\end{cases}$$

ognuna con due fattori comuni con la $z = 17.\ 13.\ 5$.

La seconda specie contiene

$$\frac{2k(k-1)}{2}=6$$

soluzioni, aventi ognuna un fattore comune con la z, le quali sono

$$x=\begin{cases}561 = 17.\ 33,\\105 = 5.\ 21,\\169 = 13.\ 13,\\1001 = 13.\ 77,\\855 = 5.\ 171,\\1071 = 17.\ 63,\end{cases}\qquad y=\begin{cases}952 = 17.\ 56,\\1100 = 5.\ 220,\\1092 = 13.\ 34,\\468 = 13.\ 36,\\700 = 5.\ 140,\\272 = 17.\ 16,\end{cases}$$

La terza specie contiene $2^{k-1}=4$ soluzioni, senza fattori comuni con la z, che sono

$$x=(\ 47,\ 943,\ 817,\ 1073,$$
$$y=(1104,\ 576,\ 744,\ 264,$$

Quindi abbiamo per questo terzo caso

$$\mu'=16\ ,\quad \mu''=13\ ,\quad \mu'''=3\ .$$

Da ultimo la quarta equazione, che fornisce. $k=4$, oltre quattro specie di soluzioni: la prima specie ne contiene $2^n k=4$, ciascuna con tre fattori comuni con la $z=5.13.17.37$ e sono

$$x=\begin{cases}38675= 5.\ 13.\ 17.\ 35,\\36075= 5.\ 13.\ 37.\ 15,\\24531=13.\ 17.\ 37.\ 3,\\15725= 5.\ 17.\ 37.\ 5,\end{cases}\qquad y=\begin{cases}13260= 5.\ 13.\ 17.\ 12,\\19240= 5.\ 13.\ 37.\ 8,\\32708=13.\ 17.\ 37.\ 4,\\37740= 5.\ 17.\ 37.\ 12,\end{cases}$$

La specie contiene

$$\frac{2k(k-1)}{2}=12 \text{ soluzioni}$$

ognuna con due fattori comuni con la z, le quali sono

$$x = \begin{cases} 27885 = 5.13.429, \\ 20757 = 17.37.33, \\ 12597 = 13.17.57, \\ 3885 = 5.37.25, \\ 2635 = 17.5.31, \\ 6253 = 37.13.13, \\ 40365 = 5.13.621, \\ 33813 = 17.13.153, \\ 27115 = 17.5.319, \\ 37037 = 37.13.77, \\ 31635 = 37.5.171, \\ 39627 = 37.17.63, \end{cases} \quad y = \begin{cases} 29900 = 5.13.460, \\ 35224 = 17.37.56, \\ 38896 = 13.17.176, \\ 40700 = 5.37.220, \\ 40800 = 17.5.480, \\ 40404 = 37.13.84, \\ 6500 = 5.13.100, \\ 22984 = 17.13.104, \\ 30600 = 17.5.360, \\ 17316 = 37.13.36, \\ 25900 = 37.5.140, \\ 10064 = 37.17.16, \end{cases}$$

La terza specie contiene

$$\frac{2^2 k(k-1)(k-2)}{1.2.3.} = 16$$

soluzioni ognuna con un fattore comune alla z cioè le seguenti

$$x = \begin{cases} 34891 = 37.943, \\ 31059 = 17.1827, \\ 16875 = 5.3375, \\ 7189 = 13.553, \\ 8211 = 17.483, \\ 9525 = 5.1905, \\ 19019 = 13.1463, \\ 1739 = 37.47, \\ 40651 = 13.3127, \\ 38325 = 5.7665, \\ 29419 = 13.2263, \\ 21525 = 5.4305, \\ 30229 = 37.817, \\ 34221 = 17.2013, \\ 40749 = 17\ 2397, \\ 39701 = 37.1073, \end{cases} \quad y = \begin{cases} 21312 = 37.576, \\ 26588 = 17.1564, \\ 37240 = 5.7448, \\ 40248 = 13.3096, \\ 40052 = 17.2356, \\ 39760 = 5.7952, \\ 36192 = 13.2784, \\ 40848 = 37.1104, \\ 4368 = 13.336, \\ 14240 = 5.2848, \\ 28392 = 13.2184, \\ 34760 = 5.6952, \\ 27528 = 37.744, \\ 22372 = 17.1316, \\ 3332 = 17.196, \\ 9768 = 37.264, \end{cases}$$

La quarta specie contiene $2^{k-1} = 8$ soluzioni, senza verun fattore comune alla z, le quali sono

$x = (39917, 26093, 14893, 11603, 19667, 37523, 34387, 40723,$

$y = (\ 8844, 31476, 38076, 39204, 35844, 16236, 22116,\ 3636.$

SOLUZIONE DI DUE PROBLEMI DI GEOMETRIA ANALITICA

DEL PROF. B. TORTOLINI

(Terquem Annales des Mathém. Fevrier pag. 56 et Mai pag. 181. 1850.)

1.° Dimostrare che per ogni punto A di una curva conica passano quattro circoli osculatori aventi i loro punti di contatto in A, B, C, D. Questo problema viene risoluto, per una via intralciata, alla p. 151 dei citati Annali del sig. Terquem per l'anno corrente, a me pare che possa presentarsi la sua risoluzione assai semplicemente nel modo seguente. Il sig. *Joachimstal* il quale ha proposto l'indicato problema, aggiunge che il centro della conica è il centro delle distanze medie di B,C,D.

Il principio adunque non potendosi verificare, che per le coniche a centro, prendiamo l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Sieno adunque x, y, le coordinate del punto A preso sull'ellisse, x, y le coordinate di uno dei punti di contatto dei circoli osculatori passanti per A, noi avremo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

D'altronde se X, Y sono le coordinate del centro del circolo osculatore in (x, y) si hà

$$(X-x)^2+(Y-y)^2=(X-x_1)^2+(Y-y_1)^2$$

ovvero

$$(1)\quad x^2-2xX+y^2-2yY=x_1^2-2x_1X+y_1^2-2y_1Y$$

Ora come è noto per le coordinate X, Y abbiamo

$$X=\frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4},\quad Y=-\frac{(a^2-b^2)y^3}{b^4}$$

e tutta la questione si ridurrà a determinare i valori di x, y, espressi per x_1, y_1. Fin quì come nei citati Annali. Possiamo ora proseguire nel modo seguente

Facciamo uso delle coordinate sferiche, e poniamo

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad x_1 = a\cos u, \quad y_1 = b\,\mathrm{sen}\,u$$

la (1) dopo la sostituzione dei valori di X, Y diviene

$$a^2(3\mathrm{sen}^2\varphi - 1 - \cos^2 u - 2\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}^3\varphi + 2\cos u\cos^3\varphi)$$
$$= b^2(1 - 3\cos^2\varphi + \mathrm{sen}^2 u - 2\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}^3\varphi + 2\cos u\cos^3\varphi).$$

I valori di φ, che verificano quest' equazione sono quei, che risolvono il problema, ad eccezione però di $\varphi = u$. Ciò posto è noto dalle formole della trisezione dell'angolo, che o se si prenda

$$3\varphi = u, \quad \text{o} \quad 3\varphi = 2\pi + u, \quad 3\varphi = 2\pi - u$$

si avrà sempre

$$4\mathrm{sen}^3\varphi - 3\mathrm{sen}\,\varphi = \mathrm{sen}\,u, \quad 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = \cos u.$$

Sostituiti pertanto i valori di $\mathrm{sen}\,u$, $\cos u$ nella precedente equazione resta essa verificata, perciò il problema proposto si riduce evidentemente al problema della trisezione di un angolo. Sostituiamo infine nelle due ultime formole trigonometriche

$$\mathrm{sen}\varphi = \frac{y}{b}, \quad \mathrm{sen}u = \frac{y_1}{b}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{a}, \quad \cos u = \frac{x_1}{a}$$

esse divengono

$$4y^3 - 3b^2y - b^2y_1 = 0, \quad 4x^3 - 3a^2x - a^2x_1 = 0,$$

Le tre radici sono reali, ed i valori di x, y sono compresi il primo fra a, e $-a$, ed il secondo fra b, e, $-b$. Esse coincidono con quanto si trova alla pag. 154 dei citati annali: dunque nell'ellisse si hanno sempre quattro circoli osculatori passanti per uno stesso punto A dell'ellisse. Nell'iperbola la prima equazione diviene

$$4y^3 + 3b^2y + b^2y_1 = 0$$

la quale avrà una sola radice reale, e non esistono che due circoli osculatori.

2.° Sieno U, V due punti presi sul prolungamento degli assi

di un'ellisse, della quale il centro si denoti per O, e tali, che se P, Q siano respettivamente i punti di contatto delle tangenti condotte da U, V, gli angoli OUP, OVQ sieno eguali. Trovar la curva luogo geometrico del punto del quale OU, OV sono le coordinate.

L'enunciato problema si risolve assai facilmente per mezzo delle seguenti considerazioni. Pongasi l'origine delle coordinate al centro dell'ellissi, e siano x, y le coordinate del punto P, x' y' le coordinate del punto Q: per l'equazione dell' ellisse avremo primieramente

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

quindi per gli due angoli OUP, OVQ sarà

$$\text{tang OUP}=\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}\,,\qquad \text{tang OVQ}=\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y'}{x'}$$

quali per la condizione dell'eguaglianza porgeranno

$$\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}=\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y'}{x'}\,.$$

Questa equazione contiene la relazione, che deve sussistere fra le coordinate dei punti P, Q onde si verifichi l'eguaglianza dei nominati angoli. Essa può ridursi ad nna relazione trigonometrica : prendiamo infatti per l'equazione dell'ellisse la sostituzione sferica

$$x=a\cos\varphi\,,\quad y=b\,\text{sen}\,\varphi,\quad x'=a\cos\varphi',\quad y'=b\,\text{sen}\,\varphi'$$

otteniamo immediatamente

$$\frac{b}{a}\cot\varphi=\frac{a}{b}\,\text{tang}\,\varphi'$$

Ciò posto per le due coordinate OU, OV di un punto qualunque della nuova linea pongasi OU = X , OV = Y, è evidente che X, Y determinano i punti d'incontro con gli assi delle x, e delle y, delle rette tangenti condotte per i punti (x, y), (x', y'), quindi per le note proprietà dell'ellisse , si ha

$$X=\frac{a^2}{x}\,,\quad Y=\frac{b^2}{y'}$$

ovvero

$$X = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y^2 = \frac{b}{\operatorname{sen}\varphi'}.$$

Ora dalla relazione trovata fra gli angoli φ, φ' deduciamo

$$\operatorname{sen}^2\varphi' = \frac{b^4\cos^2\varphi}{a^4 - (a^4 - b^4)\cos^2\varphi}$$

perciò sarà

$$X^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi}, \quad Y^2 = \frac{a^4 - (a^4 - b^4)\cos^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi}$$

dalle quali eliminato l'angolo φ si ottiene il luogo geometrico cercato, e si ridurrà ad

$$a^2X^2 - b^2Y^2 = a^4 - b^4.$$

Equazione di un'iperbola concentrica all'ellisse : gli semiassi di questa iperbola sono evidentemente

$$A = \frac{\sqrt{(a^4 - b^4)}}{a}, \quad B = \frac{\sqrt{(a^4 - b^4)}}{b}.$$

La condizione alla quale devono soddisfare i due angoli φ, φ' è analoga a quella che s'incontra nella rettificazione dell'ellisse per dimostrare il noto teorema del *Conte di Fagnano*, e sarà facile di determinare la nuova ellisse alla quale si riferisca.

Riprendiamo l'equazione

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = \frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{x'}$$

ed elevando al quadrato si sostituiscano i valori di $y^2 . y'^2$, si otterrà fra le x, x' la relazione

$$b^2x^2x'^2 = a^2(a^2 - x^2)(a^2 - x'^2)$$

ovvero

$$a^8 - a^6(x^2 + x'^2) + (a^4 - b^4)\, x^2x'^2 = 0.$$

Si descriva ora sullo stesso asse maggiore $2a$ una nuova ellisse di semiasse minore $\frac{b^2}{a}$, l' eccentricità ε sarà data dalla

formola $\varepsilon^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^4}$ quindi $a^4 - b^4 = a^4 \varepsilon^2$, quale sostituito nell'ultima equazione, diviene

$$a^4 - a^2(x^2 + x'^2) + \varepsilon^2 x^2 x'^2 = 0 .$$

Questa è la condizione, che devono verificare le ascisse di due punti della nuova ellisse, onde la differenza degli archi computati dai vertici dei semiassi maggiore e minore fino ai detti punti sia rettificabile; essa per la sostituzione trigonometrica degli angoli φ, φ' diviene

$$1 - \cos^2\varphi - \cos^2\varphi' + \varepsilon^2\cos^2\varphi \cos^2\varphi' = 0.$$

Se dunque si descrivano le due ellissi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b^4}{a^2}\right)} = 1$$

e si determinino sulla seconda tutti quei punti per i quali ha luogo il teorema del *Conte di Fagnano*, allora i punti della prima ellisse corrispondenti alle medesime ascisse con la seconda saranno quei pei quali condotte le rette tangenti fino all' incontro degli assi, saranno egualmente inclinate.

OSSERVAZIONI RISPETTO AL PERIODICO ABBASSAMENTO DI TEMPERATURA, CHE SUOLE ACCADERE ALL'APPROSSIMARSI DELLA META' DI MAGGIO

LETTERA

DEL SIG. D. PAOLI

al Sig. Prof.

FRANCESCO ORIOLI

Pregmo Amico

di Pesaro 18 giugno 1850.

Tengo la mia promessa di darvi conto delle mie osservazioni rispetto al periodico abbassamento di temperatura che suole accadere all'approssimarsi della metà di maggio. In due parole potrei soddisfare a quest' impegno: dicendo che nulla

di ciò si è quì notato in quest'anno. Immagino però che a voi possa piacere di conoscere particolarmente le variazioni che a questo riguardo ha presentata la nostra atmosfera; un fatto negativo, o più giustamente una eccezione interessando spesso più che un fatto positivo, ed in questo caso segnatamente, e meritando perciò di essere chiarito con tutto il rigore. Voi potrete così giudicare se veramente possa dirsi che qui non siasi manifestato alcun effetto di quella causa che si suppone dare motivo ordinariamente a questo fenomeno, ed al tempo stesso avrete agio di confrontare ciò che quì si è osservato, e quanto costà ed altrove fu notato. E tanto più volontieri e con maggiore fiducia mando a voi il registro delle mie osservazioni, poichè ad esso posso unire quelle del degnissimo signore ab. Mazzoli, professore in questo Ginnasio, che gentilmente ha voluto incaricarsi di notare il massimo ed il minimo delle variazioni termometriche, ed il quadro di quelle istituite dall' egregio Padre Alessandro Serpieri delle Scuole Pie, professore di Fisica nel Collegio di Urbino; a cui la scienza va ora debitrice dell'ordinamento di un nuovo osservatorio meteorologico, ed io dell'onore che, per la somma cortesia che lo distingue, ho voluto farmi dirigendo a me il programma di questo suo Osservatorio; del quale riceverete contemporaneamente a questa mia lettera un esemplare. Alcune circostanze impedirono all'uno ed all'altro di notare gli estremi di temperatura ne'primi giorni del mese; ciò che però, a mio avviso, nulla toglie, incominciando le loro osservazioni qualche giorno innanzi all'epoca del solito freddo.

Quantunque io non mi sia contentato di un solo termometro, esponendone uno al SE, altro al NOv., oltre uno nell'interno in camera disabitata, noterò soltanto le variazioni del secondo, come quello in che, per la sua posizione, può aversi la maggiore confidenza, poichè al coperto, per quanto è possibile, da qualunque influenza che potesse alterare le variazioni stesse. Non pertanto vi dirò che le indicazioni del mio furono abbastanza corrispondenti a quelle dell' altro, tranne ciò che dipende dalla diversa esposizione. Sono ambidue del

Bellani, molto sensibili, a divisione Reaumoriana. Come vedrete le mie osservazioni si riferiscono a tre epoche del giorno: 10ʰ ant.; 2ʰ e 10ʰ pomeridiane. Quelle del sig. professor Mazzoli sono state fatte mediante due termometrografi, parimente del Bellani, esposti al N, all' esterno. Non isfuggirà a voi certamente che in generale le osservazioni sue sembrano indicare una temperatura alcun poco più elevata, tal che, a modo di esempio, ne'giorni 7 e 16 il minimo notato da lui è, benchè di poco superiore alla temperatura segnata dal mio termometro alle 10ʰ pom. Voi conoscete però quanto le posizioni e mille circostanze influiscano ad alterare le indicazioni di questo strumento. E nel caso nostro valga per tutte questa, che la casa del prelodato signor professore è posta nell'interno della città, e nella parte più meridionale; la mia all' altra estremità, poco meno che isolata, senz'altro edificio interposto fra essa ed il mare; verso il quale trovavasi esposto il mio termometro.

Dalle nostre osservazioni rileverete che non solo in quest' anno non si è mostrato qui, comprendendo insieme Urbino o Pesaro, al contrario dello scorso 1849, alcun notevole abbassamento di temperatura ne' giorni 11 e seguenti fino al 15; ma che nè tampoco potrebbe dirsi ciò che avvertiva il signor Martins rispetto a Parigi, e per uno spazio di 30 anni: cioè non esservi « nel mese di maggio tre giorni consecutivi, la » media de'quali sia tanto bassa quanto quella dei 13, 14 e 15 ». Per convincersene basta portare lo sguardo sulla temperatura dei primi giorni del mese. Un piccolo abbassamento termometrico accadde nel mattino del giorno 11 in Urbino, ed anche più piccolo qui; cosa, al parer mio, da non tenerne conto, essendosi già verso il mezzodì rialzata sensibilmente la temperatura. E tanto più io credo non doversi dare a ciò alcun peso, potendo questo attribuirsi al vento che nel dì precedente, come vedrete, passò dal SE al NE, e che nel giorno 11 nel mattino piegò al NNO e quindi al NNE. Vi osservò pure in quel giorno, attenendomi alle osservazioni del prefato signor prof. Serpieri, una piccola elevazione barometrica. Intorno a

che, nel comunicarmi appunto questa cosa, facevami egli assai scusatamente riflettere non essere maraviglia se questi effetti vadano in certa guisa uniti fra loro; poichè li venti nordici e producono maggior fredda ed elevano il barometro. Resta bensì a vedersi se ciò si debba ad una causa cosmica; per esempio, al trovarsi la terra nel suo moto annuo in una regione dello spazio più freddo delle altre; che è quello cui precisamente tendono le ricerche su tale fenomeno. In somma pare a me che nel maggio di quest'anno null' altro possa vedersi, e segnatamente stando alle variazioni accadute in Pesaro, che un regolare e progressivo intiepidire della stagione; la quale durando oltre il costume rigida fino ai primi giorni del mese predetto, ha dovuto, per così dire, seguire in fine l'ordinario andamento, l'influenza del sole prendendo il dissopra sulle cause atmosferiche, le quali per lo innanzi avevano prolungato il verno. E questo pure sembra a me potersi dire: che questa influenza, tutta dipendente dal nostro sistema solare, abbia al tempo stesso prevalso sulla causa cospicua, qualunque essa siasi, cui si vuole ora attribuire la freddura de' giorni famosi, come sono chiamati dall'Humboldt. Attendendo in fine a quanto asserisce di aver notato il signor Crahars, può dirsi che quest'anno si è mostrato anomalo anche in questo; che nel giorno 24 niuno innalzamento notevole di temperatura potè osservarsi tanto in Urbino quanto in Pesaro.

Lascio ora a voi il dedurre da ciò quelle riflessioni che a voi paranno meglio convenienti, e che amerò poi di conoscere.

Conservatemi la vostra preziosa amicizia e credetemi con tutta la sincerità dell'animo

Vostro osseq. ed affmo amico
D. PAOLI.

TEMPERATURA ATMOSFERICA DEL MESE DI MAGGIO 1850 OSSERVATA IN PESARO MEDIANTE

	Termometro R. esterno del Bellani al NOr. da D. Paoli			Termometrografi del Bellani a R. esterno al Nord dal prof. Antonio Mazzoli	
Giorni	10 ore ant.	2 ore pom.	10 ore pom.	Minim°	Massim°
1	11°, 2	11°, 6	9°, 2		
2	9, 5	10, 8	8, 0		
3	6, 3	6, 3	8, 0		
4	7, 2	8, 1	6, 8		
5	10, 1	11, 4	9, 1		
6	11, 0	12, 3	10, 2		
7	12, 1	12, 8	10, 3	10°, 5	14°, 0
8	11, 0	11, 8	10, 7	10, 5	14, 7
9	12, 2	13, 3	10, 7	8, 0	15, 0
10	11, 8	12, 5	10, 1	9, 3	14, 7
11	11, 2	12, 3	11, 1	10, 3	14, 2
12	12, 5	13, 2	11, 4	10, 0	15, 5
13	13, 4	14, 1	11, 4	9, 3	16, 5
14	13, 7	15, 7	12, 9	11, 0	17, 0
15	14, 6	14, 1	13, 1	10, 0	19,
16	14, 0	14, 9	12, 9	13, 0	16, 5
17	13, 5	13, 3	12, 0	11, 2	16, 5
18	13, 2	14, 0	12, 8	12, 8	16, 6
19	14, 4	14, 7	13, 0	10, 4	16, 5
20	14, 7	15, 4	14, 0	12, 0	17, 5
21	15, 2	15, 5	13, 5	11, 8	17, 8
22	13, 7	14, 9	13, 1	11, 0	16, 5
23	15, 6	15, 4	13, 8	12, 0	17, 8
24	14, 0	15, 9	14, 2	12, 0	18, 5
25	15, 0	15, 8	13, 0		
26	15, 3	16, 3	14, 0		
27	15, 8	16, 9	14, 5		
28	16, 4	17, 1	14, 9		
29	16, 8	17, 9	15, 9		
30	15, 7	16, 6	14, 7		
31	15, 6	16, 9	14, 5		
Medie					

OSSERVAZIONI DEL TERMOMETRO ESTERNO R. E DEL TERMOMETROGRAFO ESTERNO DI PIX E BELLANI FATTE ALL'OSSERVATORIO METEOROLOGICO DEL COLLEGIO DE'NOBILI IN URBINO DAL P. ALESSANDRO SERPIERI DELLE S. P. -- MAGGIO 1850

Giorni	Osservazioni del Termometro: 9 ore pom.	12 ore pom.	3 ore pom.	9 ore pom.	11½ ore pom.	Vento dominante (a)	Osservazioni del Termometrografo: Minimo	Massimo
1								
2	.....	10°,7	8°,7					
3	4°,0	3,2	2,0			N. — NO		
4	4,2	5,8	6,0		3°,0	N. — NO		
5	7,5	7,7	10,7	8°,1	....	S — O		
6	9,0	10,0	9,1	8,9	....	S — O		
7	11,2	....	....	...	10,0	SO e SE		
8	10,5	10,3	11,6	...	9,2	ESE e ENE		
9	10,7	12,0	10,0	8,9	8,0	SO e NO	8,6	12,3
10	11,6	13,9	11,0	8,2	8,0	SO e NE	6,7	13,9
11	9,3	10,0	10,5	9,0	8,7	NNO e NNE	7,1	11,0
12	10,7	11,7	12,0	10,0	9,2	NE e NNE	7,7	12,3
13	11,7	13,4	12,7	11,0	9,9	NE	8,9	13,7
14	12,5	15,6	15,8	10,7	10,0	SE e SO	8,4	16,4
15	13,3	14,5	14,9	11,8	10,8	SO e SSO	9,2	15,2
16	14,0	....	....	12,7	12,0	SSO e SO	9,1	16,7
17	10,6	10,0	10,0	...	9,9	NE	10,1	10,6
18	12,2	....	13,0	11,6	11,3	NE	9,5	13,2
19	13,6	14,8	14,2	12,6	12,0	NE	9,9	15,3
20	15,1	16,4	14,0	...	12,3	NE e E	11,0	16,5
21	15,8	16,5	13,7	11,8	....	SSE e SSO	10,9	17,0
22	13,5	15,0	15,5	12,4	....	SO	8,9	15,7
23	15,9	....	....	13,4	....	SO	10,8	16,7
24	12,9	13,8	16,2	13,0	....	SO e OSO	10,1	13,8
25	15,7	15,6	....	13,2	....	SO e ENE	10,8	15,8
26	16,5	17,6	16,5	14,7	....	O e NE	10,9	18,3
27	16,7	....	16,7	...	....	NE	12,3	17,7
28	17,0	18,4	16,9	15,5	....	NE	12,9	18,8
29	15.6	16,4	16,2	13,8	12,6	NE	13,3	17,5
30	12,1	12,7	13,3	12,0	....	S e NE	11,4	13,7
31	14,5	....	13,8	12.3	....	NE e ENE	11,7	14,7

OSSERVAZIONI — Il minimo della temperatura spetta alla notte precedente il giorno in cui viene registrato e qui notato.
I due indici del Termometrografo erano riportati nel mercurio alle ore 9 pomeridiane.

(a) Nei giorni che hanno due venti dominanti, il primo appartiene alle ore antimeridiane, il secondo alle pomeridiane. La particella *e* distingue i due venti.

SULLA RIDUZIONE DEGLI ANGOLI FATTI DAGLI ARCHI GEODETICI FORMANTI UN PICCOLO TRIANGOLO AGLI ANGOLI FATTI DALLE LORO CORDE

LETTERA AL COMPILATORE

DI O. F. MOSSOTTI

Professore di Fisica Matematica e di Geodesia
all'Università di Pisa.

Ben è noto di quanta utilità sia nella Geodesia il teorema di Legendre che dimostra potersi ottenere la risoluzione dei triangoli sferici di piccola grandezza colle stesse formole con cui si risolvono i triangoli rettilinei, purchè si sottragga da ciascun angolo sferico il terzo dell' eccesso della somma dei tre angoli sopra due retti. Malgrado la semplicità di formule che questo teorema introduce, Delambre, ed altri in seguito, hanno preferito d'impiegare pel calcolo di una rete di triangoli geodetici la considerazione dei triangoli rettilinei formati dalle corde che uniscono a tre per tre i punti osservati. Per mezzo di questi triangoli si viene a tracciare come una porzione di poliedro inscritto alla superficie terrestre, che offre un'immagine reale e sensibile delle quantità su cui si aggira il calcolo, mentre l'impiego di triangoli sferici, calcolati con angoli che non sono i loro proprj, porge un sussidio artificiale che ci trasporta nell'astratto. Anche in Inghilterra l'uso dei triangoli fatti dalle corde è adottato, come rilevasi da un articolo dell' Astronomo reale di Greenwich pubblicato nel fascicolo di febbrajo 1850 del *Philosophical Magazine*, il quale versa sulla riduzione degli angoli di un piccolo triangolo sferico rettangolo a quelli del triangolo corrispondente fatto dalle corde. Quest' articolo m'induce a comunicarvi un teorema che soglio esporre nel breve corso di Geodesia che do in questa università, il quale è analogo a quello di Legendre, pel cui mezzo gli angoli di un triangolo curvilineo, fatto da tre piccoli archi geo-

detici tracciati sopra una superficie poco differente da una sfera, possono ridursi agli angoli dei triangoli fatti dalle loro corde. Spero che non sarà discaro che renda più diffusa la cognizione del medesimo per mezzo del vostro pregevole giornale.

PROBLEMA

1. « Supposti tre punti vicini fra loro sulla superficie dello » sferoide terrestre, da ciascuno dei quali siasi osservato con » un teodolite l'angolo compreso fra i piani verticali passanti » per gli altri due, proponiamoci di determinare gli angoli fatti » dalle corde che uniscono i medesimi punti, valendosi, per » soli dati, delle misure degli angoli osservati.»

Poniamo l'origine delle coordinate in uno dei detti punti, e condotto per esso un piano tangente alla superficie terrestre, prendiamo gli assi delle x ed y in questo piano, e diretti secondo le linee di massima e minima curvatura, i cui raggi siano R' ed R''. Sia di più s un arco geodetico che partendo dall'origine delle coordinate abbia ivi il raggio di curvatura ρ, e vi faccia coll'asse delle x un angolo α. I valori delle coordinate di un punto qualunque della detta linea geodetica, dedotti dalle note equazioni di queste linee, e svolti in serie per le potenze dell' arco s, che supporremo una quantità piccola di primo ordine, sono

$$x = s\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{\rho R'}\right)\cos\alpha\,, \quad y = s\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{\rho R''}\right)\operatorname{sen}\alpha\,,$$

$$z = \frac{s^2}{2\rho}\,; \text{ (*)}$$

nelle quali espressioni abbiamo trascurato le quantità di quart' ordine di fronte a quelle di prim'ordine, il che è sempre lecito nei limiti di grandezza dei triangoli che s'osservano nelle operazioni geodetiche.

(*) Lo sviluppo di questi valori può anche vedersi in due note nel Tomo XIII pag. 83, 87 del Giornale di Matematiche del sig. Liouville.

Se dividiamo la seconda equazione per la prima, si ottiene

$$\frac{y}{x}=\left[1+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R''}\right)\frac{s^2}{\rho}\right]\tan\alpha;$$

la superficie terrestre scostandosi assai poco da una sfera, la differenza $\frac{1}{R'}-\frac{1}{R''}$ è per la sua piccolezza da confondersi con una quantità di prim'ordine, ed il secondo termine del fattore di $\tan\alpha$ è trascurabile, come di terz'ordine, onde rimarrà

$$y = x \tan \alpha.$$

Quest' equazione ci mostra che la projezione sul piano tangente $x\ y$, del tratto di linea geodetica che consideriamo, può aversi per una linea retta che coincide colla tangente all'origine di detta linea. Da ciò segue che ciascuno degli angoli orizzontali misurato col teodolite è, senza error sensibile, eguale a quello che fanno fra loro le due tangenti agli archi geodetici che uniscono il punto d'osservazione cogli altri due.

2. Premessa questa proprietà, ritenendo l'origine delle coordinate nella stazione della prima osservazione, dinotiamo con x_1, y_1, z_1, ρ_1, α_1, le quantità corrispondenti al punto ove trovasi il primo oggetto osservato, e con x_2, y_2, z_2, ρ_2, α_2 quelle al punto del secondo oggetto, ed indichiamo con d_1 e d_2 le due corde che vanno dal punto d'osservazione ai due oggetti, e con Γ_0 l' angolo che esse comprendono. Dalle note formole della geometria analitica si avrà

$$(1)\quad d_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad d_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$(2)\quad d_1 d_2 \cos\Gamma_0 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$(3)\quad d_1 d_2 \operatorname{sen}\Gamma_0 = [(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2]^{\frac{1}{2}},$$

e le coordinate del primo oggetto saranno espresse da

$$x_1 = s_1\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s_1^2}{\rho_1 R'}\right)\cos\alpha_1\,,\quad y_1 = s_1\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s_1^2}{\rho_1 R''}\right)\operatorname{sen}\alpha_1\,,$$

$$z_1 = \frac{s_1^2}{2\rho_1}\,;$$

e quelle del secondo da

$$x_2 = s_2\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s_2^2}{\rho_2 R'}\right)\cos\alpha_2\,,\quad y_2 = s_2\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s_2^2}{\rho_2 R''}\right)\operatorname{sen}\alpha_2\,,$$

$$z_2 = \frac{s_2^2}{2\rho_2}\,.$$

Componendo con queste espressioni delle coordinate i valori delle due corde d_1 e d_2, attendendo all'equazione generale

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R'} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{R''}\,,$$

e trascurando le quantità dell'ordine delle quarte potenze in confronto di quelle della prima, si otterrà

$$(4)\quad d_1 = s_1\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s_1^2}{\rho_1^2}\right)\;;\qquad d_2 = s_2\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s_2^2}{\rho_2^2}\right).$$

Componiamo ora il valore di $d_1\,d_2\cos\Gamma_0$, col sostituire nella sua espressione (2) i valori delle coordinate $x_1\,y_1\,z_1\,,\,x_2$ ec.; avremo primieramente

$$\begin{aligned} d_1 d_2 \cos\Gamma_0 = {} & s_1\,s_2\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s_1^2}{\rho_1 R'}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s_2^2}{\rho_2 R'}\right)\cos\alpha_1\cos\alpha_2 \\ & + s_1\,s_2\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s_1^2}{\rho_1 R''}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s_2^2}{\rho_2 R''}\right)\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 \\ & + \frac{1}{4}\frac{s_1^2 s_2^2}{\rho_1\rho_2}\,; \end{aligned}$$

dalla quale, trascurando al solito le quantità d'un ordine superiore di due unità in confronto di quelle del più piccolo ordine, dedurremo

$$(5)\quad \begin{cases} d_1 d_2 \cos\Gamma_0 = s_1 s_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \\ -\frac{1}{12} s_1 s_2 \left(\frac{s_1^2}{\rho_1} + \frac{s_2^2}{\rho_2}\right)\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right)\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \\ -\frac{1}{12} s_1 s_2 \left(\frac{s_1^2}{\rho_1} + \frac{s_2^2}{\rho_2}\right)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right)\cos(\alpha_2 + \alpha_1) \\ +\frac{1}{4}\frac{s_1^2 s_2^2}{\rho_1 \rho_2}\,. \end{cases}$$

Volendo passare a comporre il valore di $d_1\, d_2 \sin\Gamma_0$, osserveremo primieramente che le coordinate x_1 e x_2 essendo già dell'ordine del quadrato di s, e quelli di x, ed y, della prima potenza, i due primi quadrati nel secondo membro dell'equazione (3) saranno dell'ordine della sesta potenza, mentre il terzo quadrato non sarà che dell'ordine della quarta. Siccome nelle nostre formole è sufficiente di limitarsi a tener conto dei termini che sono di un' ordine di due sole potenze di s più alti del primo termine, potremo, sviluppando in serie il radicale, dare a quell'espressione la forma

$$(6)\quad d_1 d_2 \sin\Gamma_0 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_2)^2}{(x_1\, y_2 - x_2 y_1)^2}\right)$$

Colla sostituzione dei rispettivi valori delle coordinate avremo poi

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = s_1 s_2 \left(1 - \frac{1}{6}\,\frac{s_1^2}{\rho_1 R'}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\,\frac{s_2^2}{\rho_2 R''}\right)\cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2$$

$$- s_1 s_2 \left(1 - \frac{1}{6}\,\frac{s_2}{\rho_2 R'}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\,\frac{s_1^2}{\rho_1 R''}\right)\cos\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_1\,;$$

e sviluppando i prodotti, e trascurando i termini dell'ordine delle quinte e superiori potenze di s, sarà

$$(7)\quad \begin{cases} x_1y_2 - x_2y_1 = s_1s_2\,\mathrm{sen}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ -\frac{1}{12}s_1s_2\left(\frac{s_1^2}{\rho_1} + \frac{s_2^2}{\rho_2}\right)\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right)\mathrm{sen}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ -\frac{1}{12}s_1s_2\left(\frac{s_1^2}{\rho_1} - \frac{s_2^2}{\rho_2}\right)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right)\mathrm{sen}(\alpha_2 + \alpha_1)\ . \end{cases}$$

In un modo analogo troveremo

$$\frac{(y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2}{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{s_1}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\rho_2}\right)^2 - 2\frac{s_1s_2}{\rho_1\rho_2}\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{4\mathrm{sen}^2(\alpha_2 - \alpha_1)}\ .$$

Siccome le quantità del secondo membro sono di second'ordine, e vanno di più ad essere moltiplicate nella formola (6) per $x_1y_2 - x_2y_1$ che è pure di second'ordine, ed i raggi osculatori ρ_1 e ρ_2 della superficie terrestre differiscono di una quantità che può considerarsi del prim'ordine, potremo con differenza insensibile cambiare l'espressione precedente nella seguente

$$\frac{(y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2}{(x_1y_2 - x_2y_1)^2} = \frac{1}{4\rho_1\rho_2}\frac{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos\Gamma_0}{\mathrm{sen}^2\Gamma_0}$$

$$= \frac{1}{4\rho_1\rho_2}\frac{d_0^2}{\mathrm{sen}^2\Gamma_0}\ ;$$

dinotando con d_0 la terza corda, od il lato opposto all'angolo Γ_0. Ma, chiamando r il raggio del circolo circoscritto al triangolo delle corde, è noto che si ha

$$\frac{d_0}{\mathrm{sen}\Gamma_0} = 2r\ ;$$

dunque sarà

$$\frac{(y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2}{(x_1y_2 - x_2y_1)^2} = \frac{r^2}{\rho_1\rho_2}\ .$$

Sostituendo ora i valori dei primi membri della formola (7) e di questa nell'equazione (6), risulterà

$$d_1 d_2 \operatorname{sen}\Gamma_0 = s_1 s_2 \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$- \frac{1}{12} s_1 s_2 \left(\frac{s_1^2}{\rho_1} + \frac{s_2^2}{\rho_2}\right)\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right)\operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$- \frac{1}{12} s_1 s_2 \left(\frac{s_1^2}{\rho_1} - \frac{s_2^2}{\rho_2}\right)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right)\operatorname{sen}(\alpha_2 + \alpha_1)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{s_1 s_2}{\rho_1 \rho_2} r^2 \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1) .$$

3. Da questa equazione e da quella segnata (5) diviene ora facile di ricavare la differenza fra l'angolo Γ_0 e l'angolo $\alpha_2 - \alpha_1$. Per quest' oggetto si moltiplichi quest' ultima per $\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$, e dal prodotto sottraggasi la (5) moltiplicata per $\operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)$, si otterrà

$$d_1 d_2 \operatorname{sen}[\Gamma_0 - (\alpha_2 - \alpha_1)] =$$

$$- \frac{1}{4} \frac{s_1^2 s_2^2}{\rho_1 \rho_2} \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{2} \frac{s_1 s_2}{\rho_1 \rho_2} r^2 \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1) \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$- \frac{s_1 s_2}{12} \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right)\left(\frac{s_1^2}{\rho_1} \operatorname{sen} 2\alpha_1 , - \frac{s_2^2}{\rho_2} \operatorname{sen} 2\alpha_2\right) .$$

Il secondo membro essendo tutto composto di termini del quart'ordine, ed il prodotto d_1 d_2 nel primo membro non essendo che di second' ordine, ciò ci mostra che l' angolo $\Gamma_0 - (\alpha_2 - \alpha_1)$ sarà pure di second'ordine, e che quindi potremo, giusta le formole (4), entro il solito grado d'approssimazione, cambiare nel primo membro dell' equazione d_1 e d_2 in s_1 ed s_2, e porre l'arco in luogo del seno, per cui sarà

$$\Gamma_0 = \alpha_2 - \alpha_1 - \frac{1}{4}\frac{1}{\rho_1\rho_2} s_1 s_2 \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_1\rho_2} r^2 \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$- \frac{1}{12}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right)\left(\frac{s_1^2}{\rho_1}\operatorname{sen}2\alpha_1 - \frac{s_2^2}{\rho_2}\operatorname{sen}2\alpha_2\right) .$$

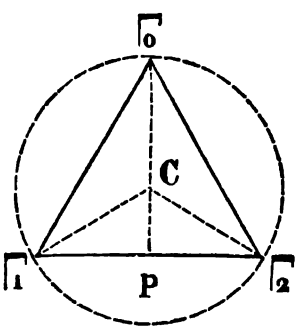
Il fattore $\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}$ nell' ultimo termine è, come abbiamo già osservato, una quantità che, per la superficie terrestre, si confonde per la sua piccolezza con quelle di prim' ordine; omettendo quindi l'ultimo termine come di terz'ordine e trascurabile, avremo semplicemente

$$(8) \quad \begin{cases} \Gamma_0 = \alpha_2 - \alpha_1 - \frac{1}{4}\frac{1}{\rho_1\rho_2} s_1 s_2 \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_1\rho_2} r^2 \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)\cos(\alpha_2 - \alpha_1) . \end{cases}$$

4. Esaminiamo ciò che rappresentano i due ultimi termini del secondo membro. Questi termini essendo già del second'ordine, potranno, col trascurare soltanto nell' equazione (8) delle quantità di quart'ordine, essere rimpiazzati dai seguenti

$$(9) \quad -\frac{1}{4}\frac{1}{\rho_1\rho_2} d_1 d_2 \operatorname{sen}\Gamma_0 + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_1\rho_2} r^2 \operatorname{sen}\Gamma_0 \cos\Gamma_0 .$$

Se nella figura annessa



si rappresenta con $\Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2$ il triangolo delle corde, si vede che $d_1 d_2 \sin \Gamma_0$ misura il doppio dell' area di questo triangolo, e che $r^2 \sin \Gamma_0 \cos \Gamma_0$ misura l'area del triangolo $\Gamma_1 C \Gamma_2$, che ha per base la corda $\Gamma_1 \Gamma_2 = 2 r \operatorname{sen} \Gamma_0$, e per altezza $Cp = r \cos \Gamma_0$; onde chiamando rispettivamente S, e σ_0 le aree di questi due triangoli, avremo

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \operatorname{sen} \Gamma_0 , \qquad (10)_0 \qquad \sigma_0 = r^2 \operatorname{sen} \Gamma_0 \cos \Gamma_0 .$$

Notando di più che il quoziente $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ si trova nella formola (9) moltiplicato per quantità di second'ordine, e che possiamo con sufficiente approssimazione sostituire ad esso il quoziente $\frac{1}{R'R''}$ ovvero $\frac{1}{R^2}$, R dinotando ciò che il Sig. Gauss chiama raggio della sfera di curvatura, e che risguarderemo come appartenente al centro del triangolo delle corde, la superiore espressione (9) diverrà

$$- \frac{1}{2R^2} (S - \sigma_0) .$$

Se quindi si pone per brevità

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma_0 ,$$

talchè γ_0 equivalga, giusta la riflessione fatta alla fine dell'articolo 2, all'angolo osservato dalla stazione Γ_0 e misurato col teodolite, l'equazione (8) verrà a prendere la forma

$$(11)_0 \qquad \Gamma_0 = \gamma_0 - \frac{1}{2R^2} (S - \sigma_0) .$$

Se si fosse preso il vertice Γ_1 per centro della stazione d'osservazione, dinotando con γ_1 l'angolo misurato col teodolite, e con σ_1 l'area del triangolo $\Gamma_2 C \Gamma_0$, così che fosse

$$(10)_1 \qquad \sigma_1 = r^2 \operatorname{sen} \Gamma_1 \cos \Gamma_1 ;$$

si avrebbe egualmente

$$(11)_1 \qquad \Gamma_1 = \gamma_1 - \frac{1}{2R^2}(S - \sigma_1).$$

E finalmente se si fosse fatto centro della stazione il vertice Γ_2, e γ_2 dinotasse l'angolo osservato da questa stazione, e σ_2 l'area del triangolo Γ_0 C Γ_1 espresso da

$$(10)_2 \qquad \sigma_2 = r^2 \operatorname{sen}\Gamma_2 \cos\Gamma_2 ;$$

si otterrebbe

$$(11)_2 \qquad \Gamma_2 = \gamma_2 - \frac{1}{2R^2}(S - \sigma_2).$$

Le tre formole $(11)_0$, $(11)_1$, $(11)_2$ conducono al seguente teorema. « In uno sferoide sulla cui superficie siano tracciati tre » archi geodetici formanti un piccolo triangolo; osservati con » un teodolite gli angoli compresi fra i due piani che passano » per la verticale di ciascun vertice del triangolo, e rispettivamente per gli altri due vertici, si dedurranno gli angoli » del triangolo fatto dalle corde, che uniscono a due a due i » vertici suddetti, circoscrivendo un circolo a questo triangolo, e sottraendo da ciascun angolo osservato il quoziente » che si ottiene dividendo pel doppio del quadrato del raggio » della sfera di curvatura l'area del triangolo delle corde, diminuito dell'area del triangolo che ha per base il lato opposto e per vertice il centro del circolo circoscritto.

5. Resta ora che facciamo vedere come le riduzioni che veniamo d'indicare per passare dagli angoli osservati a quelli fatti dalle corde, possano esprimersi coi soli dati delle osservazioni. Per quest'oggetto sommiamo le tre equazioni $(11)_0$, $(11)_1$, $(11)_2$, osservando che

$$(12) \qquad \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = S ;$$

troveremo

$$\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - \frac{S}{R^2}.$$

Ma i tre angoli Γ_0, Γ_1, Γ_2 presi assieme fanno due retti, dunque se si chiama E l'eccesso della somma degli angoli

$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$ sopra due retti, da quest'equazione avremo

$$(13) \qquad \frac{S}{R^2} = E.$$

Nelle tre formole $(10)_0$, $(10)_1$, $(10)_2$, gli angoli Γ_0, Γ_1, Γ_2 hanno rimpiazzati gli angoli γ_0, γ_1, γ_2 che esistevano nei termini originarj dai quali queste formole sono state dedotte, perchè, nel grado d'approssimazione entro cui ci limitiamo, era indifferente l'impiegare gli uni o gli altri angoli. Introduciamo di nuovo questi ultimi angoli in luogo dei primi, e sostituiamo i valori risultanti di σ_0, σ_1, σ_2 nell'equazione (12); si dedurrà

$$r^2 = \frac{2S}{\operatorname{sen}2\gamma_0 + \operatorname{sen}2\gamma_1 + \operatorname{sen}2\gamma_2};$$

ovvero eliminando S coll'equazione (13)

$$r^2 = 2E\frac{R^2}{\operatorname{sen}2\gamma_0 + \operatorname{sen}2\gamma_1 + \operatorname{sen}2\gamma_2}.$$

Ponendo questo valore di r^2 nelle formole $(10)_0$, $(10)_1$, $(10)_2$, ricaveremo

$$\sigma_0 = 2E\frac{R^2\operatorname{sen}2\gamma_0}{\operatorname{sen}2\gamma_0 + \operatorname{sen}2\gamma_1 + \operatorname{sen}2\gamma_2} = E\frac{R^2\cos\gamma_0}{\operatorname{sen}\gamma_1\operatorname{sen}\gamma_2},$$

$$\sigma_1 = 2E\frac{R^2\operatorname{sen}2\gamma_1}{\operatorname{sen}2\gamma_0 + \operatorname{sen}2\gamma_1 + \operatorname{sen}2\gamma_2} = E\frac{R^2\cos\gamma_1}{\operatorname{sen}\gamma_2\operatorname{sen}\gamma_0},$$

$$\sigma_2 = 2E\frac{R^2\operatorname{sen}2\gamma_2}{\operatorname{sen}2\gamma_0 + \operatorname{sen}2\gamma_1 + \operatorname{sen}2\gamma_2} = E\frac{R^2\cos\gamma_2}{\operatorname{sen}\gamma_0\operatorname{sen}\gamma_1};$$

il passaggio alle ultime espressioni suppone

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = \pi,$$

il che è lecito quando si trascurano in esse i quadrati di E, che sono del quart'ordine.

Sostituendo i valori ottenuti di σ_0, σ_1, σ_2 nelle formole $(11)_0$, $(11)_1$, $(11)_2$, avremo

$$\Gamma_0 = \gamma_0 - \frac{E}{2}\left(1 - \frac{\cos\gamma_0}{\operatorname{sen}\gamma_1 \operatorname{sen}\gamma_2}\right)$$

$$\Gamma_1 = \gamma_1 - \frac{E}{2}\left(1 - \frac{\cos\gamma_1}{\operatorname{sen}\gamma_2 \operatorname{sen}\gamma_0}\right)$$

$$\Gamma_2 = \gamma_2 - \frac{E}{2}\left(1 - \frac{\cos\gamma_2}{\operatorname{sen}\gamma_0 \operatorname{sen}\gamma_1}\right)$$

che danno le riduzioni, che ci eravamo proposti di cercare.

I raggi di curvatura essendo scomparsi da questi risultati, essi appartengono più direttamente alla sfera, ma abbiamo condotto le dimostrazioni in modo da provare che essi sussistono, entro lo stesso grado d'approssimazione, anche per uno sferoide in cui la differenza dei raggi inversi di curvatura possa risguardarsi come una quantità di prim' ordine, ciò che si verifica per la superficie terrestre.

SULLE STELLE CADENTI DEL 10 AGOSTO

LETTERA

DEL P. A. SECCHI

AL COMPILATORE

Stimatissimo Signore

Non le dispiacerà, credo io, se vengo a darle un breve conto delle osservazioni fatte nella sera del 10 agosto su le stelle cadenti, perchè il fenomeno parmi essere stato di non mediocre importanza come apparirà da quello che sono per dire. Noi, nella sera predetta, in tre osservatori uno dei quali era occupato all'orologio a registrare le osservazioni degli altri due, contammo e registrammo 227 stelle cadenti nello spazio di tre ore; è manifesto che non tutte furono potute osservare, e anche molte osservate non furono registrate perchè di posizione incerta. Il numero per se non è straordinario, bensì è degno di osservazione che si rinnovarono in questa occasione alcune particolarità che richiamar devono tutta

l'attenzione degli osservatori, perchè opportunissime a dileguare quella oscurità che ancora involve l'origine di questo fenomeno. Primieramente la direzione delle stelle era tale che (tranne pochissime eccezioni di 6 o 7) tutte parevano partire da un punto della costellazione di Perseo sotto Cassiopea: 2.° l'inclinazione di quelle che passavano allo zenit era di 55° all'ecclittica; inclinazione già trovata da Erman esser quella di questi asteroidi nel 1334. 3.° i gruppi venivano ad intervalli intermittenti. 4.° Gruppi simili parvero solcare il firmamento negli stessi punti ad intervalli di tempo eguali. Così lo spazio tra la Lira e il Cigno fu 4 volte di seguito traversato da un gruppo di 7 bellissime stelle a venti minuti di intervallo. 5.° Le striscie che duravano parecchi secondi dopo sparita la stella erano assai frequenti, ma non molto fuori del solito; fu singolare che più d'una parve riaccendersi dopo essersi estinta, e una biforcarsi in due.

Queste particolarità osservate da noi sono pure state osservate in altri siti: a proposito di questo ecco come scrive da Bruxelles il sig. Quetelet. « I vostri risultati si accordano » assai bene con quelli che noi abbiamo ottenuto qui, e con » quelli che M.r Cooper ha ottenuto con M.r Graham nell'os- » servatorio di Mackree in Irlanda. Noi abbiamo accertato co- » me voi un punto di emanazione al di sotto di Perseo in » Cassiopea. Questo punto di cui M.r Cooper avea sempre ri- » vocato in dubbio l'esistenza pargli ora esistere certamente. » Io pure col mio assistente ho osservato le intermittenze di » cui voi parlate, come pure il passaggio successivo per la me- » desima strada di varie stelle che si seguivano come a grup- » pi. Questo fatto che io avea indicato altre volte è apparso » assai deciso nelle ultime circostanze. MM.r Cooper e Graham » hanno contato fino a 180 stelle per ora nella serata del 10, » e noi circa 111 quantità media: la sera del 9 io ne avea » contato circa 60. »

Da questa lettera apparisce il fenomeno essere stato assai generale e visibile contemporaneamente in luoghi assai distanti. Le sere seguenti apparvero di mano in mano meno copiose

anche qui in Roma. Sono esse state le medesime stelle ? Questo è difficile a definirsi. La curiosa circostanza del biforcamento è stata osservata anche in Francia dal sig. Angles (V. Institut. n. del 21 agosto) presso Malbers, come pure la riaccensione di un' altra. Se sono le stesse meteore vedute in questi siti, esse devono essere assai elevate. Parrà dunque poco probabile ad alcuno che esse avessero la piccola elevazione assegnata da Brandes e da altri dentro i limiti dell'atmosfèra. Ma come spiegare d'altronde senza ciò la loro subitanea accensione ? Osserverò che il famoso bolide caduto nel novembre dell'anno scorso a Tripoli é stato veduto in Francia, e anche qui in Italia in varii siti, e anche ad Orvieto dal sig. Tommasi mio scolare: non è dunque impossibile che dentro i limiti dell'altezza dell'atmosfera le stelle cadenti siano visibili simultaneamente in paesi assai distanti. Il periodo con cui ritornano le stelle negli stessi punti del cielo, ci suggerì l'ardita ipotesi che alcuni di questi corpi attratti dalla terra potessero fare parecchi giri attorno di essa prima di precipitarvisi o restare volatilizzati nelle successive accensioni, o sfuggire in qualunque siasi altro modo. Tocca ad ulteriori ricerche a confermare o distruggere questa opinione.

Ad ogni modo è messo fuor di controversia l'essere il fenomeno realmente cosmico. Se esso consiste in gruppi di asteroidi formanti un anello attorno al sole, come alcuni credono, il quale tagli l'orbita terrestre in certi punti nei quali trovandosi la terra, più copiose siano le apparizioni delle stelle cadenti , le apparizioni che veggonsi in altri giorni dell' anno (giacchè raro è che manchino affatto queste meteore nelle notti serene) devono avere qualche legame colle apparizioni grandiose e periodiche. Una diligente osservazione del punto del cielo da cui sembrano divergere le stelle sporadiche che si osservano fra l' anno , può spargere su di ciò qualche lume, e mostrare se esso ha sede costantemente fissa o varia colle stagioni. Ieri sera, benchè occupato in altre ricerche, nello spazio di un'ora osservai più di 10 stelle cadenti : le più belle avevano la solita direzione del cigno al sagitario, altre erano va-

riamente dirette. Il loro punto di partenza però non parvemi esattamente nella posizione del 10 agosto, ma un poco più occidentale e più presso allo zenit, che non lo fosse la costellazione di Perseo. Esse furono troppo poche per potermi assicurar bene del fatto. È ancora di somma importanza l'osservare se quelle che paiono avere una direzione *perpendicolare* a quella delle altre (le quali non sono poche) possono collegarsi coll'altro punto di emanazione già osservato in Leone nel periodo di novembre. Tali osservazioni sono facilissime a farsi; e quando siano continuate con qualche regolarità, possono dare più lume su questo soggetto che non le interrotte ricerche sui periodi staccati. È da sperarsi che molti sotto il bel cielo d'Italia vorranno impegnarsi in questa ricerca così agevole, e far progredire questo novello ramo della fisica astronomia, a cui poco tempo può consecrarsi dalle persone addette agli osservatorii, essendo esse occupate in ricerche di altro genere che assorbono tutto il loro tempo.

Gradisca, sig. prof., i miei più distinti sentimenti di stima, onde ho l'onore di sottoscrivermi

Di V. S.

Osservatorio del Collegio Romano
7 settembre 1850.

Devotissimo Servitore
A. Secchi.

ELEMENTI DELL'ORBITA DEL NUOVO PIANETA PARTENOPE
NOTA

COMUNICATA DAL PROFESSORE

IGNAZIO CALANDRELLI

Direttore del Pontificio Osservatorio di Campidoglio.

Le osservazioni che hanno servito di base alla ricerca degli elementi ellittici di Partenope, sono quelle dei giorni 11, 21, e 31 maggio. Le prime due sono dell'astronomo di Napoli,

l'altra risulta da un medio di due osservazioni, una delle quali è dello stesso astronomo di Napoli, e l' altra fatta da me in questo osservatorio del Campidoglio. Ecco le posizioni del pianeta rispetto al piano dell' ecclittica. Le longitudini sono riportate all'equinozio medio dell'epoca, o allo istante della osservazione del 11 maggio, e i tempi sono riferiti al meridiano di Napoli.

Maggio 11. 53603 t. m. a Napoli.

$L = 230^\circ. 45'. 5''. 2$
$\lambda = + 7. 37. 52. 0$

Maggio 21. 44854

$L = 227^\circ. 22'. 36''. 2$
$\lambda = + 7. 29. 28. 7$

Maggio 31. 36105

$L = 226. 15. 53. 8$
$\lambda = + 7. 12. 35. 8$

Da questi ebbi i seguenti elementi :

Epoca Maggio 11. 53603 t. m. a Napoli.

Anomalia media . .	$282^\circ. 11'. 59''.0$
Perielio Π	318. 58. 0. 8
Nodo Ω	125. 13. 31. 9
Inclinaz. i	4. 37. 37. 5

$\log.a = 0. 3895560$
$\log.\varepsilon = 8. 9603172$
$\log.\mu'' = 2. 9656726.$

Le osservazioni estreme sono esattamente rappresentate; gli errori in longitudine e latitudine sono nelle decime di secondi. Ho fatto il calcolo di altre osservazioni fatte ne' più celebri osservatorj di Europa, e l'errore è sempre fra i limiti di quelli che si possono commettere nelle osservazioni.

Il metodo da me tenuto pel calcolo degli elementi, il paragone delle posizioni osservate colle calcolate fu presentato all' Accademia de'nuovi Lincei nella tornata del mese di Giu-

gno. Questo metodo che io già usai nel determinare gli elementi ellittici di Flora, si troverà sviluppato negli atti della stessa Accademia. Nell'epoca in cui calcolai questi elementi, non mi erano noti che quelli dati dal sig. Fergola: dal paragone però di questi colle osservazioni risultavano errori che giungevano al minuto primo.

EFFEMERIDI DEL TEVERE DALL'ANNO MDCCCXLV AL MDCCCIL

COMPILATE

DA GIOVANNI CAVALIERI SAN BERTOLO

Igegnere ordinario
nel Pontificio corpo d'acque e strade
ascritto nella classe dei soci aggiunti
alla Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei

IN CONTINUAZIONE DELLE PRECEDENTI
PUBBLICATE SINO AL MDCCCXLIV
DAL CHIARISSIMO PROF. VENTUROLI

Le interessanti ricerche intraprese e proseguite dall' anno 1822 a tutto il 1844 dall'illustre prof. Giuseppe Venturoli per determinare la misura dell' acqua portata dal Tevere nel suo passaggio per entro Roma, ed il rapporto di essa alle pioggie cadute negli stessi anni sul bacino del fiume, meritavano al certo di essere continuate, affinchè una più prolungata serie di esperienze ed un maggior numero di fatti conosciuti venisse a confermare i principii già stabiliti, e ad aprir l'adito a nuove più probabili conseguenze. Egli non è di fatto se non con lunghe serie di diligenti osservazioni che si può giungere a stabilire fondati criteri intorno alle leggi seguite dalla natura nei fenomeni idraulici; e le stesse più positive teorie della scienza hanno bisogno di un proporzionato corredo di giudiziose esperienze, senza del quale impossibile riuscirebbe l'applicarle ai casi concreti.

Destinato io fino dallo scorso anno alla direzione dei lavori per la navigazione del Tevere, mi sono accinto, col solo scopo di porgere qualche materiale di studio sulla statistica dei fiumi, ramo di tanto interesse nella scienza idraulica, a continuare sulle tracce segnate dal insigne matematico le osservazioni dall'epoca

a cui erano state da esso protratte, sino a tutto il trascorso anno 1849.

Nel dar conto degli ottenuti risultamenti aggiungerò qualche riflessione su talune interessanti conseguenze, che a me sembra poterne discendere, e che da altri di me più provetto in questi difficili studi potranno essere più acconciamente sviluppate.

La mole d'acqua scaricata dal Tevere nell'ultimo quinquennio risulta come segue:

anno	1845	met.	cub.	418, 629	× 365	× 86400
»	1846	»	»	339, 582	× 365	× 86400
»	1847	»	»	331, 883	× 365	× 86400
»	1848	»	»	327, 381	× 365	× 86400
»	1849	»	»	257, 332	× 365	× 86400.

I fattori costanti esprimono il numero di minuti secondi dei quali l'anno è composto; il terzo fattore variabile rappresenta la portata media del fiume per ciascun anno.

L'altezza della pioggia, caduta in questi stessi cinque anni, misurata all'osservatorio di Perugia, si trova essere stata

per l'anno	1845	lin.	468, 94	=	met. 1, 0577
»	1846	»	401, 02	=	» 0, 9045
»	1847	»	323, 81	=	» 0, 7304
»	1848	»	302, 90	=	» 0, 6832
»	1849	»	251, —	=	» 0, 5661.

E misurata nello stesso modo all'osservatorio dell'collegio romano risulta

per l'anno	1845	lin.	430, 84	=	met. 0, 9718
»	1846	»	428, 57	=	» 0, 9667
»	1847	»	356, 17	=	» 0, 8034
»	1848	»	286, 97	=	» 0, 6475
»	1849	»	232, 09	=	» 0, 5233.

Si deduce quindi il termine medio fra le osservazioni fatte a Perugia e quelle fatte a Roma

per l'anno	1845	met.	1, 0147
»	1846	»	0, 9356
»	1847	»	0, 7669
»	1848	»	0, 6654
»	1849	»	0, 5448.

Onde si ricava la quantità d'acqua piovuta in ciascun anno sull'intero bacino del Tevere, la di cui estensione superficiale è di met. quad. 16724517283; ed è

per l'anno	1845	met. cub.	538, 153 × 365 × 86400
»	1846	»	496, 172 × 365 × 86400
»	1847	»	406, 695 × 365 × 86400
»	1848	»	352, 872 × 365 × 86400
»	1849	»	288, 930 × 365 × 86400.

Aggiungendo i risultati di questi cinque anni a quelli raccolti dal prof. Venturoli pei precedenti ventitrè, si forma la tavola seguente, nella quale la prima colonna esprime la quantità media dell'acqua defluita pel fiume in ogni minuto secondo, la seconda l'altezza annuale della pioggia, la terza la quantità media della pioggia stessa caduta in ciascun minuto secondo sull'intero bacino del Tevere.

Anno	1822	....	m. c.	244,245	.... m.	0,6838	.... m. c.	362,640
»	1823	....	»	304,500	.... »	0,8025	.... »	425,591
»	1824	....	»	248,005	.... »	0,8838	.... »	467,426
»	1825	....	»	227,686	.... »	0,7339	.... »	389,210
»	1826	....	»	282,030	.... »	0,9769	.... »	518,080
»	1827	....	»	339,732	.... »	1,3640	.... »	723,371
»	1828	....	»	239,987	.... »	0,7930	.... »	419,403
»	1829	....	»	278,156	.... »	0,8359	.... »	443,304
»	1830	....	»	296,607	.... »	0,7112	.... »	377,171
»	1831	....	»	250,268	.... »	0,7003	.... »	371,391
»	1832	....	»	228,650	.... »	0,6168	.... »	326,214
»	1833	....	»	260,657	.... »	0,7996	.... »	424,053
»	1834	....	»	195,159	.... »	0,3816	.... »	202,374
»	1835	....	»	249,617	.... »	0,8901	.... »	462,048
»	1836	....	»	331,008	.... »	0,7856	.... »	416,628
»	1837	....	»	344,758	.... »	0,7497	.... »	397,589
»	1838	....	»	392,884	.... »	0,9272	.... »	491,723
»	1839	....	»	283,562	.... »	0,9148	.... »	484,147
»	1840	....	»	256,470	.... »	0,5431	.... »	288,023
»	1841	....	»	300,286	.... »	0,7719	.... »	419,362
»	1842	....	»	308,741	.... »	0,7865	.... »	417,105
»	1843	....	»	312,216	.... »	0,6515	.... »	345,511
»	1844	....	»	317,929	.... »	0,8496	.... »	449,160
»	1845	....	»	418,629	.... »	1,0147	.... »	538,153
»	1846	....	»	339,582	.... »	0,9356	.... »	496,172
»	1847	....	»	331,883	.... »	0,7669	.... »	406,695
»	1848	....	»	327,381	.... »	0,6654	.... »	352,872
»	1849	....	»	257,332	.... »	0,5448	.... »	288,930.

Ricavato il termine medio dai valori contenuti in ciascuna colonna di questa tavola si desumerà la misura media della quantità d'acqua portata dal Tevere per ciascun anno di

met. cub. 291,713 × 365 × 86400;

l'altezza media della pioggia di

met. 0,7889;

la quantità media della pioggia stessa di

$$\text{met. cub. } 417{,}655 \times 365 \times 86400.$$

La proporzione pertanto fra l'acqua fluente e la piovana verrà espressa da $\frac{291{,}713}{417{,}655} = 0{,}698$, cioè la prima uguale a 0,7 circa della seconda.

Il prof. Venturoli nel decennio dal 1822 al 1831 rinvenne l'altezza media della pioggia di met. 0, 8485, ed il rapporto dell'acqua fluente alla piovuta $= \frac{271{,}122}{449{,}986} = 0{,}602$; nel ventennio dal 1822 al 1841 trovò l'altezza media della pioggia di met. 0, 7380, ed il rapporto fra la portata del fiume e la quantità della pioggia stessa $= \frac{277{,}713}{419{,}487} = 0{,}661$; finalmente pei ventitrè anni dal 1822 fino al 1844 ebbe l'altezza della pioggia di 0,792, ed il rapporto anzidetto $= \frac{282{,}309}{417{,}888} = 0{,}675$.

Paragonati tali risultati con quelli testè rinvenuti per gli ultimi ventotto anni, rimane confermato quanto dal Venturoli stesso veniva stabilito, che cioè riuniti insieme i risultati di più anni, i valori medii che ne discendono dimostrano come la portata del fiume sta alla quantità d' acqua piovuta in un rapporto variabile fra $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$, e che questo rapporto diminuisce al crescere della pioggia.

E che a tal legge debba necessariamente obbedire l' indicato rapporto, sembra potersi facilmente dimostrare col seguente semplicissimo ragionamento.

Si chiami x la quantità della pioggia caduta in un dato tempo sul bacino d'un fiume, e z la quantità dell'acque sorgenti, che alimentano il fiume stesso per deflusso sotterraneo; dicasi inoltre k la quantità dell'evaporazione cui vanno soggette tanto le une quanto le altre nel defluire per l'alveo del fiume, la quale può stimarsi costante; ed $\frac{x}{m}$ esprima la perdita che per evapora-

zione ed assorbimento soffrono le acque pluviali prima di giungere all'alveo medesimo. È chiaro che sarà la portata

$$P = z + x - k - \frac{x}{m};$$

o sia

$$P = z - k + \frac{(m-1)x}{m} = \frac{m(z-k) + (m-1)x}{m};$$

e quindi il suo rapporto alla pioggia

$$\frac{P}{x} = \frac{m(z-k) + (m-1)x}{mx};$$

valore che evidentemente diminuisce sempre più al crescere della x.

La seguente tabella contiene per ciascun anno dal 1822 al 1849 nella prima colonna la quantità media della pioggia caduta in ogni minuto secondo sul bacino del Tevere, nella seconda la quantità media dell' acqua portata dal fiume nello stesso tempo, nella terza finalmente il rapporto di questa a quella.

Anno	1822	....	m. c.	362,640	....	m. c.	244,245	....	m. 0,673
»	1823	....	»	425,591	....	»	304,500	....	» 0,715
»	1824	....	»	467,426	....	»	248,005	....	» 0,530
»	1825	....	»	389,210	....	»	227,686	....	» 0,585
»	1826	....	»	518,080	....	»	282,030	....	» 0,544
»	1827	....	»	723,371	....	»	339,732	....	» 0,470
»	1828	....	»	419,403	....	»	239,987	....	» 0,572
»	1829	....	»	443,304	....	»	278,156	....	» 0,627
»	1830	....	»	377,171	....	»	296,607	....	» 0,786
»	1831	....	»	371,391	....	»	250,268	....	» 0,674
»	1832	....	»	326,214	....	»	228,650	....	» 0,701
»	1833	....	»	424,053	....	»	260,657	....	» 0,615
»	1834	....	»	202,374	....	»	195,159	....	» 0,964
»	1835	....	»	462,048	....	»	249,617	....	» 0,540
»	1836	....	»	416,628	....	»	331,008	....	» 0,794
»	1837	....	»	397,589	....	»	344,758	....	» 0,867
»	1838	....	»	491,723	....	»	392,884	....	» 0,799
»	1839	....	»	484,147	....	»	283,562	....	» 0,586
»	1840	....	»	288,023	....	»	256,470	....	» 0,890
»	1841	....	»	409,362	....	»	300,286	....	» 0,733
»	1842	....	»	417,105	....	»	308,741	....	» 0,740
»	1843	....	»	345,511	....	»	312,216	....	» 0,904
»	1844	....	»	449,160	....	»	317,929	....	» 0,708
»	1845	....	»	536,153	....	»	418,629	....	» 0,777
»	1846	....	»	496,172	....	»	339,582	....	» 0,684
»	1847	....	»	406,695	....	»	331,883	....	» 0,816
»	1848	....	»	352,872	....	»	327,381	....	» 0,928
»	1849	....	»	288,930	....	»	257,332	....	» 0,891

Dalla semplice osservazione di questa tabella si scorge a colpo d'occhio che per la maggior parte degli anni l' indicata legge si è costantemente verificata. Che se talune volte ha mancato, ciò è da credersi doversi attribuire ai fenomeni meteorici che hanno dominato in quegli anni, alle stagioni in che a preferenza sono cadute le pioggie, ad alla veemenza o

placidezza con cui si sono scaricate; circostanze le quali a tutti è noto quanto contribuiscano a fomentare o a mitigare l'evaporazione delle acque, che dalle nuvole si precipitano sulla superficie terrestre.

Essendo poi il deflusso unitario medio del fiume degli ultimi ventotto anni di met. cub. 291,713, rimane confermato eziandio quanto dallo stesso prof. Venturoli veniva sagacemente osservato in ordine al rapporto che passa fra lo stesso deflusso medio ed il minimo, che corrisponde a met. cub. 180 circa; esser cioè questo prossimamente uguale a due terze parti di quello.

Sembrami finalmente che dall'equazione

$$P = \frac{m(z - k) + (m - 1)x}{m}$$

potrebbe forse con sufficiente approssimazione determinarsi il valore di z, cioè dalla quantità d'acqua che alimenta il fiume per deflusso sotterraneo, qualora si conoscesse l'estensione superficiale delle acque del fiume dalle sorgenti fino alla foce nello stato ordinario; donde si dedurrebbe il valore di k; e qualora una lunga serie d'osservazioni porgesse il modo d'istituire un confronto fra i deflussi rinvenuti in diversi non brevi periodi. Se potranno continuarsi gli studi intrapresi sul nostro Tevere, si avrà forse fra qualche anno un sufficiente corredo di esperienze e di dati per poter tornare più profittevolmente su tale argomento.

Seguono le tavole delle altezze giornaliere del pelo d'acqua del Tevere, osservate in Roma all'idrometro di Ripetta dal 1 *gennaro* 1845 *al* 21 *dicembre* 1849.

ANNO 1845.

Giorni	Gennaro	Febbraro	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Decembre
1	6, 58	10, 51	8, 38	7, 36	7, 44	7, 56	7, 62	6, 21	6, 70	6, 83	6, 06	7, 25
2	6, 71	13, —	8, —	7, 32	7, 31	7, 24	6, 96	6, 18	6, 40	6, 63	6, 04	7, 16
3	6, 74	13, —	7, 88	7, 26	7, 26	7, 08	6, 71	6, 16	6, 25	6, 50	6, 31	7, 10
4	6, 70	10, 22	7, 65	7, 20	7, 12	7, 47	6, 64	6, 16	6, 18	6, 38	6, 50	7, —
5	6, 58	9, 27	9, 42	7, 19	7, 20	7, 71	6, 59	6, 15	6, 20	6, 30	7, 69	7, 11
6	6, 56	8, 36	11, 49	7, 18	7, 17	7, 38	6, 54	6, 15	6, 25	6, 35	7, 90	7, 09
7	6, 51	8, 26	9, 76	7, 15	7, 77	7, 26	6, 50	6, 17	6, 29	6, 26	7, 28	6, 98
8	6, 50	8, 16	12, 42	7, 34	7, 43	7, 17	6, 49	6, 40	6, 16	6, 27	7, 85	8, 58
9	6, 48	7, 84	11, 75	7, 46	7, 57	7, 06	6, 47	6, 26	6, 10	6, 14	14, 45	11, 20
10	6, 49	7, 75	9, 46	7, 58	8, 41	7, 01	6, 44	6, 25	6, 10	6, 60	11, 96	9, 23
11	6, 45	7, 62	10, 38	9, 96	7, 73	6, 97	6, 40	6, 31	6, 18	7, 90	11, 12	8, 30
12	6, 38	7, 54	12, 47	11, 50	8, 14	7, 04	6, 36	6, 25	7, 48	7, 86	9, 01	7, 85
13	6, 70	7, 44	11, 48	10, 46	7, 56	7, 50	6, 35	6, 22	6, 82	8, 65	8, 34	8, 24
14	6, 98	7, 34	12, 39	10, 20	7, 45	7, 45	6, 32	6, 45	6, 60	7, 22	7, 90	8, 50
15	6, 87	7, 12	13, 70	9, 63	7, 40	8, 18	6, 63	6, 27	6, 54	6, 80	7, 81	7, 72
16	6, 96	7, 05	12, 83	11, —	7, 37	7, 94	6, 45	6, 18	6, 56	6, 59	8, 90	7, 41
17	6, 83	7, 09	10, 68	11, 20	7, 44	7, 39	6, 42	6, 20	7, 68	6, 46	8, 17	7, 26
18	6, 58	7, 11	9, 74	10, —	7, 57	7, 26	6, 75	6, 18	6, 56	6, 39	8, 90	7, 22
19	6, 49	6, 99	9, 17	9, 55	7, 63	7, 07	6, 51	6, 16	6, 29	6, 31	11, 55	7, 20
20	6, 70	6, 93	9, 53	8, 94	7, 44	7, 04	6, 39	6, 15	6, 20	6, 24	10, 10	7, 13
21	8, 23	6, 88	10, 74	8, 58	7, 37	7, 06	6, 33	6, 12	6, 19	6, 22	8, 45	7, 53
22	13, 65	6, 72	10, 26	8, 31	7, 30	7, 02	6, 30	6, 10	6, 16	6, 19	8, 08	9, 98
23	11, 21	6, 75	8, 98	8, 09	7, 20	6, 88	6, 28	6, 08	6, 16	6, 17	9, 38	10, 21
24	9, 73	7, 76	8, 55	7, 93	7, 59	6, 80	6, 26	6, 04	6, 21	6, 15	10, 14	12, 70
25	8, 59	11, 15	8, 26	7, 95	7, 84	6, 77	6, 24	6, 04	6, 10	6, 14	9, 20	11, 98
26	8, 11	10, 59	8, 15	7, 99	7, 27	6, 73	6, 23	6, 03	6, 08	6, 13	8, 50	9, 74
27	8, 07	9, 20	7, 94	8, 18	7, 22	6, 69	6, 20	6, 03	6, 06	6, 11	8, 15	9, 04
28	7, 80	9, 37	7, 77	7, 70	8, 37	6, 66	6, 22	6, 02	8, 20	6, 11	7, 86	8, 48
29	7, 78	» »	7, 67	7, 56	7, 44	6, 62	6, 29	6, 10	11, 08	4, 10	7, 50	8, 18
30	8, 85	» »	7, 59	7, 51	7, 25	6, 66	6, 25	6, 26	7, 72	6, 09	7, 40	8, 10
31	9, 54	» »	7, 47	» »	7, 15	» »	6, 24	6, 64	» »	6, 08	» »	7, 91

ANNO 1846.

Giorni	Gennaro	Febbraro	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Decembre
1	7, 74	6, 78	6, 27	6, 62	6, 65	5, 97	5, 82	5, 64	6, 34	7, 32	8, 48	8, 68
2	7, 60	6, 77	6, 28	6, 58	6, 60	6, —	5, 79	5, 64	6, 26	7, 83	7, 90	7, 95
3	7, 55	6, 76	6, 27	6, 53	6, 65	5, 98	5, 80	5, 64	6, 08	8, 24	7, 60	7, 68
4	7, 48	6, 72	6, 26	6, 50	6, 46	5, 97	5, 79	5, 64	6, 09	7, 33	7, 38	7, 61
5	7, 30	6, 68	6, 24	6, 48	6, 43	5, 98	5, 78	5, 64	6, 10	6, 86	7, 20	9, 72
6	7, 22	6, 65	6, 24	6, 45	6, 42	6, 01	5, 73	5, 64	6, 04	6, 64	7, 30	9, 37
7	7, 15	6, 60	6, 26	6, 43	6, 46	5, 98	5, 75	5, 65	6, 12	7, 11	7, 23	12, 13
8	7, 05	6, 59	6, 71	6, 42	6, 48	6, —	5, 75	5, 66	6, 33	6, 56	7, 10	13, 86
9	6, 98	6, 59	6, 89	6, 43	6, 59	6, 12	5, 71	5, 91	6, 06	6, 49	6, 93	14, 54
10	6, 94	6, 55	10, —	6, 47	6, 74	6, 06	5, 73	5, 77	6, 84	6, 66	6, 87	16, 25
11	6, 91	6, 54	9, 05	7, 85	6, 60	6, 12	5, 73	5, 77	6, 22	6, 62	7, 05	14, 96
12	6, 86	6, 52	7, 63	6, 96	6, 46	6, 10	5, 74	5, 78	6, 19	6, 37	7, 92	11, 70
13	6, 84	6, 50	7, 20	6, 72	6, 38	6, 10	5, 71	5, 73	6, 05	6, 59	7, 11	13, 40
14	6, 80	6, 48	6, 94	6, 69	6, 34	6, 06	5, 70	5, 70	5, 96	8, 45	6, 88	12, —
15	6, 78	6, 45	6, 80	6, 50	6, 35	6, —	5, 69	5, 68	5, 92	7, 13	6, 73	10, —
16	6, 75	6, 48	6, 72	6, 47	6, 56	5, 98	5, 68	5, 68	5, 95	6, 80	6, 68	10, 21
17	6, 72	6, 40	6, 70	6, 46	6, 35	6, 15	5, 70	5, 68	6, 30	6, 48	6, 56	9, 22
18	7, 03	6, 38	6, 68	6, 44	6, 31	6, 06	5, 70	5, 68	6, 15	6, 35	6, 51	8, 76
19	8, 05	6, 37	6, 60	6, 48	6, 30	6, 31	5, 73	5, 86	6, —	6, 18	6, 48	9, 05
20	7, 82	6, 36	6, 61	6, 49	6, 39	6, 55	5, 75	5, 81	5, 94	6, 20	6, 45	8, 40
21	7, 45	6, 36	6, 67	7, 09	6, 32	6, 19	5, 80	5, 79	5, 88	6, 19	6, 43	8, 09
22	7, 11	6, 35	6, 72	7, —	6, 27	6, 09	5, 75	5, 81	6, 50	6, 22	6, 39	8, 25
23	6, 98	6, 33	9, 20	7, 82	6, 23	6, —	5, 71	5, 87	6, 81	7, 30	7, 09	12, 15
24	6, 92	6, 32	7, 50	7, 78	6, 19	5, 97	5, 69	5, 75	6, 53	12, 95	7, 50	12, 05
25	7, 05	6, 30	7, 21	7, 71	6, 16	5, 93	5, 68	5, 60	6, 54	13, 85	6, 98	10, 98
26	7, 31	6, 30	7, 02	7, 63	6, 27	6, —	5, 68	5, 05	6, 44	11, 89	6, 75	10, 80
27	7, 10	6, 29	6, 87	7, 50	6, 20	5, 88	5, 67	5, 92	6, 31	11, 95	6, 67	10, 74
28	7, —	6, 28	6, 80	6, 96	6, 04	5, 86	5, 65	5, 90	6, 14	12, 07	7, 03	12, 08
29	6, 93	» »	6, 82	6, 82	5, 98	5, 85	5, 64	5, 20	6, 03	10, 08	7, 75	10, 14
30	6, 86	» »	7, 06	6, 78	5, 96	5, 82	5, 64	5, 22	7, 35	11, 50	10, 90	9, 22
31	6, 81	» »	7, —	» »	5, 93	» »	5, 64	5, 68	» »	9, 60	» »	9, 06

ANNO 1847.

Giorni	Gennaro	Febbraro	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Decembre
1	9, 80	8, 12	7, 24	6, 93	7, 18	6, 55	6, 35	6, 22	6, 81	5, 95	6, 01	6, 22
2	12, 33	8, 04	7, 14	6, 93	8, 24	6, 56	6, 43	6, 20	7, 22	5, 99	5, 98	6, 16
3	10, 55	8, 25	7, 06	6, 92	7, 91	6, 54	6, 45	6, 31	6, 70	6, 04	5, 96	6, 07
4	9, 76	8, 64	7, 13	6, 98	7, 66	6, 48	6, 50	6, 22	6, 39	6, 35	5, 95	6, 03
5	9, 53	9, 02	7, 22	7, 10	7, 98	6, 54	6, 48	6, 17	6, 31	6, 24	5, 93	6, 01
6	9, 05	9, 16	10, 08	7, 27	9, —	6, 60	6, 45	6, 22	6, 41	6, 30	5, 91	6, —
7	8, 63	8, 05	8, 56	7, 26	8, 18	6, 58	6, 35	7, 45	6, 96	7, 05	5, 89	5, 99
8	8, 51	7, 75	8, 82	7, 12	7, 84	6, 40	6, 24	7, —	8, 68	7, 18	5, 88	6, 06
9	8, 64	7, 70	9, 61	7, 09	7, 43	6, 42	6, 23	6, 85	8, 73	6, 85	5, 87	6, 17
10	8, 43	8, 95	8, 38	7, —	7, 32	6, 48	6, 21	6, 49	6, 72	6, 88	5, 88	6, 58
11	8, 09	10, 14	8, —	6, 91	7, 23	6, 64	6, 19	6, 26	6, 41	6, 48	5, 85	6, 40
12	7, 92	8, 63	7, 97	6, 83	7, 16	7, 02	6, 18	6, 20	6, 29	6, 25	5, 87	6, 26
13	7, 77	8, 25	7, 63	6, 88	7, 11	6, 85	6, 15	6, 15	6, 21	6, 14	5, 88	6, 17
14	7, 66	7, 94	7, 44	6, 94	7, 08	6, 70	6, 05	6, 18	6, 18	6, 10	5, 89	6, 15
15	7, 58	7, 67	7, 33	6, 96	7, 04	6, 55	6, 15	6, 22	6, 12	6, 06	5, 88	6, 10
16	7, 52	8, 04	7, 23	7, 09	7, —	6, 48	6, 22	6, 20	6, 12	6, 12	5, 89	6, 06
17	7, 44	7, 90	7, 18	7, 76	7, 06	6, 50	6, 25	6, 19	6, 08	6, 65	5, 96	6, 04
18	7, 36	8, 21	7, 11	8, 01	6, 95	6, 48	6, 41	6, 18	6, 09	6, 34	5, 95	6, 01
19	7, 30	7, 77	7, 10	7, 98	6, 89	6, 44	6, 34	6, 19	6, 05	6, 12	5, 97	6, 01
20	7, 26	7, 64	7, 10	7, 75	6, 84	6, 59	6, 26	6, 20	6, 05	6, 08	6, 05	6, 46
21	7, 22	7, 52	7, 11	7, 56	6, 80	6, 96	6, 21	6, 16	6, 04	6, 01	8, 05	10, 77
22	7, 24	7, 44	7, 15	7, 58	6, 76	6, 77	6, 16	6, 10	6, 02	6, 64	7, 59	8, 23
23	7, 18	7, 38	7, 22	7, 76	6, 71	6, 69	6, 14	6, 27	6, 06	7, 54	7, 02	7, 62
24	7, 10	7, 34	7, 25	7, 80	6, 69	6, 56	6, 12	6, 63	5, 98	6, 90	6, 75	7, 26
25	7, 06	7, 26	7, 23	8, —	6, 66	6, 44	6, 10	6, 61	5, 95	6, 30	6, 49	7, 26
26	7, 44	7, 19	7, 14	8, 34	6, 62	6, 42	6, 15	6, 45	5, 92	6, 18	6, 50	7, 04
27	8, 16	7, 31	7, 06	7, 89	6, 60	6, 40	6, 15	6, 25	5, 89	6, 29	6, 20	9, 12
28	7, 56	7, 24	7, 04	7, 87	6, 58	6, 37	6, 68	6, 31	5, 97	6, 20	6, 15	12, —
29	7, 24	» »	6, 98	7, 65	6, 56	6, 47	7, 20	6, 44	5, 97	6, 09	6, 12	11, 45
30	7, 16	» »	6, 96	7, 41	6, 54	6, 45	6, 80	6, 35	5, 95	6, 04	6, 18	9, 22
31	7, 50	» »	6, 96	» »	6, 51	» »	6, 35	7, 08	» »	6, 03	» »	8, 30

ANNO 1848.

Giorni	Gennaro	Febbraro	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Decembre
1	7, 88	6, 92	7, 11	6, 98	6, 86	7, 35	5, 97	5, 86	5, 75	7, 82	6, 30	6, 9
2	7, 61	10, 35	7, 39	6, 92	6, 79	8, 10	5, 95	6, 06	5, 73	6, 85	7, 72	6, 8
3	7, 64	9, 62	7, 64	6, 85	6, 74	7, 53	5, 95	5, 82	5, 74	8, 63	7, 98	6, 7
4	7, 26	7, 92	8, 24	6, 83	6, 84	7, 03	5, 93	5, 87	5, 72	9, 65	7, 23	6, 6
5	7, 06	7, 33	7, 81	6, 80	7, 11	6, 66	5, 92	5, 84	5, 71	7, 04	6, 65	6, 7
6	6, 86	7, 06	7, 48	6, 76	6, 87	6, 59	5, 91	5, 82	5, 70	6, 64	6, 79	6, 8
7	7, 14	6, 88	7, 29	6, 71	6, 76	6, 54	5, 90	5, 86	5, 70	6, 26	7, 45	6, 8
8	7, 96	6, 76	7, 13	6, 78	6, 65	6, 48	5, 89	5, 83	5, 70	6, 19	8, 48	6, 7
9	7, 19	6, 66	7, 04	8, 23	6, 58	6, 43	5, 88	5, 82	5, 70	6, 13	9, 90	6, 5
10	6, 92	6, 97	6, 97	7, 64	6, 62	6, 51	5, 87	5, 80	5, 70	6, —	10, 77	6,
11	6, 60	7, 98	6, 91	7, 18	6, 55	6, 63	5, 93	5, 79	5, 72	6, 03	12, 99	6,
12	6, 52	9, 11	6, 98	6, 95	6, 52	6, 44	6, 02	5, 77	5, 74	5, 94	11, 05	6,
13	6, 52	10, 12	9, 60	7, 09	6, 46	6, 40	6, 38	5, 76	5, 80	5, 92	11, 77	6,
14	6, 45	9, 08	13, 60	7, 03	6, 43	6, 33	6, 19	5, 75	6, 02	5, 98	9, 28	6,
15	6, 41	8, 25	12, 74	7, 09	6, 41	6, 28	6, 08	5, 75	5, 78	5, 94	8, 35	6,
16	6, 40	7, 89	10, 50	6, 96	6, 37	6, 24	6, 09	5, 74	5, 75	7, 02	7, 83	6,
17	6, 34	7, 58	9, 43	6, 99	6, 35	6, 22	6, 08	5, 74	5, 74	6, 97	7, 56	6,
18	6, 28	7, 43	8, 68	6, 80	6, 39	6, 20	6, 10	5, 78	5, 74	6, 79	7, 26	6,
19	6, 26	7, 45	8, 46	6, 75	6, 59	6, 18	6, 09	5, 81	5, 73	6, 46	7, 11	6,
20	6, 27	7, 86	8, 95	6, 68	7, 43	6, 15	6, 02	5, 82	5, 76	7, 50	7, 01	6,
21	6, 28	8, 18	8, 56	6, 65	7, 60	6, 12	5, 98	5, 81	5, 75	7, 29	9, 28	6,
22	6, 35	10, 25	8, 79	6, 71	7, 16	6, 06	6, 01	5, 80	5, 75	11, 80	7, 96	6,
23	6, 75	9, 17	8, 34	7, 11	7, 09	6, 04	5, 96	5, 79	5, 77	10, 12	7, 23	6,
24	6, 68	8, 25	7, 94	7, 84	6, 88	6, 03	5, 90	5, 78	5, 79	8, 92	7, 06	6,
25	6, 65	7, 83	7, 71	7, 53	6, 75	6, 03	5, 88	5, 76	5, 83	7, 58	7, 73	6,
26	6, 62	7, 58	7, 65	7, 65	6, 63	6, 02	5, 87	5, 74	7, 65	7, 08	8, 95	6,
27	6, 58	7, 31	7, 43	7, 51	6, 58	6, 02	5, 84	5, 73	6, 74	6, 78	7, 83	6,
28	6, 49	7, 24	7, 29	7, 35	6, 53	6, 01	5, 83	5, 73	7, 13	6, 56	7, 31	6,
29	6, 40	7, 16	7, 20	7, 16	6, 51	5, 99	5, 82	5, 72	8, 02	6, 47	7, 08	6,
30	6, 30	» »	7, 09	7, 03	6, 50	5, 97	5, 80	5, 72	7, 18	6, 42	6, 97	6,
31	6, 27	» »	7, 01	» »	6, 56	» »	5, 80	5, 72	» »	6, 37	» »	6,

ANNO 1849.

Giorni	Gennaro	Febbraro	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Decembre
1	5, 98	6, 36	5, 91	6, 71	7, 30	6, 26	6, 11	5, 61	5, 88	5, 89	5, 68	6, 41
2	5, 96	6, 22	5, 92	6, 85	7, 20	6, 19	6, 07	5, 64	5, 73	5, 68	5, 68	6, 05
3	6, 02	6, 11	6, 05	6, 76	7, 17	6, 17	5, 89	5, 62	5, 70	5, 66	5, 68	5, 97
4	6, 03	6, 07	6, 01	7, 62	6, 99	6, 20	5, 84	5, 62	5, 66	6, 20	5, 79	5, 92
5	6, 04	5, 91	5, 98	8, 30	6, 94	6, 18	5, 82	5, 61	5, 61	5, 98	5, 77	5, 90
6	6, 03	5, 93	5, 92	8, 72	6, 91	6, 16	5, 81	5, 61	5, 64	5, 76	6, 26	5, 93
7	6, 18	5, 94	5, 90	7, 15	6, 98	6, 19	5, 79	5, 60	5, 68	5, 78	6, 18	5, 94
8	6, 16	5, 95	5, 89	6, 85	7, 05	6, 23	5, 76	5, 63	5, 81	6, 73	6, 08	5, 95
9	6, 21	5, 95	5, 88	6, 72	8, 24	6, 28	5, 75	5, 88	5, 69	5, 96	5, 92	5, 95
10	6, 14	5, 96	5, 87	6, 92	7, 16	6, 45	5, 72	5, 71	5, 67	7, 25	5, 86	6, 82
11	6, 16	5, 96	5, 87	10, —	7, 03	6, 19	5, 70	5, 67	5, 65	6, 06	5, 79	6, 71
12	6, 50	5, 97	5, 88	10, 30	7, 05	6, 14	5, 68	5, 64	5, 64	6, 85	5, 73	6, 43
13	7, 12	5, 98	5, 86	10, 20	7, 09	6, 08	5, 85	5, 63	5, 66	9. 04	5, 71	6, 25
14	6, 51	5, 99	5, 84	10, 18	7, 13	6, 03	5, 95	5, 61	5, 65	8, 58	5, 69	6, 07
15	6, 31	5, 99	5, 83	12, 65	7, 08	6, 01	5, 93	5, 60	5, 64	6, 79	5, 70	6, —
16	6, 23	5, 94	5, 82	10, 90	6, 84	5, 96	5, 76	5, 59	5, 63	6, 61	5, 72	5, 96
17	6, 18	5, 92	5, 80	11, 52	6, 73	5, 94	5, 82	5, 58	5, 63	6, 32	6, 03	5, 95
18	6, 15	5, 90	5, 79	11, 20	6, 67	5, 89	5, 77	5, 57	5, 62	6, 06	5, 98	5, 94
19	6, 11	5, 90	5, 78	9, 72	6, 62	5, 87	5, 79	5, 56	5, 62	6, 09	5, 83	5, 93
20	6, 10	5, 92	5, 78	9, 35	6, 58	5, 86	5, 80	5, 58	5, 61	6, 07	5, 76	5, 90
21	6, 09	5, 91	5, 77	9, 25	6, 53	5, 86	5, 76	5, 60	5, 70	6, 93	5, 73	5, 89
22	6, 08	5, 93	5, 76	9, 38	6, 49	5, 85	5, 74	5, 67	5, 73	6, 79	5, 71	5, 90
23	6, 08	5, 90	5, 78	8, 84	6, 45	5, 85	5, 72	5, 75	5, 68	6, 36	5, 74	5, 88
24	6, 08	5, 89	5, 78	8, 60	6, 42	5, 84	5, 69	5, 72	5, 67	5, 80	5, 79	5, 86
25	6, 07	5, 90	6, 05	8, 67	6, 45	5, 83	5, 66	5, 65	5, 65	5, 76	5, 85	5, 84
26	6, 06	5, 89	7, 35	9, 03	6, 59	5, 82	5, 65	5, 63	5, 82	5, 75	6, 30	5, 83
27	6, 06	5, 89	7, 85	8, 82	6, 46	5, 80	5, 65	5, 71	5, 68	5, 73	7, 14	5, 82
28	6, 05	5, 90	6, 98	8, 44	6, 45	5, 80	5, 64	5, 74	5, 70	5, 72	7, 58	5, 80
29	6, 04	» »	6, 79	7, 58	6, 43	5, 79	5, 64	5, 78	5, 68	5, 70	6, 80	5, 78
30	6, 15	» »	6, 68	7 36	6, 38	5, 83	5, 65	5, 70	5, 67	5, 68	6, 54	5, 74
31	6, 43	» »	6, 59	» »	6, 31	» »	5, 65	5, 68	» »	5, 67	» »	5, 70

SULLA FISSEZZA DEL LIVELLO DEL MARE

MEMORIA

DI FRANCESCO PISTOLESI

letta all'adunanza pubblica dell'I. e R. Accademia dei Fisiocritici di Siena de'16 dicembre 1849.

È innegabile che per l'azione dell'atmosfera e delle piogge le montagne e le alture si corrodono, si denudano, e che le materie delle quali esse si spogliano, tendono a render più elevate le pianure. Questo ultimo fatto è confermato dai ruderi delle antiche città, i più dei quali giacciono al di sotto dell' attual superficie terrestre.

Ma non solo si rendono più elevate le pianure della terra, sempre più pure s'innalza il fondo del mare, per le materie che vi sono dai fiumi trascinate. Conseguenza naturale di questo riempimento o alzamento del fondo del mare, che diminuisce il di lui recipiente, esser dovrebbe l' inalzamento progressivo del livello delle acque marine.

Vediamo se ciò accada. Dichiariamo di non occuparci, in questa memoria, di fatti di allontanamento del mare da qualche lido, o inversamente di quelli d'invasione di altri lidi, essendo questi fenomeni semplicemente dovuti a circostanze locali d'interrimento o di corrosione, indipendenti dai movimenti di livello che avesse il mare provati.

Ci attenghiamo soltanto a quei fatti, i quali chiaramente indicano che il mare o la costa adiacente hanno subìto un inalzamento, ovvero una depressione, l' uno rapporto all'altra. La distinzione dei fenomeni di questa categorìa da quelli della precedente, è della più alta importanza per la soluzione del problema del quale ci occupiamo, poichè la riunione e la confusione dei fatti dell'una e dell'altra specie ha fin qui allontanati molti dal sentiero diretto per raggiunger lo scopo.

Noi abbiamo fatti evidenti tanto di depressione come di inalzamento. Molte umane costruzioni ed anco delle strade quasi intiere sottostanno al livello del mare, l'edificazione delle quali indubitatamente ebbe luogo sopra un terreno più del mare elevato. Ed inversamente molte fabbriche furono erette sul littorale, che attualmente sono assaissimo alte rapporto al mare.

Non potremmo attribuire questi fatti opposti ad un movimento di altalena significante del mare, perchè rejetto dalla storia. Nè potremmo tampoco ammettere una contemporanea variazione del di lui livello in due sensi opposti, tale spiegazione implicando assurdità rispetto alle leggi di equilibrio cui vanno i fluidi soggetti. Dobbiamo dunque ammettere che i lidi si mossero, cioè che alcuni si abbassarono ed altri si sollevarono. Questa deduzione è consentanea alla verità; poichè le sponde della Svezia e della Danimarca somministrano le prove evidenti del movimento della scorza terrestre nel senso di elevazione come in quello di abbassamento. Nella costa che si è inalzata, le tracce o segni del livello del mare mostrano non essersi il mare abbassato, ma che la costa si è inegualmente sollevata. Ecco altro esempio di sollevamento: « Una parte dell' » isola di Terranuova (New-Fondland), massime quella giacen- » te intorno alla baja della Concezione, continua sensibilmente » ad inalzarsi dal seno dell'Oceano Atlantico, in guisa che si » può temere che ad un'epoca non molto lontana la maggior » parte dei migliori ancoraggi e sorregitori vi perderanno i » loro vantaggi, e forse anco si arreneranno compiutamente. » Nel porto di Graves, per esempio, molti gravi scoglj di su- » perficie piana, sopra i quali passavano, or fa tre anni, le go- » lette con facilità, sono al dì d'oggi quasi a fior d' acqua. In » altro luogo detto *il Cosce*, verso il fondo della baja Robert, » a più di un miglio dalla spiaggia, ed a molti piedi sotto il » livello del mare, si scorge nelle terre una sfondata che rasso- » miglia tutt'affatto ad un bacino disseccato. Questo è attual- » mente rivestito di cinque a sei piedi di terra vegetale. » (Gräberg d'Hemso, *Ultimi progressi della Geografia, sunto letto al Congresso Scientifico tenuto in Genova nel Settembre* 1846).

Se, anzi che elevarsi quel terreno, si abbassasse ivi il livello del mare, il fenomeno di Terranuova dovrebbe pur verificarsi in altre adiacenze dei vicini lidi.

Circa gli abbassamenti del suolo, rilevo che non sempre sono operati da azione, diremo così, geologica; derivano sovente dalla natura stessa del terreno, e per l'effetto della pressione. Sono quasi ottanta anni che Gio: Andrea Deluc, contro l'opinione di quelli che tenevano elevarsi il livello del mare, addusse non pochi esempj di abbassamento meccanico del suolo in Olanda e nella Frisia (*Lettres phys: sur l'hist: de la terre et de l' homme,* tom. 5. pag. 267). Lo stesso fenomeno di compressione successiva del suolo accade a Venezia, per cui il livello del mare sembra provare un continuo alzamento secolare, alla misura del quale il sig. Emilio Campilanzi (che crede a detto alzamento) ha principalmente dedicata una Memoria inserita negli *Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto,* marzo e aprile 1840. p. 51). All' inversa il sig. Afan de Rivera ha rilevato, come fece il Deluc, l'effetto della compressione successiva del suolo mediante il progressivo abbassamento dei piloni nei porti di Pozzuoli, Miseno e Nisita. In quest' ultimo porto il primo pilone ha la sua colonna tuttora a livello del mare perchè appoggiato esso sopra terreno stabile, mentre le colonne degli altri piloni affondano di più in più sotto le acque di quattro a cinque palmi (*Biblioth: Univ:*, Avril 1833). E questi abbassamenti o avvallamenti non accadono soltanto sulla riva del mare; si verificano pure, qualunque ne siano le cause, nei luoghi mediterranei; si leggano nella *Geografia fisica* di Kant (tom. 6.° p. 200. e segt) molti esempj in proposito, ed il giornale *l' Institut.* (n.° 726. 1. dicemb: 1847. pag. 391) cita recentemente l'abbassamento progressivo della montagna di *Montgueux*, nel dipartimento dell' *Aube*, della quale da *S. Lié* si comincia a vedere la chiesa, mentre pochi anni avanti appena potevasi scorgere la punta del campanile.

Ma vi è di più: i fenomeni che si riscontrano nel famoso tempio di Serapide e sulla costa della baja napoletana, additano il terreno aver ivi sofferto più alternative di elevazione

e di abbassamento relativamente al livello del mare. Il celebre Cav. Niccolini, tanto benemerito per le sue dotte illustrazioni sulle vicende storico-fisiche di quel sito, ha creduto poterne concludere i movimenti alterni del livello del mare. E le di lui deduzioni fecero e fanno tuttavia molta impressione, senza che possa ciò spiegarsi, poichè appunto le colonne del Serapeo, per essere state perforate dai mitili ad una certa altezza soltanto, mentre si veggono inoffese nelle loro parti inferiore e superiore, rendono evidente non solo che il sottostante terreno si mosse per abbassarsi, ma anche che il movimento, in conseguenza del quale ebbe luogo l'attacco dei mitili, dovette esser rapido da interrare entro il limo del mare la porzione inferiore delle colonne che rimase illesa dalle foracchiature, come lo era la porzione restata fuori dell'acqua. Il successivo rialzamento, fatto che tuttora sussiste, dovette pure accadere con rapidità, onde la parte delle colonne che scese sott' acqua salva dai mitili, ritornasse egualmente inoffesa al di sopra del livello del mare. Quel terreno prova attualmente una lenta ma continua depressione, al certo dovuta ad effetto meccanico: ma questa specie di movimento non deve confondersi con que' movimenti a salti de' quali abbiamo parlato, non inesplicabili in siti soggetti alla vulcanica influenza.

Per altro gli abbassamenti ed i sollevamenti delle rive del mare non saprebbero rispondere alla questione se il livello di esso sia stabile, ovvero se siasi mosso (come poteva), oscillando per innalzamento o per depressione fino al punto di non contrariare i fatti terrestri di cui tenemmo parola.

Abbiamo bensì altri fatti che maravigliosamente rispondono alla predetta dimanda, e che dicono esser fisso il livello del mare dai tempi storici in qua. Ancona fabbricata dai Siracusani è sempre sul medesimo lido; l'arco di Trajano, che rese il di lei porto più comodo, è situato immediatamente al di sopra. Baruti, chiamato da Augusto *Julia felix*, non ha più dell'antica sua beltà che la propria situazione sulla riva del mare, al di sopra del quale non è elevata che quanto basta per non andar soggetta alle inondazioni. Marsilia, Cadice, Ostia, Smirne,

Tiro, Alessandria, Bisanzio sono sempre dei porti. Alcune vie romane stabilite da Agrippa sotto Augusto, che conducono alle città marittime della Belgica, costeggiano il mare attualmente come lo facevano altra volta. La Via Appia costruita, 2182 anni fa, in linea retta da Roma a Capua, è praticabile per una estensione di sessanta leghe; si perde in seguito affondandosi nelle profondità delle Paludi Pontine, e di là si vede in fine sortire in uno stato di integrità sorprendente. Della via Flaminia, da Roma fino a Rimini, si trovano egualmente alcune parti benissimo conservate; sono le due estremità; la parte di mezzo, in un' estensione di venti leghe, è seppellita da dieci secoli. Questi fatti delle vie Appia e Flaminia porgono non solo la prova della fissezza del livello del mare, anco in adiacenze che tante trasformazioni soffersero, ma nuova dimostrazione porgono, se occorre, di abbassamento in una parte di terreno e di immutabilità in altra. Nel *Dizionario geografico-fisico della Toscana* di Emmanuele Repetti, all' articolo *Padule di Scarlino* si vedono citati assai fatti in prova che da più di quattordici secoli in qua, il livello del mare non è variato lungo il littorale toscano, mentre l'autore vi fornisce insieme degli esempj di avvallamenti locali. Facile ci sarebbe il moltiplicare di più le prove della stabilità o immobilità in molti luoghi del terreno dai tempi storici, e perciò ovunque della fissezza del livello marino. Sufficienti siano gli addotti; anzi, dietro la necessaria universale eguaglianza del livello del mare, pare che avrebbe dovuto esser bastevole anche uno solo di questi fatti, per impedire o per minorare le tante deviazioni nelle quali ci ha condotti la mania di teorizzare, appoggiati a fatti che non armonizzarono con esso chiaro ed indubitato.

Come il livello del mare all' attuale epoca geologica sia rimasto costantemente fermo, noi non arriveremo forse mai a spiegare, e solo potremo in genere congetturare che l'influenza dei rinterrimenti continui i quali riempiono il fondo del mare e ne diminuiscono il letto, venga neutralizzata dai movimenti che soffrono nei due sensi opposti le pareti o le rive, feno-

meno di mirabile armonìa, che altamente ci penetra dell' infinita saviezza del Creatore.

Nella soluzione del problema abbiamo fatto astrazione dal quesito, se nello stato geologico presente del nostro pianeta la massa delle acque del mare vada diminuendo, quesito assai difficile, e sul quale una Memoria del sig. Eugenio Robert sta ora sotto l'esame di una commissione dell' Accademia delle scienze di Parigi (*Comptes rendus*, Tom. 25. p. 913). Ma questo secondo quesito non ha alcun rapporto con quello che ha formato il soggetto della presente Memoria, argomento sembratoci della maggiore importanza, non essendo noi riusciti a rimanere indifferenti che un fatto oramai certo ed indeclinabile, e da tanto tempo conosciuto, si perda così sovente e sì facilmente di vista, da esser tenuto tuttavia allo stato di questione, ed in modo che per risolverla il celebre Melloni consiglierebbe ai governi di istituire (ad imitazione di quanto si fa per le osservazioni magnetiche) degli studj nei diversi siti del globo sulle variazioni periodiche del livello del mare (*Rendiconto della R. Accad. delle Sc: di Napoli* 1849. tom. 5.° p. 365. *Institut* 10 novembre 1847. p. 368). Vorremmo pertanto sperare che d' ora in avanti, anzi che occuparci delle variazioni del livello marino, siano gli studj rivolti a conoscere quali dei fatti relativi siano da attribuirsi agli atterramenti, quali alle erosioni, quali ai sollevamenti e quali infine agli abbassamenti del suolo.

SULLA RISOLUZIONE NUMERICA DELLA

$$x^2 + y^2 = C$$

NOTA

DI GIUSTO BELLAVITIS

Professore all'Università di Padova (*).

Distinguerei due casi. — Primieramente il numero intero C non si possa o non si sappia decomporre: ricerco se esso sia un quadrato, per lo che mi basta tentare l' estrazione di radice se C diviso per 99 dia uno dei residui 0, 1, 4, 9, 16, 22, 25, 27, 31, 34, 36, 37, 45, 49, 55, 58, 64, 67, 70, 81, 82, 88, 91, 97; giacchè altrimenti non potrebbe essere quadrato. — Se C non sia quadrato opero come nel seguente: Esempio $x^2 + y^2 = 21590$; essendo $21509 \underset{40}{=} 29$ (col qual segno indico che 21509 diviso per 40 dà il residuo 29) gli sottro successivamente i numeri 100, 800, 1600, 2400 . . . . (che, dopo il primo, formano una progressione colla differenzza 800) ed esamino se qualcuno dei residui sia un quadrato; al che molto mi giova la regola precedente rispetto al modulo 99, i cui residui (facilissimi da calcolarsi) segno con $\underset{99}{=}$ o con $\equiv$. Nel seguente tipo di calcolo sono posti in ultima colonna i residui 25, 17, 1, 76, ec., che si hanno sottraendo del 26 successivamente 1, 8, 16, 24, ec.; così le sottrazioni dei 100, 800, 1600, . . . si fanno complessivamente solo allora che vi sia speranza di ottenere un quadrato perfetto.

(*) Questa Nota mi giunse poco dopo quella del sig. Prof. Volpicelli, e di già pubblicata nel fascicolo precedente pag. 369, che non poteva esser conosciuta dal dotto Professore di Padova. *B. T.*

21509 $\underset{99}{\equiv}$ 26			21509		21509
100 $\equiv$ 1	25		4		324
			480		1120
21409 non è quadrato					1920
			21025 = 145²		2720
800 $\equiv$ 8	17		1280		
1600 $\equiv$ 16	1		2080		15425 non é quad.
			2880		3520
19009 non è quadrato			3680		4320
					5120
2400 $\equiv$ 24	76		6625 non è quad.		5920
3200 $\equiv$ 22	44				6720
4000 $\equiv$ 40	4				
9409 $\equiv$ 97. 97					
4800 $\equiv$ 48	55				
4609 non è quadrato					

Al prodotto $C \underset{40}{=} 29$ devo successivamente sottrarre anche i numeri 4, 480, 1280, 2080, ..., non ché i 324, 1120, 1920, ..., per l' una e per l' altra progressione arrestandomi soltanto a quei residui che avendo 25 per ultime cifre danno speranza di essere quadrati perfetti. Per tal maniera si trova

$$21509 = 97^2 + 110^2 = 145^2 + 22^2 .$$

Non è difficile dedurne la decomposizione

$$21509 = (11^2 + 6^2)(11^2 + 4^2).$$

Se invece di $C \underset{40}{=} 29$, fosse $C \underset{40}{=} 9$ le tre serie di numeri da sottrarsi successivamente sarebbero 400, 1200, 2000, ... ; 64, 720, 1520, . . . ; 144, 880, 1680, ... (sempre colle differenze, dopo la prima, eguali ad 800). Che se $C \underset{40}{=} 21$ oppure $C \underset{40}{=} 1$ si opererebbe nello stesso modo sottraendo i numeri 100, 800, 1600 . . . . ; 36, 640, 1440, . . . ; 196, 960, 1760, . . . ; oppure i 400, 1200, 2000, ... ; 16, 560, 1360, ... ; 256, 1040, 1840, ... Saranno due sole le serie da sottrarsi per ciascheduno dei casi di $C \underset{40}{=} 33, 13, 37, 17$, cioè

64, 720, 150, ...; 144, 880, 1680, ...; 324, 1120, 1920, ...; 4, 480, 1280, ...; 36, 640, 1440, ... 196, 960, 1760, ...; 16, 560, 1360, ... 256, 1040, 1840.... Se altro fosse il residuo di C diviso per 40, o C sarebbe divisibile per 5, la $x^2 + y^2 = C$ sarebbe impossibile.

In secondo luogo suppongo di conoscere la decomposizione del numero dispari C in tutti i suoi fattori primi, e per ciascuno di tali fattori c, che divisi per 4 danno il residuo 1, di aver trovato come sopra l'unica risoluzione della $x^2+y^2=c$. Abbiasi per esempio $x^2 + y^2 = 5.13.17$; tutte le risoluzioni saranno date da $x + yi = (2 \pm i)(3 \pm 2i)(4 \pm i)$, dove con i indico l'immaginario $\sqrt{-1}$, dovendosi prendere i doppi segni in tutti i modi possibili. Le soluzioni essenzialmente differenti sono $2^{n-1} = 4$, essendo n il numero del fattori tutti disuguali.

Se fra i fattori di C ve ne sieno di eguali e si vogliano le soluzioni della $x^2 + y^2 = C$ in numeri tra loro primi, bisogna dare ai fattori eguali eguali segni. Così per la

$$x^2 + y^2 = 1105^2$$

avremo

$$x+yi = (2\pm i)^2(3\pm 2i)^2(4\pm i)^2 = (3\pm 4i)(5\pm 12i)(15\pm 8i).$$

Poichè se per esempio si prendessero i due fattori $2+i$, $2-i$ con segni opposti si otterrebbe il fattore reale 5 comune ad x ad y. Per tal maniera oltre le $2^{n-1} = 4$ soluzioni in numeri tra loro primi, si trovano $2^{n-2} = 2$ soluzioni col fattore comune 5, altrettante col fattore 13, ed altrettante col fattore 17; poscia altre 2^{n-3} soluzioni col fattore comune 5. 13, altrettante col fattore 5. 17, ed altrettante col 13. 17: quindi si vede che tutte le soluzioni essenzialmente differenti quando C è il quadrato di un numero composto di n fattori disuguali, ciascuno della forma $4K + 1$, sono in numero di

$$2^{n-1} + n2^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-3} + \text{ec.} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Ciò si accorda con quanto il chiarissimo prof. Volpicelli tro-

vava nella dotta sua Memoria (*) per

$$C = 1105^2 , \quad e \quad C = 40885^2 .$$

Più generalmente la $x^2 + y^2 = c_1^{m_1} c_2^{m_2} \ldots (c_1 , c_2 , \ldots$ essendo numeri primi disuguali della predetta forma) ammette $\frac{1}{2}(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_3 + 1) \ldots$ soluzioni essenzialmente differenti, contando per un mezzo, se esista, la soluzione $y=0$, $x=\sqrt{C}$. Così la $x^2 + y^2 = 5^3 . 13^2 . 17$ presenta le dodici soluzioni: 567, 194; 409, 438; 599, 18; 537, 266; 5(37, 114; 21, 118; 107, 54; 69, 98); 13 (3, 46; 19, 42); 65 (7, 6; 9, 2).

SOPRA LA DETERMINAZIONE ANALITICA DELL'EFFLUSSO DEI LIQUIDI PER UNA PICCOLISSIMA APERTURA

MEMORIA

DEL DOTT. ENRICO BETTI

Professore di Matematiche nel liceo Forteguerri di Pistoja.

Il movimento di un liquido, che esce per una piccolissima apertura praticata in parete sottile, si è accennato finora nell' Analisi Idrodinamica come un caso di moto lineare, supponendo che tutte le molecole di un medesimo strato orizzontale discendessero verticalmente, animate di eguali velocità. Ma in questa ipotesi si ritiene come già stabilita una direzione del moto, quale non ha realmente luogo, e per conseguenza, se ne può dedurre coll' Analisi, soltanto ciò che è indipendente da questa direzione, come il celebre Teorema di Torricelli,

(*) Non noterei d'inesattezza le parole del Liouville ; nello stabilire la condizione *necessaria* e *sufficientemente* perché la $x^2 + y^2 = C$ abbia soluzioni in numeri primi fra di loro, ei non volle per certo escludere la possibilità di altre soluzioni : se ciò si volesse, C dovrebbe essere o un numero primo o il suo quadrato.

della proporzionalità delle portate alle radici quadrate dei battenti; e rimane impossibile di determinare tutte le altre circostanze del movimento, le quali sono divenute di esclusivo dominio della Idraulica sperimentale. Io quindi ho rigettato ogni ipotesi sulla direzione del movimento, e ho integrato direttamente le equazioni ordinarie della Idrodinamica.

Ho incominciato dal caso più semplice, cioè da quello dell'efflusso per una fessura piccolissima, fatta transversalmente nel mezzo del fondo orizzontale di un vaso, ed ho ottenuto coll'Analisi anche le trajettorie delle molecole, le leggi colle quali variano le velocità nell'interno della massa liquida, e quindi il coefficiente di efflusso.

Il chiarissimo prof. Pacinotti, mio ottimo maestro e amico, ha avuto la gentilezza d'instituire apposite esperienze su questo caso di movimento dei liquidi, per verificare i miei risultati teorici; e quelle, eseguite dal dott. Antonio Gianni, non hanno dato con questi che una differenza piccolissima, dovuta alle resistenze trascurate nell'Analisi, e alle inesattezze, che non si possono mai disgiungere affatto dai risultati sperimentali.

In un vaso della forma di un parallelepipedo rettangolo, tenuto costantemente ripieno di liquido, sia praticata nella parete rettangolare che ne constituisce il fondo, e che supporremo sottilissima e orizzontale, una fessura di larghezza piccolissima, la quale, terminando ai due lati opposti, li divida ambedue per metà col suo asse longitudinale. È evidente che il movimento sarà a due sole coordinate; perchè, essendo identico in tutti i piani normali all'asse della fessura, basterà determinarlo soltanto in un velo fluido che sia in uno qualunque di questi.

Si ponga l'origine nel punto d'intersezione del piano, che si considera, coll'asse della fessura, e si prenda per asse delle x la verticale.

Le condizioni esterne alle quali è soggetto il movimento, e che debbon servire alla determinazione delle funzioni arbitrarie dell'integrale, sono le seguenti:

1.° Che la componente verticale u sia nulla per tutti i

punti del fondo, ossia per $x = 0$ con y compreso tra $\pm b$ e $\pm \infty$; indicando con $2b$ la larghezza della fessura, e riguardando, come abbiam detto, le dimensioni del vaso incomparabilmente più grandi di b:

2.° Che la pressione p sia eguale alla pressione p_0 dell'atmosfera in tutti i punti della fessura, cioè per $x = 0$ con y compreso tra $\pm b$ e zero: lo che si può assumere, come si é fatto da altri geometri in casi analoghi, avuto riguardo alla piccolezza di b:

3.° Che la pressione p sia pure eguale a p_0 alla superficie superiore del liquido, per $x = \mathrm{d}$ altezza del vaso. L'altra condizione relativa alle pareti laterali rimane verificata di per sè; perchè, attesa la piccolezza della fessura, la velocità a quella distanza deve risultar trascurabile.

Prendiamo il moto ridotto permanente, come suol farsi sempre nelle esperienze sull'efflusso dei liquidi.

Supponendo $u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y = \mathrm{d}k$, le equazioni fondamentali della Idrodinamica riduconsi alle seguenti

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}y^2} = 0,$$

$$(2) \qquad p = c - gx - \frac{v^2}{2} :$$

dove c è una costante arbitraria, g la gravità, v la velocità risultante.

Transformiamo la (1) in coordinate ellittiche del Lamé. Siano i fuochi delle Ellissi e Iperbole omofocali i bordi della fessura; b ne saranno le *eccentricità*. S' indichino con μ i semiassi maggiori delle Ellissi, con ν i semiassi reali delle Iperbole; avremo

$$(3) \qquad \frac{y^2}{\mu^2} + \frac{x^2}{\mu^2 - b^2} = 1, \quad \frac{y^2}{\nu^2} - \frac{x^2}{b^2 - \nu^2} = 1.$$

Poniamo

$$\mu = b \cosh.\theta, \quad \nu = b \operatorname{sen}\varphi,$$

dove con h anteposto all'argomento s'indicano le funzioni tri-

gonometriche iperboliche, per le quali esistono le relazioni (*)

$$e^{\theta} + e^{-\theta} = 2\cos h.\theta, \quad e^{\theta} - e^{-\theta} = 2\operatorname{sen} h.\theta \ .$$

Con queste le (3) divengono

$$(4) \qquad \frac{y^2}{b^2\cos^2 h.\theta} + \frac{x^2}{b^2\operatorname{sen}^2 h.\theta} = 1 \ , \quad \frac{y^2}{b^2\operatorname{sen}^2\varphi} - \frac{x^2}{b^2\cos^2\varphi} = 1 \ ;$$

e quindi

$$(5) \qquad \begin{cases} y = b\cos h.\theta \operatorname{sen}\varphi \\ x = b\operatorname{sen} h.\theta \cos\varphi . \end{cases}$$

Ora è noto che la transformata delle (1) è in generale, quando θ e φ sono parametri di linee ortogonali tra loro,

$$(6) \qquad \frac{d\,\dfrac{H}{H'}\,\dfrac{dk}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d\,\dfrac{H'}{H}\,\dfrac{dk}{d\varphi}}{d\varphi} = 0 \ , \qquad (**)$$

(*) Le notazioni $\operatorname{sen} h.\theta$ e $\cos h.\theta$ hanno un significato molto diverso da quello delle funzioni circolari degli archi multipli, $\operatorname{sen}.h\theta$ e $\cos h\theta$. Queste indicano l'ordinata e l'ascissa d'un punto di una circonferenza di raggio uno, determinato da un settore l'area del quale è $\frac{1}{2}h\theta$: quelle indicano l'ordinata e l'ascissa di un punto di una iperbola equilatera, che ha i semiassi eguali a uno, determinato da un settore la cui area è $\frac{1}{2}\theta$; e si dicono funzioni trigonometriche iperboliche. — Ho preferito queste notazioni; perchè sono state già usate dal Prof. O. F. Mossotti nelle sue Lezioni di Meccanica e Idraulica date nell' I. e R. Università di Pisa, e che ora sono sotto il torchio.

(**) Si può dimostrare la equazione (6) nel modo seguente, applicando il metodo semplice ed elegante che per queste trasformazioni ha dato in generale il celebre C. G. I. Iacobi nel vol. XXXVI del Giornale di Crelle.

Indichiamo con α l'angolo che la normale alla Ellisse coordinata fa coll'asse delle x, con β quello della normale alla Iperbola; avremo

$$\frac{d\theta}{dx} = H\cos\alpha \ , \qquad \frac{d\theta}{dy} = H\operatorname{sen}\alpha \ ,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = H'\cos\beta \ , \qquad \frac{d\varphi}{dy} = H'\operatorname{sen}\beta \ .$$

essendo

$$H^2 = \frac{d\theta^2}{dx^2} + \frac{d\theta^2}{dy^2}, \quad H'^2 = \frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} :$$

ma dalle (5) si ha

Le derivate parziali di k saranno

$$\frac{dk}{dx} = \frac{dk}{d\theta} H \cos\alpha + \frac{dk}{d\varphi} H' \cos\beta$$

$$\frac{dk}{dy} = \frac{dk}{d\theta} H \operatorname{sen}\alpha + \frac{dk}{d\varphi} H' \operatorname{sen}\beta \ ;$$

onde, innalzando a quadrato e sommando, si ottiene

$$\frac{dk^2}{dx^2} + \frac{dk^2}{dy^2} = H^2 \frac{dk^2}{d\theta^2} + H'^2 \frac{dk^2}{d\varphi^2} \ .$$

Avremo inoltre anche le seguenti relazioni

$$\frac{d\theta}{H} = dx \cos\alpha + dy \operatorname{sen}\alpha ,$$

$$\frac{d\varphi}{H'} = dx \cos\beta + dy \operatorname{sen}\beta ,$$

dalle quali essendo le curve coordinate ortogonali, e quindi

$$\alpha - \beta = \pm \frac{\pi}{2} ,$$

si ha

$$dx = \frac{\operatorname{sen}\beta}{H} d\theta + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{H'} d\varphi$$

$$dy = \frac{\cos\beta}{H} d\theta + \frac{\cos\alpha}{H'} d\varphi ;$$

onde

$$dx\, dy = \left(\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\theta}\right) d\theta\, d\varphi = \frac{d\theta d\varphi}{HH'} .$$

Si potrà quindi stabilire la equazione

$$\iint \left(\frac{dk^2}{dx^2} + \frac{dk^2}{dy^2}\right) dx\, dy = \iint \left(H^2 \frac{dk^2}{d\theta^2} + H'^2 \frac{dk^2}{d\varphi^2}\right) \frac{d\theta\, d\varphi}{HH'} ;$$

dove i due integrali debbono intendersi estesi a tutti gli elementi di un medesimo spazio.

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{\cos h.\theta\cos\varphi}{b(\cos^2 h.\theta-\operatorname{sen}^2\varphi)}\,,\ \dfrac{d\theta}{dy}=\dfrac{\operatorname{sen}h.\theta\operatorname{sen}\varphi}{b(\cos^2 h.\theta-\operatorname{sen}^2\varphi)} \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{dx}=-\dfrac{\operatorname{sen}h.\theta\operatorname{sen}\varphi}{b(\cos^2 h.\theta-\operatorname{sen}^2\varphi)}\,,\ \dfrac{d\varphi}{dy}=\dfrac{\cos h.\theta\cos\varphi}{b(\cos^2 h.\theta-\operatorname{sen}^2\varphi)} \end{cases}$$

onde

$$H^2=H'^2=\frac{1}{b^2(\cos^2 h.\theta-\operatorname{sen}^2\varphi)}\ :$$

ciò che riduce la (6) e quindi anche la (1) a

$$(8)\qquad \frac{d^2k}{d\theta^2}+\frac{d^2k}{d\varphi^2}=0\,.$$

Si può assumere per un integrale di questa Equazione la seguente espressione,

$$k=C+C_0\theta+C_1\varphi+\Sigma B_m e^{-m\theta}\cos m\varphi:$$

onde derivando

Le variazioni di questi integrali rapporto a un parametro di k, devono essere eguali; onde è facile dedurne

$$\iint\left(\frac{d^2k}{dx^2}+\frac{d^2k}{dy^2}\right)dx\,dy\,\delta k=\iint\left\{\frac{d\,\dfrac{H}{H'}\dfrac{dk}{d\theta}}{d\theta}+\frac{d\,\dfrac{H'}{H}\dfrac{dk}{d\varphi}}{d\varphi}\right\}d\theta d\varphi\delta k\ ;$$

equazione, che, dovendo esser verificata qualunque siano δk e i limiti, è necessario che abbia luogo anche per i volumi elementari uguali

$$dx\,dy\ \text{ e }\ \frac{d\theta d\varphi}{HH'}\ ,$$

e sia

$$\frac{d^2k}{dx^2}+\frac{d^2k}{dy^2}=HH'\left\{\frac{d\,\dfrac{H}{H'}\dfrac{dk}{d\theta}}{d\theta}+\frac{d\,\dfrac{H'}{H}\dfrac{dk}{d\varphi}}{d\varphi}\right\}\ ,$$

d'onde deriva immediatamente la (6).

$$(9)\begin{cases} u = \dfrac{dk}{dx} \\ = \dfrac{(C_0 - \Sigma m B_m e^{-m\theta} \cos m\varphi)\cos h.\theta \cos\varphi - (C_1 - \Sigma m B_m e^{-m\theta} \operatorname{sen} m\varphi)\operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}\varphi}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)} \\ v = \dfrac{dk}{dy} \\ = \dfrac{(C_0 - \Sigma m B_m e^{-m\theta} \cos m\varphi)\operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}\varphi + (C_1 - \Sigma m B_m e^{-m\theta} \operatorname{sen} m\varphi)\cos h.\theta \cos\varphi}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)} \end{cases}$$

colle quali espressioni si può sodisfare a tutte le condizioni enunciate, come andiamo a vedere.

La prima condizione porta che u sia nullo per $x = 0$ con y compreso tra $+ b$ e $\pm\infty$; i quali valori corrispondono, come si vede dalle (5), a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e a θ qualunque. Ma per questo valore di φ

$$u = -\frac{C_1 - \Sigma m B_m \operatorname{sen} m \frac{\pi}{2}\, e^{-m\theta} \operatorname{sen} h.\theta}{\cos^2 h.\theta}$$

che, dovendo esser nullo qualunque sia θ, dà

$$C_1 = 0\,, \qquad m = 2t$$

essendo t numero intero

Poniamo ora, per introdurre anche C_0 sotto il termine sommatorio,

$$2t\, B_{2t} = - C_{2t}\,.$$

Con ciò le (9) si riducono alle seguenti

$$u = \frac{\cos h.\theta \cos\varphi \sum_{t=0}^{t=\infty} C_{2t}\, e^{-2t\theta} \cos 2t\varphi - \operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}\varphi \sum_{t=0}^{t=\infty} C_{2t}\, e^{-2t\theta} \operatorname{sen} 2t\varphi}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)}$$

$$v = \frac{\operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}\varphi \sum_{t=0}^{t=\infty} C_{2t}\, e^{-2t\theta} \cos 2t\varphi + \cos h.\theta \cos\varphi \sum_{t=0}^{t=\infty} C_{2t}\, e^{-2t\theta} \operatorname{sen} 2t\varphi}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)}$$

Aggiungendo e togliendo alla somma dei coseni

$$C_0 e^{-2\theta} \cos 2\varphi + (C_2 - C_0) e^{-4\theta} \cos 4\varphi + (C_4 - C_2 + C_0) e^{-6\theta} \cos 6\varphi + \ldots$$

$$\ldots + (C_{2t} - C_{2t-2} + \ldots + (-1)^t C_0)\, e^{-(2t+2)} \cos(2t+2)\varphi + \ldots$$

e ponendo

$$C_{2t} - C_{2t-2} + \ldots + (-1)^t C_0 = A_t\,;$$

e analogamente operando per la serie dei seni, si ottiene

$$u = \frac{1}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)} \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t e^{-(2t+1)\theta} \Big[\Big(e^{-\theta} \cos(2t+2)\varphi + e^{\theta} \cos 2t\varphi \Big) \cos h.\theta \cos\varphi$$

$$- \Big(e^{-\theta} \operatorname{sen}(2t+2)\varphi + e^{\theta} \operatorname{sen} 2t\varphi \Big) \operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}\varphi \Big].$$

$$v = \frac{1}{b(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi)} \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t e^{-(2t+1)\theta} \Big[\Big(e^{-\theta} \cos(2t+2)\varphi + e^{\theta} \cos 2t\varphi \Big) \operatorname{sen} h\theta \operatorname{sen}\varphi$$

$$+ \Big(e^{-\theta} \operatorname{sen}(2t+2)\varphi + e^{\theta} \operatorname{sen} 2t\varphi \Big) \cos h\theta \cos\varphi \Big]$$

Sostituendo a e^{θ} e a $e^{-\theta}$ i loro valori in funzioni trigonometriche iperboliche, e osservando che si ha identicamente

$$(\cos h.\theta - \operatorname{sen} h.\theta)\Big(\cos h.\theta \cos(2t+2)\varphi \cos\varphi - \operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}(2t+2)\varphi \operatorname{sen}\varphi\Big)$$

$$+ (\cos h.\theta + \operatorname{sen} h.\theta)\Big(\cos h.\theta \cos 2t\varphi \cos\varphi - \operatorname{sen} h.\theta \operatorname{sen}(2t+2)\varphi \operatorname{sen}\varphi\Big)$$

$$= 2(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi) \cos(2t+1)\varphi\,,$$

$$(\cos h.\theta - \operatorname{sen} h.\theta)\Big(\operatorname{sen} h.\theta \cos(2t+2)\varphi \operatorname{sen}\varphi + \cos h.\theta \cos\varphi\Big) \operatorname{sen}(2t+2)\varphi$$

$$+ (\cos h.\theta + \operatorname{sen} h.\theta)(\operatorname{sen} h.\theta \cos 2t\varphi \operatorname{sen}\varphi + \cos h.\theta \operatorname{sen} 2t\varphi \cos\varphi)$$

$$= 2(\cos^2 h.\theta - \operatorname{sen}^2\varphi) \operatorname{sen}(2t+1)\varphi\,,$$

e ponendo A_t in luogo di $\frac{2A_t}{b}$; le nostre equazioni si ridu-

cono alle seguenti

$$(11) \qquad u = \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t e^{-(2t+1)\theta} \cos(2t+1)\varphi$$

$$(12) \qquad v = \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t e^{-(2t+1)\theta} \operatorname{sen}(2t+1)\varphi$$

le quali, quadrate e sommate daranno

$$(13) \quad V^2 = \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t^2 e^{-2(2t+1)\theta} + 2\sum_{t_1=1}^{t_1=\infty} \cos 2t_1\varphi \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t A_{t+t_1} e^{-2(t+t_1+1)}$$

La seconda condizione è, che la pressione p sia eguale alla pressione p_0 dell' atmosfera nei punti della fessura; cioè per $x = 0$, con y compreso tra $\pm b$ e zero: ossia per $\theta = 0$ con φ qualunque, come è facile ricavar dalle (5). Per questi valori, indicando con V_0 la velocità corrispondente, la (1) e la (13) danno

$$p_0 = c - \frac{V_0^2}{2}$$

$$V_0^2 = \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t^2 + 2\sum_{t_1=1}^{t_1=\infty} \cos 2t_1\varphi \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t A_{t+t_1} ,$$

onde, posto per semplicità

$$(14) \qquad 2(c - p_0) = D^2$$

$$D^2 = \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t^2 + 2\sum_{t_1=1}^{t_1=\infty} \cos 2t_1\varphi \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t A_{t+t_1} .$$

Da questa, che deve esser verificata qualunque sia φ, se ne deducono le seguenti

$$\sum_{t=0}^{t=\infty} A_t^2 = D^2 , \quad \sum_{t=0}^{t=\infty} A_t A_{t+t_1} = 0 ,$$

e l'ultima deve esser verificata qualunque sia t_1 .

Le equazioni ottenute non possono evidentemente esser sodisfatte, se non che quando siano eguali a zero tutti gli A, meno uno solo A_q ; onde avremo

$$(15) \qquad A_q = D , \qquad A_{q+n} = 0$$

qualunque sia n, purchè differente da zero. — Per determinare l'arbitraria q, osserviamo che la (11) deve dare la portata P, che è dovuta soltanto alla componente normale al piano della fessura. Se s' indichi con z la distanza di un punto da una delle pareti alle quali è normale l'asse della fessura, e con c la distanza tra queste pareti; avremo

$$P = 2\int_0^c \int_0^b u_0 d\nu \, dz ;$$

ma

$$d\nu \, dz = b\cos\varphi \, d\varphi \, dz ,$$

e, dalla (11) ridotta colle (15), e postovi $\theta = 0$ per avere i punti della fessura,

$$u_0 = D\cos(2q+1)\varphi ;$$

quindi

$$P = Db\int_0^c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2q+1)\varphi \cos\varphi \, d\varphi \, dz$$

$$= bcD\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\cos(2q+2)\varphi + \cos 2q\varphi\right\} d\varphi .$$

Questo valore è eguale a zero per tutti i valori di q , fuori che per $q = 0$.

Ora, la portata non potendo esser nulla, perchè l' efflusso deve aver luogo, si dovrà aver necessariamente

$$(16) \qquad q = 0 .$$

La terza condizione dà la pressione p uguale a p_0 alla superficie superiore, per la quale $x = \mathrm{d}$ altezza del vaso, e (per la grandezza delle dimensioni del medesimo rispetto a b) θ talmente grande, che il quadrato di $e^{-\theta}$ risulta trascurabile, e quindi anche la velocità risultante V_d. Per lo che la (2) darà

$$p_0 = c - g\mathrm{d},$$

e eliminando tra questa e la (14) $c - p_0$, si otterrà

$$\mathrm{D}^2 = 2g\mathrm{d}. \tag{17}$$

Sostituendo i valori dati dalle (15), (16) e (17) nelle (11), (12) e (13), queste si riducono alle seguenti

$$u = \sqrt{2g\mathrm{d}}\, e^{-\theta}\cos\varphi = \sqrt{2g\mathrm{d}}\, \frac{\sqrt{(b^2-\nu^2)}}{\mu+\sqrt{(\mu^2-b^2)}} \tag{18}$$

$$v = \sqrt{2g\mathrm{d}}\, e^{-\theta}\,\mathrm{sen}\varphi = \sqrt{2g\mathrm{d}}\, \frac{\nu}{\mu+\sqrt{(\mu^2-b^2)}} \tag{19}$$

$$\mathrm{V} = \sqrt{2g\mathrm{d}}\, e^{-\theta} = \sqrt{2g\mathrm{d}}\, \frac{b}{\mu+\sqrt{(\mu^2-b^2)}}\,. \tag{20}$$

Passiamo ora a dedurre da queste le principali circostanze del movimento:

1.° La (18) ci darà la portata P, la quale come abbiamo già veduto, sarà espressa da

$$\mathrm{P} = 2bc\sqrt{2g\mathrm{d}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, \mathrm{d}\varphi = 2bc\sqrt{2g\mathrm{d}}.\frac{\pi}{4}\,.$$

Ora la quantità

$$\frac{\mathrm{P}}{2bc\sqrt{2g\mathrm{d}}} = \frac{\pi}{4} = 0,7831,$$

la quale esprime il rapporto della portata al prodotto dell'area della fessura per $\sqrt{2g\mathrm{d}}$, rappresenta quello che in Idraulica sperimentale si chiama coefficiente di efflusso. Dunque, *il coefficiente di efflusso è eguale al quarto del rapporto della circonferenza al diametro.*

I risultati ottenuti nel Gabinetto del prof. Pacinotti danno per valore medio del medesimo

0, 7635.

Le dimensioni del vaso che ha servito all'esperienze, erano

Altezza	$= 0^m$, 5836
Lunghezza	$= 0^m$, 3355
Larghezza nel senso dell'asse della fessura	$= 0^m$, 0555
Larghezza della fessura	$= 0^m$, 0013

La differenza tra il coefficiente di efflusso dato dalle mie formule, e quello ottenuto dalla esperienza, è di

0, 0016 ;

quantità ben piccola, dovuta principalmente alla adesione colle pareti della fessura delle molecole del liquido, e alla coesione di queste tra loro.

2.° La (18) e la (19) danno per $\nu = 0$

$$v = 0 \qquad u = \frac{\sqrt{2gd}}{\mu + \sqrt{(\mu^2 - b^2)}} .$$

Quindi nel piano verticale che passa per l' asse la velocità orizzontale è nulla; e le velocità verticali, a una distanza per cui b^2 sia trascurabile rispetto a μ^2, sono in ragione inversa delle distanze $\sqrt{(\mu^2 - b^2)}$ dal fondo.

3.° La (20) ci mostra che la velocità risultante è funzione soltanto di μ. Dunque *le superficie di egual velocità sono cilindri retti, che hanno per basi delle ellissi, i fuochi delle quali sono nei bordi della fessura, e giacciono in piani normali all'asse della medesima.*

4.° Se le equazioni, che rappresentano le trajettorie delle molecole, si pongono sotto la forma

$$\lambda = \text{costante} ;$$

dovrà aversi

$$\frac{d\lambda}{dx} u + \frac{d\lambda}{dy} v = 0 ,$$

la quale, trasformata in coordinate ellittiche, diviene

$$\frac{d\lambda}{d\theta}(1 + e^{-2\theta} \cos 2\varphi) + \frac{d\lambda}{d\varphi} e^{-2\theta} \operatorname{sen} 2\varphi = 0 ,$$

che ha per integrale

$$\lambda = F(2\varphi + e^{-2\theta}\text{sen}2\varphi) ,$$

indicando con F una funzione arbitraria.

Le equazioni delle trajettorie saranno dunque tutte comprese nella seguente

$$2\varphi + e^{-2\theta}\text{sen}2\varphi = \text{costante} .$$

Ora quanto più aumenta il valore di θ, tanto più diminuisce il secondo termine del primo membro, e la equazione si approssima a quella di una Iperbola coordinata

$$2\varphi = \text{costante} ,$$

la quale poi contemporaneamente si approssima a quella del suo asintoto rettilineo. Dunque *le traiettorie delle molecole in distanza dal fondo (e tanto minore quanto più piccolo è b) possono riguardarsi come rette convergenti all'asse della fessura e perpendicolari al medesimo.* Ciò che è pienamente confermato dalle esperienze mentovate di sopra.

5.° Se si dice α l' angolo che la tangente alla trajettoria fa coll'asse delle x, si ha

$$\text{tang}\alpha = -\frac{d\lambda}{dx} : \frac{d\lambda}{dy} = \frac{v}{u} = \text{tang}\varphi ;$$

e φ è l'angolo dell' asintoto rettilineo della Iperbola coordinata coll'asse delle x. Dunque, *in qualunque punto della massa liquida, il moto è nella direzione dell' asintoto della Iperbola coordinata, che passa per quello.*

6.° Derivando nuovamente la equazione ottenuta, si ha

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\text{sen}h.\theta\ \text{sen}\varphi}{b\cos^2\varphi(\cos^2 h.\theta - \text{sen}^2\varphi)} ,$$

onde avendo la derivata seconda di y lo stesso segno di senφ, e quindi della y medesima, *le trajettorie volgono la loro convessità verso l'asse verticale delle x in ogni loro punto.*

Le trajettorie e le velocità delle molecole nella vena esterna si otterrebbero col cangiar soltanto nelle formule ottenute, il segno a sen$h.\ \theta$; ma non possono aversi corrispondenti alla realtà, perchè non abbiamo soddisfatto la condizione, che su

tutta la superficie esterna della vena abbia luogo la pressione costante p_0, e perchè in quella, a piccolissima distanza dall'apertura, non esistendo più la continuità, come è noto, la equazione (1), e quindi tutte le nostre formule che da quella dipendono, non possono essere verificate. Ma l'andamento del liquido, dopo che è uscito del vaso, non influisce su quello che egli ha avuto già nell'interno, e quindi tutto ciò, che abbiamo sopra dedotto non rimane meno legittimamente stabilito per questa indeterminatezza.

AGGIUNTA

La trasformazione della equazione della continuità in coordinate ellittiche, della quale mi son valuto nella determinazione analitica dell'efflusso per una fessura, ha il vantaggio di non cangiar forma alla equazione medesima. Questa proprietà non appartiene però esclusivamente alle coordinate ellittiche, ma è comune a un numero infinito di sistemi di coordinate, le quali sono parametri di curve ortogonali e omofocali. Onde, con opportuna scelta di queste, si potranno trattare più casi, tra loro differentissimi, con una sola integrazione; e molte volte le formule dedotte in un caso si trasporteranno ad un altro, mutando soltanto il significato delle variabili. Il teorema, che contiene la generalizzazione della mentovata trasformazione, è il seguente:

Se θ e φ siano funzioni di x e di y definite dal sistema di equazioni

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{z_1^2}{b^2\cos^2 h.(\theta+m)} + \dfrac{z_2^2}{b^2\operatorname{sen}^2 h.(\theta+m)} = 1, \\[2ex] \dfrac{z_1^2}{b^2\operatorname{sen}^2(\varphi+n)} - \dfrac{z_2^2}{b^2\cos^2(\varphi+n)} = 1, \end{cases}$$

$$(2)\quad \frac{dz_1^2}{dx^2} + \frac{dz_1^2}{dy^2} = \frac{dz_2^2}{dx^2} + \frac{dz_2^2}{dy^2}, \quad \frac{dz_1}{dx}\frac{dz_2}{dx} + \frac{dz_1}{dy}\frac{dz_2}{dy} = 0,$$

la trasformata in θ e φ della

$$(3) \qquad \frac{d^2k}{dx^2} + \frac{d^2k}{dy^2} = 0$$

è

$$(4) \qquad \frac{d^2k}{d\theta^2} + \frac{d^2k}{d\varphi^2} = 0 .$$

Kummer, nel vol. 35 del giornale di Crelle, ha dimostrato che le (1) e (2) rappresentano infiniti sistemi di curve ortogonali e omofocali. Onde, la (3) trasformata in funzione dei parametri θ e φ, darà, come è noto,

$$(5) \qquad \frac{d\,\frac{H}{H'}\,\frac{dk}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d\,\frac{H'}{H}\,\frac{dk}{d\varphi}}{d\varphi} = 0 ;$$

dove

$$H^2 = \frac{d\theta^2}{dx^2} + \frac{d\theta^2}{dy^2} , \qquad H'^2 = \frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} .$$

Dalle (1) ricavando i valori delle derivate parziali di θ e di φ, quadrandoli e sommandoli respettivamante, riducendo queste somme colle (2), e confrontandole, si ottiene

$$H = H' .$$

Dunque la (5) si riduce alla (4), come volevamo dimostrare.

Corollario di questo teorema è la seguente proposizione:

Se il sistema di equazioni, che determina θ e φ in funzione di λ e ρ, è

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{z_1^2}{b^2\cos^2 h.(\theta + m)} + \dfrac{z_2^2}{b^2\operatorname{sen}^2 h.(\theta + m)} = 1 , \\[2ex] \dfrac{z_1^2}{b^2\operatorname{sen}^2(\varphi + n)} - \dfrac{z_2^2}{b^2\cos^2(\varphi + n)} = 1 , \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_1^2}{d\rho^2} + \operatorname{sen}^2\lambda \dfrac{dz_1^2}{d\lambda^2} = \dfrac{dz_2^2}{d\rho^2} + \operatorname{sen}^2\lambda \dfrac{dz_2^2}{d\lambda^2}, \\ \dfrac{dz_1}{d\rho}\dfrac{dz_2}{d\rho} + \dfrac{dz_1}{d\lambda}\dfrac{dz_2}{d\lambda}\operatorname{sen}^2\lambda = 0, \end{cases}$$

trasformando in θ e φ la

$$(8)\qquad \frac{d\operatorname{sen}\lambda \dfrac{dk}{d\lambda}}{\operatorname{sen}\lambda\, d\lambda} + \frac{d^2k}{d\rho^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\lambda} = 0,$$

si ottiene

$$(9)\qquad \frac{d^2k}{d\theta^2} + \frac{d^2k}{d\varphi^2} = 0.$$

Infatti, se si pone $\chi = \log.\text{tang.}\ \frac{1}{2}\lambda$, le (6), (7) e (8) si cangiano respettivamente nelle (1), (2) e (3), colla unica differenza di χ e ρ in luogo di x e di y.

Se λ e ρ sono le coordinate polari sferiche, cioè λ l'angolo di collatitudine, e ρ quello di longitudine, la (8) è la equazione della continuità, nella quale si é supposto costante il raggio vettore, e le (1) e (2) rappresentano infiniti sistemi di curve sferiche ortogonali.

Ora, ecco due casi di efflusso per piccole aperture, nei quali si determina il movimento collo stesso calcolo che io ho instituito per la fessura.

Caso I. Siano le pareti, tra le quali si muove il liquido, un piano orizzontale, un piano verticale, e una superficie cilindrica, che abbia per asse la intersezione delle due pareti piane. Il piano orizzontale sia la faccia superiore. Una piccolissima interruzione, di larghezza e^{-b}, d'onde avrà luogo l'efflusso, che in questo caso sarà un getto di basso in alto, sia tra la faccia cilindrica e la parete orizzontale. Un altro ne sia presso l'asse, dove insista una colonna di liquido, tenuta costantemente all'altezza d.

Le condizioni, che debbon servire a determinare le funzioni

arbitrarie dell'integrale, saranno : 1.° che, la velocità $u = \frac{dk}{dr}$, nella direzione del raggio della sezione retta della parete cilindrica, sia nulla per $r = 1$ qualunque sia l'angolo polare ψ; prendendo per unità il raggio della sezione medesima : 2.° che la pressione p sia uguale alla pressione p_0 dell' atmosfera per $\psi = 0$ con r compreso tra 1 e $1 - e^{-b}$: 3.° che p sia uguale a $p_0 + gd$ per r piccolissimo.

Poniamo nelle (1) $m=0$ e $n=0$; e per integrali delle (2)

$$z_1 = \log r\,, \quad z_2 = \psi\,,$$

e serviamoci delle coordinate θ e φ che risultano dal sistema delle equazioni (1) e (2) così ridotto. In conseguenza del teorema sopra enunciato, la equazione della continuità sarà la (4), e le condizioni diverranno le due seguenti :

1.° Che $u = \frac{dk}{d(\log r)} \frac{1}{r}$ sia uguale a zero, per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ con θ qualunque :

2.° Che $V^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{dk^2}{d\psi^2} + \frac{dk^2}{d(\log r)^2}\right)$ sia eguale a $2gd$ per $\theta = 0$ con φ qualunque.

Ora, a cagione della piccolezza dell'apertura, potendesi riguardare r costante nell' intervallo compreso tra $r = 1$ e $r = 1 - e^{-b}$, la equazione da integrarsi e quelle di condizione non differiscono da quelle che ho già trattato nel caso della fessura; quindi le formule dedotte in quel caso varranno anche per questo, e avremo

$$u = \frac{\sqrt{2gd}}{r}\, e^{-\theta} \cos\varphi\,, \quad v = \frac{\sqrt{2gd}}{r}\, e^{-\theta} \operatorname{sen}\varphi\,,$$

$$V = \frac{\sqrt{2gd}}{r}\, e^{-\theta}\,.$$

Dalle quali si ricaveranno in un modo affatto uguale tutte le circostanze del movimento.

Caso II. Le pareti, tra le quali scorre il liquido, siano un piano orizzontale, uno verticale e due superficie sferiche col centro comune sulla intersezione delle pareti piane, e che abbiano i raggi sì poco differenti, che si possa trascurare il movimento nella direzione dei medesimi. Nella parete inferiore, che supporremo essere il piano orizzontale, sia praticata un apertura terminata da due raggi, che facciano angoli piccolissimi, e uguali a b, col raggio normale alla intersezione delle pareti piane, e dagli archi di circolo massimo che i raggi intercettano sulle due sfere. Questo quadrilatero mistilineo sarà l'orifizio, onde avrà luogo l'efflusso. Un'altra apertura sia sulla sfera maggiore, presso l' intersezione di questa col suo diametro verticale, e ivi insista una colonna di liquido, che abbia la superficie libera a una distanza d dalla parete orizzontale.

In questo caso le condizioni alle quali deve esser soggetto il movimento, sono: 1.° che la velocità $u = \frac{dk}{d\lambda}$ nella direzione di λ sia nulla per $\lambda = \frac{\pi}{2}$ con ρ compreso tra $\pm b$ e $\pm \infty$; riguardando il quadrante incomparabilmente grande rispetto a b: 2.° che p sia uguale a p_0 per $\lambda = \frac{\pi}{2}$ con ρ compreso tra $\pm b$ e zero: 3.° che p sia uguale a $p_0 + g(d-1)$ per valori piccolissimi di λ; prendendo per unità il raggio della sfera maggiore.

Prendiamo nella (1) $m=0$ e $n=0$, per integrali della (2)

$$z_1 = \chi = \log.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\lambda, \quad z_2 = \rho,$$

per coordinate θ e φ, dati dalle equazioni così ridotte; per il corollario del nostro teorema, avremo che la equazione della continuità sarà la (9), e le condizioni diverranno le seguenti:

1.° Che $u = \frac{dk}{d\chi}\frac{1}{\text{sen}\lambda}$ sia nulla per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ con θ qua-

lunque :

2.° Che $V^2 = \frac{1}{\text{sen}^2\lambda}\left(\frac{dk^2}{d\chi^2} + \frac{dk^2}{d\rho^2}\right)$ sia uguale a $2gd$, per $\theta = 0$ con φ qualunque; valori che danno $\text{sen}\lambda = 1$. Dunque avremo tutte le solite equazioni da sodisfare, e quindi i medesimi risultati, cioè

$$u = \frac{\sqrt{2gd}}{\text{sen}\lambda}\, e^{-\theta} \cos\varphi\,, \quad v = \frac{\sqrt{2gd}}{\text{sen}\lambda}\, e^{-\theta}\, \text{sen}\varphi\,,$$

$$V = \frac{\sqrt{2gd}}{\text{sen}\lambda}\, e^{-\theta}\,;$$

onde, anche in questo caso, il movimento può riguardarsi completamente determinato.

SULLE CONDIZIONI AFFINCHÈ LA $x^2 + y^2 = z^2$ ABBIA LUOGO PER NUMERI FRA LORO PRIMI O NON PRIMI.

NOTA

DEL PROF. PAOLO VOLPICELLI

Se la $x^2 + y^2 = z^2$ sia solubile in interi, dovrà essere

$$z = 2^\mu\, S\, h_1^\alpha\, h_2^\beta\, h_3^\gamma \ldots h_k^\tau\,,$$

essendo $h_1, h_2 \ldots h_k$ fattori primi ed ineguali, ognuno della forma $4n + 1$; S un prodotto di fattori primi aventi la forma $4n + 3$; inoltre $\mu, \alpha, \beta, \gamma \ldots \tau$ interi, dei quali μ sarà nullo quando z sia impari. Sarà poi $S = 1$ se non vi sieno fattori primi della forma $4n + 3$. Quante volte la z sia della forma prescritta, non solo z^2 si potrà spezzare in due quadrati; ma eziandio ciò saprà eseguirsi direttamente, senza verun tentativo, come già ho dimostrato (*). Intenderemo 2^μ compreso in S.

(*) Raccolta di lettere ec. Roma 1849 anno 5, pag. 263 e seg. §§. VI, X, XI, XII.

I casi che dobbiamo esaminare, e che formano il primario scopo di questa nota sono i tre seguenti :

1.° Pongasi che abbia luogo la proposta per numeri primi fra loro. In questo caso la z dovrà essere un primo della forma $4n+1$, e si avranno le

$$x = a_1^2 - b_1^2, \quad y = 2a_1 b_1, \quad z = a_1^2 + b_1^2$$

per l' unica soluzione numerica del caso medesimo. I valori a_1, b_1 si determineranno direttamente senza tentativi, pel teorema di Legendre sullo spezzamento dei numeri primi in due quadrati, da me dichiarato con esempi (*).

2.° Pongasi che abbia luogo la proposta per numeri non primi fra loro. In questo caso la z dovrà, oltre ai fattori, ognuno della forma $4n+1$, ammettere fra i medesimi anche la S, e si avranno le seguenti formule solutive

$$x = S(A_\alpha A_\beta \mp B_\alpha B_\beta), \quad y = S(A_\alpha B_\beta \pm B_\alpha A_\beta),$$

$$x = S(A_\alpha^2 - B_\alpha^2), \quad y = 2S A_\alpha B_\alpha,$$

essendo

$$z = S(A_1^2 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2 = \ldots = A_\gamma^2 + B_\gamma^2).$$

3.° Pongasi che abbia luogo la proposta per numeri parte primi e parte non primi fra loro. In questo caso la z non dovrà contenere la S fra'suoi fattori, e le formole solutive saranno le precedenti, prive però del fattore comune S, di cui le prime due furono indicate con (k_3) nella precedente mia nota (**). Quanto al numero totale delle soluzioni pel 2.° e 3.° caso, provveggono generalmente le formole date a questo fine dal celebre Gauss; ma senza dimostrazione (***). Quanto poi a

(*). Raccolta di lettere, ec. Roma 1849. anno 5. p. 397 e seg.

(**) Pag. 369 di questo giornale.

(***) Recherches arithmétiques p. 157. Paris 1807.

determinare le A_α, B_α, A_β, B_β nei due casi medesimi, si applicherà utilmente il metodo generale da me assegnato ad ottenere lo spezzamento dei numeri in due quadrati (*). L'enunciato di ognuno dei tre precedenti casi, ha luogo come nel diretto, così pure nell'inverso.

Dopo tutto ciò è chiaro che, ritenendo essere la proposta generalmente risoluta solo dalle formole

$$(k_4)\quad \begin{cases} x = A_\alpha^2 - B_\alpha^2, \quad y = 2A_\alpha B_\alpha, \quad z = A_\alpha^2 + B_\alpha^2, \\ \text{pel primo caso; e solo dalle} \\ x = S(A_\alpha^2 - B_\alpha^2),\ y = 2SA_\alpha B_\alpha,\ z = S(A_\alpha^2 + B_\alpha^2) \end{cases}$$

pel secondo, come sembra essersi ritenuto sino ad ora (**), certo si dovrebbe anche ritenere che dovesse aver luogo solamente, o per numeri primi fra loro, o per numeri non primi fra loro, senza riconoscere il 3.° caso da noi contemplato, e nè anche le soluzioni che provengono dalle due prime formole del 2.° In fatti le tre prime (k_4) forniscono soluzioni di numeri tutti due a due primi fra loro; cioè quelle che, secondo la classificazione da noi ravvisata (***), costituiscono *l'ultima specie* delle soluzioni appartenenti alla proposta; mentre le ultime tre (k_4) forniscono soluzioni di numeri tutti due a due non primi fra loro. Quindi non essendosi fino ad ora prese in considerazione le (k_3), si è riguardata sempre la proposta come generalmente risoluta solo dalle (k_4), ritenendo che la medesima potesse aver luogo solamente per numeri o primi, o non primi fra loro.

Il ragionamento per tanto che fa il sig. Liouville (****), tutto è basato (*****) sulle formule (k_4), e per nulla sopra le

(*) Raccolta di lettere ec. Roma 1849 anno 5. pag. 263 e seg.

(**) Comptes rendus T. 28. p. 686 e 755.

(***) Veggasi l'estratto di una mia nata inserito in questi annali p. 369 e seg.

(****) Comptes rendus T. 28. p. 687.

(*****) Annali di scienze ec. 1850. p. 161. (k_5). Giornale arcadico T. CXIX. p. 42. (k_5).

$$(k_3)\quad \begin{cases} x = A_\alpha A_\beta \mp B_\alpha B_\beta, \quad y = A_\alpha B_\beta \pm B_\alpha A_\beta, \\ z = A_1^2 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2 = \ldots = A_\nu^2 + B_\nu^2; \end{cases}$$

nè sopra queste medesime ciascuna moltiplicata per S; le quali formole tutte insieme considerate, risolvono generalmente la proposta, e sembrami averle io pel primo stabilite per la soluzione medesima (*). Dunque nel citato ragionamento, nè si vuole, nè si può comprendere il 3.° caso da noi esaminato; nè quelle soluzioni che appartengano alle prime due formole del 2.° Perciò il citato distintissimo geometra intende che la proposta abbia luogo per numeri o primi, o non primi fra loro; questi essendo i due soli casi abbracciati dalle (k_4), le quali servono di base a quel suo ragionamento, in cui di necessità si trova escluso il 3.° dei casi, che in principio esaminammo. Quindi la proposizione o conseguenza, che il sig. Liouville deduce, per la quale viene a dire che = la condizione necessaria e sufciente, cui deve soddisfare un dato numero z, perchè la proposta *abbia luogo* in numeri primi fra loro, consiste nell' essere z un numero primo della forma $4n+1$, od un *prodotto* di primi della stessa forma = sarebbe conseguenza vera, se le sole k_4 sciogliessero generalmente la proposta. Ma questa generale soluzione viene data dalle (k_3), moltiplicate o no per S, alle quali fino ad ora non si ebbe riguardo, e di cui sono le (k_4) un particolar caso; adunque la conseguenza medesima non è generalmente vera. Ed in fatti benchè la z sia un *prodotto* della forma voluta in quella conseguenza, pure la proposta non ha luogo in numeri primi fra loro; cioè tutte le classi delle sue soluzioni saranno composte di numeri due a due non primi fra loro, tranne l'ultima classe, che appartiene alle formole (k_4). I fattori comuni cui si riferisce, quando non si considerano le (k_3), sono quelli soltanto che procedono dalla

(*) Raccolta scientifica 1849 Anno 5. p. 407, e 408. - Giornale arcadico T. CXIX. p. 28. (k_3). - Annali di scienze anno 1850, p. 159 (k_3). Idem. pag. 369.

presenza della S nelle tre ultime (k_4); ma oltre questi ve ne sono altri, che provengono dalle (k_3) non moltiplicate per S, e che debbono considerarsi nella conseguenza stessa, la quale senza ciò riesce in parte non vera. Inoltre avvertiamo che la frase: *pour que l'équation* $x^2 + y^2 = z^2$ *ait lieu en nombres premiers entre eux*, adoperata in quella conseguenza, è tale che senza più esclude ogni soluzione a numeri non primi; lo che viene maggiormente in evidenza, quando riflettasi essere la medesima frase fondata sulle (k_4) esclusivamente.

Dunque la condizione necessaria e sufficiente affinchè la proposta abbia luogo in numeri primi fra loro, consiste nel 1.° caso dei tre in principio espressi, qual caso però trovasi compreso nella conseguenza che abbiamo giudicato come non generalmente vera.

Forse questa mia breve disamina, che potrebbe ricevere maggiore sviluppo, fatta solo per la ricerca del vero, mi otterrà che l'ottimo sig. prof. Bellavitis di Padova, meco più non dissenta (*) riguardo alla conseguenza del geometra francese che abbiamo qui analizzata. Ma se non avvenisse ciò per valevoli ragioni, queste sarebbero da me prontamente adottate.

Roma ai 21 ottobre 1850

(*) Si legga la nota posta in calce alla p. 425 di questo volume.

SOPRA UN ARTICOLO DELL' *INSTITUT* RELATIVO ALLE STELLE CADENTI

LETTERA

DEL P. ALESSANDRO SERPIERI
delle Scuole Pie

AL COMPILATORE

Un articolo sulle stelle cadenti, comunicato all' Accademia di Francia da M. Lowe nella seduta del 4 marzo 1850, e pubblicato nel giornale *L'Institut* n. 844 pag. 79, ha richiamata ultimamente tutta la mia attenzione per l'importanza dei pensieri che vi sono espressi, e per alcune idee fondamentali che io aveva già esternate e pubblicate sulla fine del 1847, due anni e due mesi innanzi, negli annali di Majocchi fasc. 82-83, num. X-XI, T. XXVIII. — Ora dunque, mentre vado lieto e onorato di dividere le mie opinioni col chiarissimo M. Lowe, e col ch. Sir Tohn. Lubboc citato in detto articolo, mi faccio un pregio e un dovere di presentare a voi, Sig. Professore, e al pubblico la seguente discussione in proposito.

L'articolo che pubblicai negli Annali di Majocchi riguardava le osservazioni da me istituite con alcuni bravi compagni nelle notti del 9 e 10 agosto 1847. Dopo avere indicate le direzioni di 400 stelle cadenti osservate, io passava a notare alcuni fatti particolari, pochi di numero, ma tali forse che per essi sia applicabile quella verissima sentenza di Humboldt nel Cosmos: « Spesse volte una sola di queste fuggienti meteore basterà a far nascere delle serie meditazioni ». Ne riporto quì due principali, che sono il 3.° e il 6.° di quel mio articolo citato:

1.° La sera del 9 poco prima delle ore 10 e un quarto, una stella partita in vicinanza della Lira e diretta verso Nord, scendeva per una linea serpeggiante, mostrandosi più luminosa nei gomiti dalla parte di N. O. Quelle sinuosità furono assai larghe e sensibilissime. — Osservai nn fenomeno simile nel 1843 alla specola di Firenze.

2.° Nella medesima sera, poco dopo le 12 e tre quarti, vidi muoversi dall'Acquario verso Sud una stella di poca luce, e sempre di grossezza quasi uguale, la quale si spense ad un tratto. E un istante appresso ne vidi un'altra più bassa, nella stessa direzione della prima, della stessa luce e grossezza; onde mi parve la medesima di prima oscuratasi per un'tratto di circa 12 o 15 gradi.

Internandomi poi nella questione sulla natura ed origine di questi fenomeni, io formulava così la mia opinione: « io penso che le stelle cadenti, sebbene tutte simili nelle loro apparenze e figura, appartengono alcune alla classe delle meteore luminose prodotte da elettricismo o da altro, e alcune alla classe dei corpi o frammenti planetarj, quali traversanti l'atmosfera, e quali al di sopra di essa. » E più oltre io aggiungeva, che quei frammenti planetarj che passano al di sopra della nostra atmosfera io li credeva luminosi per la sola riflessione della luce solare: comprendendo in questo numero quelle stelle soltanto che hanno luce e grossezza quasi costante, e son prive di coda; mentre per le altre, codate, crescenti e terminanti ad un tratto, io poneva come necessario l'attrito atmosferico e l'accensione della materia infiammabile portata dalla stella medesima. Alla quale ignizione io voleva di più accordare in qualche caso un potere fortissimo, da spezzare ancora la stella; per spiegare così un fatto da me osservato in Firenze, di una stella che infuocatasi in modo straordinario, sembrò dividersi in due che sul momento disparvero.

Da tutto ciò risultava evidentemente che io divideva le stelle cadenti in tre classi distinte.

I piccoli asteroidi planetarj, che attraversano la nostra atmosfera, e in essa si accendono, o sia per l'attrito, come allora diceva, o sia per qualunque altra causa; giudicando appartenere in generale a questa classe le stelle codate e crescenti.

II. I medesimi asteroidi planetarj, dei quali l'orbita non incontra l'inviluppo atmosferico: pensando brillare questi di

luce riflessa, e distinguersi sempre dagli altri, per non essere nè forniti di coda, nè di grossezza troppo variabile.

III. Le meteore luminose puramente atmosferiche, fra le quali, per esempio, io riponeva le due stelle, di sopra citate, che corsero per linee sinuose, e serpeggianti, oltre in generale ad altre che non saprei come determinare.

Chi esamina ora la classificazione, che sono per esporre. immaginata da M. Lowe, vedrà che in sostanza le nostre opinioni coincidono quasi esattamente. Egli immagina infatti le tre classi seguenti:

Una 1.ª classe, di quelle che lasciano dietro a se una traccia luminosa. « E queste, egli dice, brillano probabilmente per una luce inerente (lumière inhèrente), perchè altrimenti sarebbe difficile spiegare le traccie luminose, che durano più secondi, e in qualche caso anche dei minuti, dopo che la meteora è sparita. »

Una 2.ª classe, delle stelle che non lasciano alcuna traccia luminosa: « e queste, dice, possono brillare per la luce riflessa, come l'ha indicato Sir Tohn Lubboc (Les secondes peuvent briller par la lumière réfléchie, ainsi que l'a indiqué ec.) »

Una 3.ª classe, di quelle che si presentano come corpi luminosi a dischi definiti. « E queste, egli dice, sono probabilmente atmosferiche, atteso che si muovono per vie divergenti (par des voies divergentes), hanno delle dimensioni variabili e cangiano spesso di colore.

Ognuno vede che M. Lowe ed io, combiniamo esattamente nei caratteri fondamentali di queste tre classi, come sono le traccie luminose lasciate dalle prime, la luce riflessa delle seconde, e l' origine atmosferica delle terze. In quanto al resto io dirò solo, che avendo M. Lowe classificate principalmente queste meteore pei loro caratteri apparenti, mi par facilissimo che qualche volta possa nascere errore, prendendo le stelle di una classe la figura di quelle di un'altra.

Un'altra osservazione di molta importanza si racchiude nella Nota di M. Lowe. Egli ha notato che spesso « una meteora ne seguirebbe un'altra nella medesima via .... (un météore en

suivait un autre dans la même voie . . . ,), e che quindi si potrebbe supporre che questi due corpi avessero dei rapporti fra loro. » — In quel mio articolo citato io accennava un fatto simile, e diceva : « trovo non esser raro che due, tre o anche quattro stelle appariscano subito una dopo l'altra nel medesimo luogo. » — E quì ho il piacere di annunziare che anche nell'agosto di quest'anno 1850 ho notato più volte il medesimo fenomeno, attendendo a queste osservazioni coll' egregio giovane sig. Andrea Zoli di Forlì. E ardisco ancora di formare un'ipotesi sui rapporti, che, come dice M. Lowe, potrebbero esistere fra tali corpi. = Non potrebbe supporsi che fossero tutti lanciati da un sol bolido passato per quella parte? = Questa ipotesi mi viene suggerita dall'osservazione che qualche volta ho fatta, che queste stelle piccolissime, apparse quasi contemporaneamente in un piccolo spazio di cielo, parevano divergere e venire da un centro solo. E in appoggio della medesima io leggo nel Cosmos: « Quando questi corpi (stelle cadenti ; bolidi e pietre meteoriche) vengono ad incontrare la terra, divengono luminosi ai confini della nostra atmosfera, e spesso allora si dividono in frammenti. »

Infine annunzia M. Lowe il fatto particolare di una stella cadente osservata nel passato agosto, la quale appariva come due volte una stella di prima grandezza, e dopo essersi mossa lentamente, lasciando dietro a se numerosi getti di luce, improvvisamente sparì : e ricomparve poi, dopo circa un secondo, più lontana di press'a poco un grado e mezzo : ma non più così bella e brillante come prima. Egli così ragiona su questo fatto: « La stella, fattasi per poco invisibile, ha seguitato a correre la medesima via . . . Si può spiegare questa disparizione, supponendo che la meteora brillasse di una luce non propria d'un éclat emprunté), e che sia passata nell' ombra di qualche corpo solido. Sir Thon Lubboc crede ch' ella abbia attraversata l'ombra della terra (croit qu'il a traversé l'ombre de la Terre).»

Ora per amore del vero io debbo far conoscere che questa idea di M. Lowe, e di Sir Tohn Lubboc, cioè che le stelle cadenti possono qualche volta oscurarsi e come spegnersi alla vi-

sta per qualche istante, a motivo forse del loro passaggio nell' ombra della terra; questa idea fu già da me annunziata nell' articolo più volte citato. Nel quale sono infatti queste precise parole : « Le stelle cadenti non potrebbero qualche volta offrire un vero ecclisse ? Conoscendo la loro altezza e posizione e l'istante della loro caduta, non dovremmo trovare per mezzo del calcolo che la sparizione cominciò precisamente all'incontro del cono ombroso della terra ? Non dovrebbe qualche volta osservarsi tanto l'ingresso che l'egresso dall' ombra del nostro pianeta ? Il fatto espresso al numero sesto (nel presente articolo è il 2.°) non sembra un vero ecclisse ? La punta del cono ombroso cadeva presso a poco nella parte ove la stella si oscurò, e questa di grandezza e luce quasi uniforme, e priva affatto di coda, rappresentava benissimo una illuminazione puramente solare. » — Vorrei bene che molti fatti si fossero presentati simili al 2.° riportato di sopra, e che il fenomeno osservato da M. Lowe potesse con vera probabilità spiegarsi come crede il Sig. Lubboc, chè allora sarebbe, in parte almeno, fuor di questione un punto tanto controverso nel problema delle stelle cadenti, il modo cioè di loro illuminazione : per la quale il celebre Poisson giungeva perfino ad immaginare una seconda e superiore atmosfera, di fluido elettrico allo stato neutro. Ma io non so che tali fatti siano frequenti : per la qual cosa mi conviene ancora confessare il grande mistero di questi fenomeni. Non ostante io non lascio di ritenere come probabili le idee che espressi in via d'ipotesi in quell' articolo degli Annali di Majocchi; ed è perciò che mi sono interessato di porle a confronto con le recenti dei sigg. Lowe e Lubboc.

Vi ripeto, chiarissimo sig. Professore e Direttore, che sono lieto di dividere con quei dotti stranieri le mie opinioni; e solo avrei desiderato che il Sig. Lowe accennando allo « stato attuale delle nostre conoscenze su questi curiosi fenomeni (dans l'état actuel de nos conaissances sur ces phénoménes curieux)» avesse pur fatta una parola della mia Memoria, la quale, come ognuno può aver giudicato, aveva, se non altro, la più stretta relazione con ciò ch'ei pubblicava. Imperciocchè ben voglio cre-

dere che anche i dotti più lontani abbiano pur sempre degnato di qualche sguardo questi Annali scientifici della nostra Italia.

Gradite, Sig. Professore, l'espressione sincera della mia stima e riconoscenza, e accordatemi sempre l'onore di essere

Urbino 15 ottobre 1850.

Vro Dmo Servo
ALESSANDRO SERPIERI
delle Scuole Pie.

ESTRATTO DI UNA LETTERA DEL SIG. G. TAYLOR AL COMPILATORE.

Liverpool 18 settembre 1850.

La settimana scorsa ci arrivò la felice novella della scoperta d'una nuova cometa e d'un nuovo pianeta. Il nuovo Pianeta fornisce intero la dozzina pel sistema dei piccoli pianeti tra Marte e Giove. — Ecco le osservazioni della nuova Cometa fatte all'osservatorio di Liverpool.

1850	Tempo med. di Greenwich	AR.	P.D.N	D.N
13 Sett.	$12^h\ 43^m\ 57^s$	$7^h\ 1^m\ 41^s,8$	$43^\circ\ 1'\ 2''$ =	$46^\circ\ 58'\ 58''$
» »	13 24 15	7 2 6,1	43 4 2	46 55 39

La cometa ha una debole nebulosità con un diametro di 1′ 48″. Il nuovo pianeta fu scoperto dal Sig. I. R. Hind all' osservatorio del Regents Tack in Londra il 13 corrente; esso ha l'apparenza di una stella di 9ª grandezza, ed ha una luce pallida azzurrognola.

1850	Tempo med. di Greenwich	AR	N.D
13 Sett.	$11^h\ 20^m\ 36^s$	$23^h\ 44^m\ 45^s,08$	$14^\circ\ 6'\ 4'',9$
14 »	8 28 24	23 44 2,56	13 59 29,3

Quest' è il terzo di cotesti pianetini scoperti dal sig. Hind, e gli diede il nome di *Vittoria*.

SULLE PROPRIETA' GENERALI DE'CORPI
DISCORSO
DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS
letto in una accademica adunanza nell'anno 1845.

Tutti i fisici si accordano nel cominciare i loro trattati dallo studio delle proprietà generali dei corpi, ma non altrettanto si accordano nel numero e nell' importanza di tali proprietà; alcuni distinguono le essenziali e necessarie dalle contingenti e quasi direbbesi accidentali, e fra le prime due sono riguardate come costituenti la definizione dei corpi. Alcuni annoverano quattro sole proprietà generali, altri ne contano cinque, altri sette, altri molto più le suddividono ; sicchè raccogliendo quanto è detto da vari fisici si potrebbe formare una non piccola lista delle proprietà generali dei corpi; e per esem. pio, separandole in gruppi, potremo annoverare presso l'estensione la Figurabilità e la Divisibilità, presso l'impenetrabilità e la Porosità porremo la Coercibilità, la Condensabilità, la Dilatabilità, la Compressibilità, l'Elasticità , l'Espansibilità ; alla Mobilità si associa l'Inerzia, l'Attrazione si divide in Gravità, Attrazione molecolare ed Affinità ; ed alcuno considerò come proprietà generali anche i loro effetti, Solidità, Fluidità, Cristallizzabilità; che se anche l'Adesione e la Coesione non furono elevate al grado di proprietà generali , forse ne furono cagione i loro nomi che mal si prestano alla desinenza comune alle altre voci analoghe.

Tanto numero di proprietà generali a tutti i corpi dovrebbe destare non lieve compiacenza facendo sperare di aver veduto ben addentro nella natura della materia, se non che bisogna confessare che i fisici moderni anzichè avere scoperte nuove proprieta generali sogliono annoverarne minor numero di quello che facessero i fisici antichi, sicchè nasce il timore che le proprietà abbandonate, e fors'anche alcune delle con-

servate non abbiano quella importanza che a prima giunta sembrano presentare.

In questo argomento che parmi degno d'interesse, ma che confesso richiedere molto maggiore studio di quello che io seppi applicarvi, permettetemi, chiarissimi e dotti signori, di brevemente intrattenervi.

L'impenetrabilità è una delle due proprietà che sogliansi considerare come più assolutamente essenziali ai corpi, ed alcuni credono poter asserire che se la materia non fosse impenetrabile, e perciò potesse diminuirsene l'Estensione, questa Estensione non sarebbe più necessariamente collegata coll' essenza della materia come colla definizione dei corpi vuole stabilirsi: se non che siccome la Fisica dee trovare i suoi principj fondamentali nella esperienza e non nel ragionamento, così cogli esperimenti si deve indagare se veramente i corpi sieno impenetrabili. Un sasso che cade dentro l' acqua, un chiodo che penetra in un legno, sembrerebbero indicare che i corpi fossero penetrabili, se non che giustamente si osserva che le varie parti di un corpo possono muoversi separatamente, e che cangiare di luogo non è già diminuire di volume: quindi le accennate esperienze non si oppongono alla impenetrabilità dei corpi. Ma con forte compressione un liquido si riduce ad occupare uno spazio sensibilmente minore, ma l'acqua quasi sempre col raffreddarla, e talvolta anzi col riscaldarla diminuisce di volume; ma l'aria occupa o piccolo od estesissimo spazio secondo la forza che tutto intorno la comprime. Dove è dunque l'invariabilità di estensione dei corpi, dove l'insuperabile resistenza che possa dirsi impenetrabilità? — Se si rispondesse che oltre l' Impenetrabilità sono proprietà generali dei corpi la Compressibilità, la Condensabilità, e l'Espansibilità si verrebbe a negare con tre parole quello che con una si aveva asserito; perciò onde accordare insieme l' Impenetrabilità e la Compressibilità si ricorre alla Porosità; si ammette cioè che tutti i corpi abbenchè apparentemente composti di materia tutta unita e continua pure abbiamo grandissima quantità di pori e d'interstizj di vario ordine o vuoti o contenenti tutt'altra ma-

teria da quella che sembra costituire tutto intero il corpo: sicchè in fatto quella asserita impenetrabilità viene a relegarsi ad una materia senza pari che non cadde mai sotto i sensi; ed i corpi quali realmente si trovano in natura non sono impenetrabili, ma per lo contrario sono compressibili, espansibili, ec. Parrebbemi adunque che l'impenetrabilità da alcuni creduta essenziale e necessaria proprietà della materia fosse da lasciarsi alla Filosofia speculativa e togliersi affatto dalla Fisica sperimentale, chè falso sarebbe il dire i corpi impenetrabili mentre invece tutti si presentano e penetrabili e compressibili.

Pare che i Fisici abbiano pensato alla Porosità dei corpi per salvare l'Impenetrabilità della materia da quella continua mentita che essa dovea soffrire dai fatti. Se non che mi si risponderà che i fatti e non la teoria mostrano la porosità dei corpi; non è forse porosa la spugna, non lo è un ammasso di terra, il microscopio non mostra forse le migliaia di pori dove l'occhio non giungerebbe a scorgerli? i Fisici non ripetono forse e nei trattati e dalla cattedra quello esperimento per cui il mercurio fortemente premuto attraversa i pori del legno?

Non dirò che queste sperienze non sieno degne di qualche attenzione, e non giovi presentare agli studiosi dei fatti, dai quali manifesta risulta la spiegazione di altri fatti; chi ha veduto il mercurio attraversare i pori del legno intenderà facilmente come l'umidità possa essere assorbita ed accrescere il volume del legno stesso; ma che con tali sperienze si creda provare od almeno render probabile una proprietà generale dei corpi, la mi parve sempre cosa sommamente mirabile. Che si direbbe di un Fisico che a provare la porosità dei corpi mostrasse ai suoi uditori i grani che passano attraverso di un vaglio? Ed in vero la cosa è poco dissimile che si ricorra ad un prodotto dell'arte o ad un prodotto della natura organizzata. Qual'è non dirò quel naturalista ma quel rozzo agricoltore, il quale non abbia pensato che se il nutrimento passa dalle radici alle sommità degli alberi è pur mestieri che vi sieno dei canaletti che ve lo conducano; qual meraviglia che

questi canaletti più o meno si mantengano anche nel legno disseccato ? E qual conseguenza potrà dedurseue intorno alla generale porosità dei corpi ? Nessuna per certo maggiore di quella che potrebbe ricavarsi dall'esistenza della bocca e degli intestini di un animale. — Tutte quelle sperienze che riguardano corpi organizzati sono pel nostro scopo affatto inconcludenti. Meritevole di maggior considerazione si è quella sperienza fatta a tutt'altro scopo dagli accademici del Cimento, per la quale videro l'acqua uscire attraverso una lamina d'oro; se non che parrebbemi che prima di stabilire che i pori dell' oro sieno veramente capaci di dar adito all'acqua bisognerebbe studiare accuratamente la esperienza, e per esempio osservare se il forte stiramento avesse prodotto qualche minima screpolatura. Infatti i Fisici sembrano convenire che i corpi solidi manchino generalmente di quei pori che possono essere attraversati da un liquido o da un fluido aeriforme, e che essi abbiano soltanto quei pori od interstizj di un ordine grandemente inferiore, nei quali più o meno liberamente possono muoversi i soli fluidi imponderabili.

Quei miscugli e quelle combinazioni, nelle quali il composto ha minor volume dei componenti sembrano pur dimostrare l'esistenza dei pori; ma ciò soltanto perchè si è stabilito che la materia sia incompressibile : il fatto si è che l'acqua e l'alcool occupano minore spazio quando sono uniti che quando sono separati, ma niuna sperienza ci fa propendere per l'opinione che si sieno diminuiti i pori; oppure che le due sostanze si sieno compenetrate. — Le dilatazioni prodotte dal calore si spiegano bastantemente bene coll'intromissione di un particolar fluido (il calorico) nei pori del corpo, senza che però s'intenda come la stessa quantità di calorico produca sì differenti dilatazioni nei diversi corpi: ma quando vediamo il ghiaccio assorbire una gran quantità di calorico e nello stesso tempo condensarsi, e fino ad un certo punto avvenire la stessa cosa anche nell'acqua, quella spiegazione perde ogni forza, e forse si dovrebbe confessare che non si sa spiegare il fenomeno : si dirà invece che mentre il ghiaccio si liquefà, le sue molecole

possono prendere una posizione più comoda e lasciare tra loro minori interstizj, e che un'altro accrescimento di calorico fa che quelle molecole ancora un poco si avvicinano. Ciò è lo stesso come dire che si è prestabilito che l'acqua sia composta di molecole impenetrabili tra loro separate da pori, e che del resto si è disposti ad immaginare tutto quanto occorra perchè l'ipotesi buono o malgrado si accordi coi fenomeni.

Pei Newtoniani i corpi diafani erano una prova non dirò palpabile ma visibile dell'esistenza di grandissimi pori, nei quali liberamente scorressero quelle meravigliose emanazioni di luce; ed anzi alcuno calcolò che tanto smisuratamente i pori soverchino la parte solida e materiale dei corpi che tutta la terra che abitiamo, se si restringesse fino a non aver più pori si ridurrebbe a tanta materia compatta che potrebbe stringersi in una mano. Così non più si dovrebbe dire che i corpi hanno dei pori, ma che essi sono degli spazj vuoti, nei quali sono disseminate delle piccolissime molecole materiali separate da intervalli smisuratamente superiori alle loro dimensioni. — Ma lasciando stare questa almeno esagerata ipotesi, osserviamo che la deduzione dalla temperanza dei corpi alla loro porosità non era che una conseguenza di un'altra ipotesi, quella dell'emanazione della luce; quando invece i fenomeni luminosi dipendano da vibrazioni queste possono trasmettersi attraverso i corpi anche senza bisogno di pori, appunto come il suono è trasmesso dai corpi che per certo non si lasciano penetrare dall'aria. Se esservi buonissime ragioni per ritenere che i fenomeni luminosi dipendono anche nell'interno dei corpi dalle vibrazioni della luce, ma siamo sempre nel campo delle ipotesi. D'altra parte in qualunque modo si ammetta che i corpi sieno attraversati dalla luce o sotto forma di emanazione o sotto forma di vibrazione resta però vero che l'esistenza dei porì è subordinata alla preconcepita impenetrabilità della materia.

Se noi consideriamo i fluidi aeriformi, l'ipotesi dell'impenetrabilità della materia ci conduce necessariamente a supposizioni poco meno strane di quella di cui sopra favellava di

tutto l'orbe terracqueo riducibile al volume di una noce. — L'idrogeno allo stato di gas è almeno dieci mila volte più dilatato di quello che si trovi quando unito all'ossigeno forma l'acqua; dal che ne viene che per quanto piccoli vogliano supporsi i pori dell'acqua grandissimi saranno quelli del gas idrogeno. Vogliate, ve ne prego, immaginare che in tutto il vacuo di questa sala sieno distribuite ad eguali distanze venti melarancie, vi parrà per certo che la sala potrebbe dirsi vuota; pure essa presenterebbe esatta idea della costituzione del gas idrogeno; quelle mele sarebbero gli atomi impenetrabili, quei larghi spazj interposti rappresenterebbero i pori del gas; è vero che questi pori saranno immensamente più piccoli di quegli spazj, ma con egual proporzione le molecole solide saranno più piccole di quelle mele. Pure queste molecole che con tanta distanza disgiunge le une dalle altre tendono con forza grandissima a vie più allontanarsi: ammettiamo pure che ciò dipenda dal calorico interposto, ma la forza repulsiva di questo calorico è equilibrata (supposta eguale la temperatura) da quella del calorico circostante; prova ne sia che niuna quantità di calorico esce dal gas: e se il calorico non tende ad espandersi, come spinge a dilatarsi quelle disseminate molecole del gas? Qual bizzarra forma non si dovrebbe attribuire a queste molecole perchè potessero impedire l'espandersi del calorico? e d'altronde ciò sarebbe in contraddizione col fatto che il calorico per lieve eccesso di temperatura si trasmette attraverso il gas, e che anzi il calorico raggiante istantaneamente vi si muove. Se dunque il gas non impedisce il movimento del calorico, e se la forza repulsiva di questo è equilibrata, come avviene che le molecole del gas tendano ad allontanarsi per effetto di quella forza? - E questo gas, delle cui molecole può veramente dirsi *sunt rarae nantes in gurgite vasto*, ha peraltro la forza d'impedire la diffusione di un fluido, che passa liberissimamente pei pori dei metalli, voglio dire del fluido elettrico: ma fate che al gas idrogeno si unisca poco vapore acqueo, e quelle nuove molecole solide ospitanti tra quelle del

gas idrogeno, anzichè maggiormente impedire il moto del fluido elettrico, gli procureranno libero passaggio.

Parmi che le immaginose creazioni cartesiane non presentavano maggior difficoltà di quelle che ad ogni passo s'inconcontrano quando si spinge un po'innanzi l' esame delle ipotesi generalmente ammesse dai Fisici intorno alla costituzione dei corpi. E se non si sanno togliere le difficoltà non sarebbe forse meglio confessare a bella prima che s'ignora come sieno costituiti i corpi, anzichè sostenere come verità inconcusse che la materia è impenetrabile, e che i corpi tutti sono porosi?

Se quel gas idrogeno fosse per avventura composto di una materia tutta continua, la quale bensì tendesse ad espendersi, ma potesse anche per un eccesso di forza esterna o per affinità verso altra sostanza, restringersi in piccolissimo volume; e se non solamente in questo senso essa fosse penetrabile, ma lo fosse anche perchè nel suo stesso spazio potesse coesistere altra materia, forse si schiverebbero molte difficoltà. Nè dico già che in tal modo si spiegassero i fenomeni, poichè o spiegare vuol dire ricondurre un fenomeno particolare ad altro generale, e nulla vi è di più generale di quelle azioni della materia che si vorrebbero spiegare; o spiegare vuol dire scoprire l'analogia tra un fenomeno nuovo ed uno già conosciuto, e siccome egualmente ignota è la costituzione di tutti i corpi, così niuna analogia ci è permesso di formare.

Forse alcuno direbbe che la penetrabilità della materia è un assurdo a cui la ragione ripugna; ma io dimanderei in qual modo la nostra mente si è fatta certa di un principio che contraddica la penetrabilità; niuno per certo vorrà credere che sia questa in noi un'idea innata, la cui verità si appoggi all' infinita Verità del Creatore, è dunque lecito esaminare d'onde ci sia venuta; e credo che tutti accorderanno che essa ci è venuta dai sensi: il fanciullo scorgendo che un corpo non può penetrarne un altro, che lo spazio occupato dall'uno non viene occupato da un secondo, se il primo non ne sia rimosso, venne ad acquistare, pel sovrano principio dell'analogia, la ferma credenza che i corpi fossero impenetrabili: e quando

molto più tardi il Fisico esaminando attentamente i fenomeni vide che i corpi erano in varia guisa penetrabili, ei non potè più cancellare la credenza del fanciullo, ed a sostenere la prestabilita impenetrabilità della materia immaginò la porosità dei corpi. In tutto questo dov'è la ragione, dove l'assurdo? Qual sicura analogia vi può essere tra un grossolano fenomeno male osservato, ed un'ipotesi nell'essenza della materia e sull'intima costituzione dei corpi? — Pure il fenomeno osservato è, se mal non m'appongo, il solo fondamento della ragione del Fisico.

Da tutto questo parrebbemi potersi conchiudere che l'impenetrabilità e la porosità anzichè proprietà generali dei corpi fossero ipotesi a dir poco sommamente dubbiose, e che perciò si dovessero eliminare dalla Fisica sperimentale. Ho già detto che pur tuttavia meriterebbero esser ricordati quei fenomeni che dimostrano la porosità nel senso grossolano della parola) di parecchi corpi; si facciano pur vedere i pori della cute, il legno che lascia passare il mercurio, l'uovo dal cui guscio esce l'aria; si mostri pure quell'idrofane che meritabilmente s'incontra in tutti i trattati di Fisica: ma, sotto pena di perdere la confidenza dello studioso, non si dica mai che in tal guisa si è dimostrata la porosità generale della materia. Si rammenti che quei fatti appartengono alla storia naturale e non alla Fisica, e dico ciò sotto doppio riguardo, e per la natura dei corpi che presentano quella porosità, e perchè i fatti stessi essendo slegati nè dipendendo da alcun principio generale non possano formare una scienza ma soltanto una storia.

Accordo inoltre che anche in riguardo alla così detta impenetrabilità vi sono alcuni fenomeni che il volgo ignora o non avverte, e che lo studioso deve apprendere; è inutile occuparsi della resistenza che oppongono i solidi, poichè essa è a tutti nota, e per lo contrario si deggiono esporre le sperienze che mostrano la compressibilità di tali corpi: ma in quanto alla resistenza che presenta l'aria questa è poco avvertita dagli indotti, perciò sono opportunissime quelle sperienze che la rendono palese; ma sarebbe molto male il darle come prova dell'impenetrabilità dell'aria, poichè poco dopo si sarebbe co-

stretti di mentirsi parlando dell'elasticità e della compressibilità dell'aria medesima.

Abbandonate l'impenetrabilità e la porosità, meritano invece diligente studio la compressibilità e l' Elasticità, poichè queste sono veramente proprietà generali dei corpi; e forse che lo stesso può dirsi della espansibilità comune non solamente ai fluidi aeriformi, ma eziandio a quasi tutti i liquidi e forse anche a parecchi solidi; di quella proprietà cioè per la quale i fluidi aeriformi si espandono fino ad un limite non ancora determinato, e per la quale i liquidi si cangiano in vapori senza che nessuna fortissima pressione prodotta da altro fluido aeriforme sia capace d' impedire la formazione del vapore, mentre per lo contrario (cosa mirabile) basta una leggera tensione del vapore stesso per arrestare l'ulteriore vaporizzazione. — In quanto alla dilatabilità dei corpi mediante il calorico, parmi che essa sia da togliere dalle proprietà generali, perchè trova posto più opportuno nella Fisica particolare, e perchè essa ammette quelle forti eccezioni superiormente accennate.

L'Estensione è una proprietà generale della materia, perchè essa si fa entrare nella sua definizione: potrebbe dimandarsi di definire l'estensione stessa, ma non entriamo in maggiori questioni. L'Estensione poi non può formar oggetto della Fisica sperimentale, nulla essendovi da ricercare. È degno di meraviglia che qualche Fisico anche moderno annoveri fra le proprietà generali la Figurabilità, quasicchè quando si dice estensione finita non si dicesse anche figurata.

La divisibilità offre argomento a molti ed importanti sperimenti se non che anche questi formano una porzione di storia anzichè di scienza. E dopo tutte quelle sperienze che mostrano la divisibilità della materia portata ad un grado veramente meraviglioso si crede forse che i Fisici ne conchiudano che la materia è divisibile all'infinito? Nulla di ciò, eglino al contrario ammettono, che ogni sostanza consista in atomi di forma e grandezza determinata. E perchè adunque chiamare la divisibilità una proprietà generale dei corpi, forse che gli atomi non sono corpi? Che se voleva intendersi soltanto che

i corpi sono ordinariamente divisibili, l'asserzione era ben ingenua, e poco occorreva a persuaderne lo studioso.

La questione dell'esistenza degli atomi oppure della divisibilità infinita è ritenuta dai Fisici più prudenti come affatto indecisa, perchè l'esperienza nulla ci può insegnare. Considerando che i corpi si palesano ai nostri sensi ed agiscono gli uni sugli altri solamente mediante le loro forze, alcuni filosofi fanno consistere nel cumulo di queste forze tutta l'esistenza dei corpi; con questa teoria così detta *dinamica* l'impenetrabilità assoluta della materia manca d'ogni fondamento, non si può trattare se non di resistenze più o meno grandi che si manifestano in alcuni spazj particolari, chè del resto i corpi estendono la loro esistenza a tutti quegli spazj nei quali in differenti maniere agiscono le loro forze. Questa teoria come quella che asserisce meno delle altre può riguardarsi come la più filosofica, poichè, nella piena ignoranza in cui siamo intorno all'essenza dei corpi, ogni asserzione di meno è forse un errore risparmiato. — Ma la nostra mente educata dalla continua sperienza delle resistenze dei corpi solidi difficilmente può fare astrazione da quelle idee; essa non sa immaginare forza se non in quanto vi sieno corpi o molecole solide dalle quali esse *emanino*, e quando pure dopo lungo studio è costretta ad ammettere azioni a distanza, la nostra mente esige almeno degli atomi solidi nei quali *risiedano* le cause di quelle forze che tutto intorno agiscono; e quantunque una forza che *emani*, una causa di forza che *risieda* sieno frasi senza nessun preciso significato, pure la nostra mente se ne appaga, essa vi trova in qualche guisa un appoggio che le manca quando considera le forze come esistenti da sè sole. — Vorremo noi negare all'imperfezione della nostra mente questo appoggio, vorremo ricusare l'esistenza degli atomi? Sembrami che sì pochi vantaggi possa trarsi dalla teoria dinamica sostituita all'atomica che non valga la pena di affaticare la nostra mente in difficili astrazioni; d'altronde i fisici atomistici sono così condiscendenti che sarebbe indiscretezza rifiutare quel pochissimo che essi richieggono. Non domandano già che gli atomi sieno fra di loro

contatto, non esiggono che essi abbiano una forma piuttostochè l'altra; se volete che un atomo sia tanto più piccolo di un grano di sabbia quanto lo è di tutto il sistema mondiale, eglino ve lo concedono; se volete che la distanza dei due atomi più vicini sia milioni di volte maggiore della grandezza di ciascun atomo i fisici atomistici ve lo concedono, ed anzi forse lo esigono? Chi potrà dunque rifiutar loro di ammettere quegli atomi sommamente esigui in cui si compiaciono di *concentrare* le cause delle forze dei corpi? Se non possono presentare nè sperienze nè solide ragioni a sostegno delle loro opinioni, i fisici atomistici sono almeno sicuri che niuna sperienza varrà mai a dimostrarle false.

Pare che i fisici siensi data molta briga per accrescere il numero delle proprietà generali dei corpi, e perciò senza sorridere annunciarono che tutti i corpi sono mobili, non so poi se gli studiosi ascolteranno sempre senza sorridere un tanto insegnamento. Ma la materia oltrechè mobile è anche inerte vale a dire essa conserva il proprio stato di quieta assoluta o di movimento rettilineo ed uniforme; come dunque avviene che i corpi cangino il loro stato di quiete o di moto? Per effetto delle forze; ma queste forze sono forse estranee alla materia o proprie ed attaccate alla sua essenza. Fisici autorevolissimi credettero che una tal questione rimanesse indecisa. Io per me non saprei concepire la separazione fra le forze (parlo delle macchine) e la materia; coll'astrazione potremo distinguere la materia dalle sue forze, ma queste saranno sempre unite a quella (se forse anzi non ne formano tutta intera l'essenza).

Per rendere più chiare le applicazioni della matematica alla fisica può giovare di far astrazione per poco dalle forze, e supporre la materia inerte, poscia calcolare gli effetti delle forze su di essa: ma credo che nella fisica sperimentale, che considera la natura quale è in fatto, non debba dirsi inerte la materia, poichè la materia fu dal Creatore largamente provveduta di forze, alle quali sono dovuti que'mirabili e continui mutamenti, pei quali l'universo sempre cangiando pur sempre mantiene l'armonia stabilita dalla eterna sapienza.

Forse che alcuno crederebbe di poter conciliare l' inerzia colle forze proprie alla materia discorrendo in questo modo: un sasso è inerte, e per sé stesso rimarrebbe in quiete, e siccome è soggetto alla forza propria della terra, così esso cade. Ma la forza d'attrazione non è propria della Terra niente più che del sasso, essa è una forza che stabilisce una mutua dipendenza tra questi due corpi; ed anzi può dirsi che non solamente tutte le forze ma anche tutte le proprietà da noi conosciute non sono proprietà individuali bensì relazioni fra due enti; nulla noi sappiamo sull'intima essenza delle cose e soltanto conosciamo alcune delle loro azioni; nè azione può aver luogo se non se fra due cose,

Come può intendersi, o quale spiegazione può darsi dell'attrazione fra la terra ed un sasso? per qual misteriosa ragione il sasso ha la forza di muoversi solo in quanto esiste la terra? Perchè all'indefinito allontanarsi della terra sminuirebbe indefinitamente la forza del sasso? Nessuna spiegazione, poichè quel fatto non si sa, e tengo per certo che non si saprà mai ridurre ad altro più semplice e generale. Che se la nostra mente ha difficoltà d'intendere, cioè di rimanere interamente persuasa di quel fatto; la ragione si è perchè in altro modo sono dà noi credute quelle verità che un tardo studio ci fa discoprire, e quelle che l'abitudine dei primi anni e il prepotente principio d'analogia ha immedesimato coi nostri pensieri, e ne ha formata la base delle nostre deduzioni. Pel fanciullo esistono due cose ben distinte, egli stesso ed il mondo che lo circonda; talvolta egli scorge l'effetto di una azione di sè sopra il mondo, talvolta egli offre in sè stesso l'azione del mondo: così egli si abitua a credere che in ogni azione vi sia l'agente ed il paziente, e poscia l'uomo non sa persuadersi che ogni azione è invece un'azione di relazione fra due enti.

Ritorniamo all'inerzia della materia. Tutto quanto si dice intorno ad essa si riduce alla conseguenza di un principio, che io dirò un assioma in questo senso che esso non può essere dimostrato e che pur da nessuno si vorrà porlo in dubbio: questo principio si è che una forza (e potrebbe anche

dirsi una causa qualunque) per produrre un effetto ha bisogno di un tempo, vale a dire che nessuna azione è istantanea. Ora se la mutua posizione di due corpi sia tale che sopra uno di essi agisca una forza (chè mio malgrado l'abitudine mi trae a spiegarmi in tal guisa) occorrerà un certo tempo perchè quel corpo cangi di un certo grado il suo movimento, e sembrerà in qualche maniera che il corpo resiste alla forza che tende a cangiare tal movimento; mentre per lo contrario il corpo è dotato di forza e quel successivo cangiamento di moto è appunto l'effetto di quella forza.

Quali poi sono le forze della materia? É questa tal dimanda che la risposta darebbe la spiegazione di tutti i fenomeni puramente fisici; il che torna lo stesso come dire che è dimanda a cui non si saprà mai rispondere. — Le forze della materia hanno per unico effetto di produrre dei movimenti? Noi non sappiamo comprendere altra sorta di effetto delle forze, e quando tal effetto non è palese noi sappiamo che esso consiste in qualche impercettibile movimento molecolare; ma che una cosa non sia da noi compresa non è questa buona ragione perchè non possa esistere; sicché credo che, quando non abbiamo qualche motivo per giudicare che l'effetto della forza sia veramente un movimento, sia più filosofico parlare dell' effetto in quanto che esso a noi ci si palesa senza immaginare dei movimenti affatto arbitrarj e che forse non esistono.

Una sola forza della materia è veramente da noi conosciuta; tutti intendono ch'io parlo dell'attrazione Newtoniana; e di quante mirabili cognizioni non fu ricca questa scoperta! L'Attrazione universale, ecco un esempio sicuro delle forze di cui è dotata la materia, di una di quelle forze che dipendono dall' esistenza e dalla distanza di due porzioni di materia. — Un'altra forza, di cui non abbiamo un'idea altrettanto precisa, quantunque l'epoca della sua conoscenza sia stato più rimota, si è quella resistenza più o meno grande che si scorge fra due corpi posti al contatto; e tanto siamo abituati a provare gli effetti di questa forza che quasi la identifichiamo colla materia stessa; dal che ne venne come vedemmo la pretesa impenetrabilità della materia. Così facendo consistere in quella resistenza l'es-

senza della materia noi ristringiamo l'esistenza di questa a quello spazio in cui si palesa quella forza. — Del resto la Compressibilità, l'Elasticità, la Coesione, l'Adesione ec. ci fanno conoscere che sono proprie alle parti di ogni corpo delle forze di attrazione e di repulsione.

Oltre l'Attrazione molecolare si annovera ben a ragione fra le proprietà generali della materia anche l'Affinità, ma non ho mestieri di dire quanto poco si conoscano le leggi di queste forze. L'Affinità è come l'Attrazione universale una forza fra due corpi (dando a queste frase il significato sopra esposto), ma grandemente ne differisce perchè esiste soltanto dentro quei limiti di distanza nei quali agisce la resistenza della impenetrabilità, e perchè cangia affatto secondo la natura dei due corpi; inoltre l'affinità ha per effetto di combinare insieme i due corpi e di formarne un corpo dotato di nuove proprietà. — Sul che permettetemi di esporre un' idea mediante la quale può ravvisarsi una qualche causa di alcuni strani fenomeni. Quantunque l'effetto più ordinario dell'affinità sia quello di combinare o di tener combinati due corpi, non ne viene già che quella forza non esista, vale a dire non agisca, anche quando non si compie la combinazione. Precisamente nello stesso modo l'attrazione universale avrebbe per effetto di trarre i due corpi al contatto, pur tutti sanno che l' attrazione agisce anche fra la terra e la luna che mai non giungono al contatto, e fra due corpi il cui moto sia impedito. Così, io penso, se un gas si addensa sulla superficie, per esempio, del carbone più che alla superficie di un altro corpo, tal fenomeno, senza immaginare nuove forze, può benissimo attribuirsi all'affinità fra il carbone ed il gas, affinità capace di vincere fino ad un certo punto l'espansibilità del gas, ma insufficiente poi a superare la coesione del carbone, e produrre una vera combinazione. Forse moltissimi fenomeni sono riducibili in egual modo ad effetti dell'affinità senza combinazione; e mi pare che ciò possa farsi per la forza catalitica del Berzelius, e forse anche per la forza epipolitica immaginata dal Dutrochet. — L'amido sotto l'influenza dell'acido solforico si converte in destrina ed in zucchero senza che

l'acido si combini con alcuna di queste sostanze; parmi che l'affinità dell' acido pei componenti dell' amido possa considerarsi causa sufficiente quantunque l'acido non entri in alcuna combinazione. Simil cosa può dirsi per la generazione dell'etere; se non che in questo caso è probabile che l'affinita dell' acido solforico coll'alcool produca in fatto la combinazione di una parte dell'acido, e che poscia il risultante acido solforinico decomposto mediante il calore fornisca l' etere, e riproduca l' acido solforico. — L'accensione del gas idrogeno mediante la spugna di platino è dal De La Rive molto plausibilmente spiegata ammettendo una continua ossidazione del platino e susseguente sua riduzione prodotta dall'idrogeno; ma anche senza alcuna combinazione l'affinità del platino presenterebbe a mio credere una causa sufficiente per la combinazione dei due gas addensati sulla sua superficie. — È nota da gran tempo la facilità che hanno i corpi allo stato così detto *nascente* di entrare in nuove combinazioni, il che parmi potrebbe spiegarsi mediante l'affinità del corpo *nascente* con quella a cui prima era combinato: così l'ossigeno che si sviluppa dal urossido barico ma che pure è ancor sottoposto all' affinità della barite è capace di entrare in combinazione coll'acqua, e forma l'acqua ossigenata, la quale a sua volta presenta altri esempj della così detta forza catalitica, poichè essa rapidamente si decompone mediante il contatto di un metallo, benchè questo rimanga del tutto illeso; forse che l'affinità del metallo per l'ossigeno è la causa che lo sforza ad abbandonare l'acque quantunque non sia poi sufficiente a combinarlo col metallo.

Ma troppo mi dilungai dall'assunto argomento, sicchè ponendo fine mi limiterò a conchiudere sembrarmi che intorno alle proprietà generali dei corpi vi sieno alcune cose che richieggano essenziali cangiamenti, ed esser desiderabile che nei Trattati di Fisica sperimentale si voglia riprendere in esame questo argomento e trattarlo secondo i dettami della sovrana delle scienze, la filosofia.

APPLICAZIONE DEI TRASCENDENTI ELLITTICI ALLA QUADRATURA DI ALCUNE CURVE SFERICHE

MEMORIA

DI BARNABA TORTOLINI (*)

INTRODUZIONE

Se x, y, z rappresentino le coordinate ortogonali di un punto appartenente ad una superficie conica; ed α, β, γ le coordinate del suo vertice, che chiameremo anche Centro del Cono, l'equazioni della generatrice saranno della forma

$$x - \alpha = m(z - \gamma), \quad y - \beta = n(z - \gamma)$$

m, n variano secondo la posizione variabile della generatrice, ed uno è funzione dell'altro. Quando la curva che dirige il movimento della generatrice sia collocata nel piano delle xy, e di equazione

$$f(x', y') = 0,$$

facendo $z = 0$ nell'equazioni della generatrice, i valori delle x, y appartengono ad un punto qualunque (x', y') della direttrice, in modo che si avrà

$$x' = \alpha - m\gamma, \quad y' = \beta - n\gamma,$$

ove sostituendo

$$m = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \quad n = \frac{y-\beta}{z-\gamma}$$

si dedurrà per l'equazione della superficie conica

$$f\left(\frac{\alpha(z-\gamma) - \gamma(x-\alpha)}{z-\gamma}, \frac{\beta(z-\gamma) - \gamma(y-\beta)}{z-\gamma}\right) = 0$$

Se l'asse delle z si confondesse coll'asse del cono e se di più l'origine delle coordinate sia situata nel centro dello stesso cono, sarà $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e converrà inoltre sostituire $\gamma - z$ invece

(*) Si è creduto opportuno di riprodurre questa Memoria quantunque di già pubblicata nell'ultimo volume della Società Italiana. Vol. 24 part .2. pag. 337.

di z; perciò l'equazione della superficie conica diviene

$$f\left(\frac{\gamma x}{z}, \frac{\gamma y}{z}\right) = 0,$$

d'onde segue che dall'equazione $f(x, y) = 0$ della direttrice si passa all'equazione del cono costruito sopra questa curva coll' origine al centro del cono, sostituendo $\frac{\gamma x}{z}$, $\frac{\gamma y}{z}$ invece delle coordinate x, y. L'ordinata γ denota l'altezza del cono, e potrebbe anche scriversi semplicemente

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

Ciò posto immaginiamo una sfera concentrica al cono, in modo che per gli stessi valori delle coordinate, sia

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

In questo caso dalla mutua intersezione delle due superficie verrà delineata nella sfera una curva a doppia curvatura, che nella sua forma avrà una somiglianza colla figura della direttrice. La varietà di queste *curve sferiche* dipenderà dalla varietà delle curve piane direttrici del cono, e saranno esse completamente determinate dalla coesistenza delle due equazioni

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Dal centro ora della sfera si conduca una retta ad un punto (x, y, z) comune alle due superficie, e che sarà anche un punto della curva sferica, e si chiamino ξ, η gli angoli che le projezioni di questa retta ne'piani xz, yz formano coll'asse delle z, si avrà evidentemente

$$\frac{x}{z} = \text{tang}\xi, \quad \frac{y}{z} = \text{tang}\eta,$$

d'onde

$$x = \frac{\text{tang}\xi}{\sqrt{(1+\text{tang}^2\xi+\text{tang}^2\eta)}}, \quad y = \frac{\text{tang}\eta}{\sqrt{(1+\text{tang}^2\xi+\text{tang}^2\eta)}},$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang}^2\xi+\text{tang}^2\eta)}}.$$

Di qui l'equazione della superficie conica diviene

$$f(\text{tang}\xi\ ,\ \text{tang}\eta) = 0\ .$$

Le nuove variabili ξ, η diconsi *coordinate sferiche* della nuova curva, e la precedente equazione si dirà l' equazione della curva sferica riferita alle sue coordinate sferiche: le medesime ξ, η rappresenteranno per ciascun punto (x, y, z) due archi di circoli massimi condotti perpendicolarmente dallo stesso punto (x, y, z) sopra due circoli massimi della sfera, fra loro perpendicolari. Da tutto ciò si deduce, che costruito un cono sopra una curva di equazione $f(x, y) = 0$, ed intersecato con una superficie sferica concentrica, si passerà dall'equazione della direttrice all'equazione della curva sferica, riferita alle sue coordinate sferiche ortogonali colla semplice sostituzione di tangξ, tangη invece di x, y. Che anzi se intendiamo che x, y sieno queste tangenti trigonometriche, allora la medesima equazione potrà servire a rappresentare tanto la direttrice, quanto la curva sferica. Inoltre come le curve piane si distinguono in diversi ordini secondo il grado delle loro equazioni, così le indicate curve sferiche si distingueranno in altrettanti ordini secondo il grado delle variabili tangξ, tangη, e potremo enunciare che tanto le direttrici, quanto le curve sferiche appartengono ad uno stesso ordine. Queste considerazioni sono d'accordo con quanto nel suo Saggio di Geometria analitica sferica stabilisce il Sig. Professor *A. Borgnet* di Tours (*), e più anticamente anche il Sig. *Gudermann* di Munster. Le denominazioni poi si potrebbero desumere in alcuni casi dalle denominazioni delle curve direttrici. Così se la direttrice sia una curva conica, l' intersezione del cono con una sfera concentrica produrrà delle curve, che chiamansi *coniche sferiche*.

Le *coniche sferiche* sono state studiate, e si studiano dai geometri, e specialmente da Fuss nel secolo scorso negli Atti dell' Accademia di Pietroburgo, dal Sig. *Gudermann*, dal Sig. *Chasles*, *Borgnet* ed altri. Un gran numero di proposizioni eleganti, e di

(1) Essai de Géom. analytique de la sphère. *Tours*. 12 Giugno 1847.

teoremi al tutto somiglianti a quei che già da lungo tempo si conoscono nelle curve coniche ordinarie, si trova sussistere anche per queste nuove curve : l'equazioni poi di una qualunque delle indicate curve riferite alle loro coordinate sferiche ortogonali si ritrova assai facilmente, quando sia data la equazione della direttrice del cono. Così per esempio se

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

sia l'equazione di un ellisse, e sia c l'altezza di un cono da costruirsi sopra questa curva, l'equazione del cono si otterrà col sostituire $\frac{cx}{z}$, $\frac{cy}{z}$ invece di x, y, e sarà

$$\frac{c^2x^2}{a^2}+\frac{c^2y^2}{b^2}=z^2.$$

Chiamando α, β gli angoli formati coll'altezza c dalle due generatrici del cono che vanno all'estremità dei semiassi maggiore, e minore a, b, si avrà

$$\text{tang}\alpha=\frac{a}{c}, \qquad \text{tang}\beta=\frac{b}{c};$$

per ciò l'equazione del cono diviene

$$\frac{x^2}{\text{tang}^2\alpha}+\frac{y^2}{\text{tang}^2\beta}=z^2.$$

Infine per la sostituzione di tangξ, tangη invece di $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, otterremo l'equazione dell'ellisse sferica

$$\frac{\text{tang}^2\xi}{\text{tang}^2\alpha}+\frac{\text{tang}^2\eta}{\text{tang}^2\beta}=1$$

riferita alle coordinate sferiche ortogonali. Ognun vede che la equazione è al tutto somigliante a quella dell'ellisse piana. Nella stessa guisa prendendo la curva

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$$

l'equazione del cono di altezza c e coll'origine al centro sarà

$$c^2(x^2+y^2)^2=z^2(a^2x^2-b^2y^2).$$

Qui pure ponendo $a = c \operatorname{tang}\alpha$, $b = c \operatorname{tang}\beta$, otterremo una modificazione relativa alle costanti, ma più semplicemente possiamo suporre $c = 1$, ed allora le costanti a, b rappresenteranno le due indicate tangenti trigonometriche, e potremo scrivere

$$(x^2 + y^2)^2 = z^2(a^2x^2 - b^2y^2) .$$

Infine per la curva sferica riferita alle sue coordinate sferiche ortogonali, si avrà l'equazione

$$(\operatorname{tang}^2\xi + \operatorname{tang}^2\eta)^2 = a^2\operatorname{tang}^2\xi - b^2\operatorname{tang}^2\eta$$

somigliante all'equazione della direttrice. In questa Memoria ci prefiggiamo di intraprendere delle ricerche sulla quadratura di alcune curve sferiche, delle quali la formazione è desunta da quelle curve piane più comunemente studiate dai geometri. I trascendenti ellittici si presentano in un gran numero di problemi riguardanti la rettificazione delle curve, la quadratura delle superficie curve, e cubatura dei solidi. Si vedrà in molti esempi che in quelle curve piane, ove l' arco viene espresso da qualche trascendente ellittico delle tre note specie, costruendo sopra queste un cono, ed intersecandolo con una sfera concentrica, l'area segnata e compresa da questa intersezione viene in molti casi egualmente espressa da uno o più trascendenti ellittici. Non così accade delle rettificazioni delle medesime che per lo più sono espresse da trascendenti ultraellittici. Gli esempi scelti, la qualità dell'analisi, e gli sviluppi che mi si sono presentati in queste ricerche mostreranno una nuova applicazione dei trascendenti ellittici, importante ramo di analisi creato da Legendre, che è stato portato al più alto grado di perfezionamento dai più grandi geometri del nostro secolo.

Quadratura di alcune curve sferiche provenienti dalle intersezioni di un cono, e di una sfera concentrica.

1. La formola generale per la quadratura delle superficie curve è come si conosce

$$S = \iint dx\, dy \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]} .$$

Quando i punti x, y, z sono situati sopra la superficie di una sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

si avrà per le derivate parziali

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z},$$

quindi otterremo per la sostituzione

$$S = \iint \frac{dx dy}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}}.$$

Intersecando pertanto la sfera con un cono concentrico di equazione

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

ed eliminando la z, otterremo per la projezione della curva sferica nel piano delle xy, l'equazione

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}} \quad \frac{y}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}}\right) = 0$$

e la integrazione dovrà eseguirsi per tutti quei valori di x, y, che verificano la precedente equazione. Nelle applicazioni che sceglieremo, l'integrazione riesce più comoda col sostituire alle x, y un'angolo u, ed un raggio ρ compreso fra i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, in modo che per la nota teorica della trasformazione degli integrali multipli si otterrà il cangiamento di differenziali e delle derivate, e si procederà quindi alle integrazioni estese entro i convenuti limiti, che soddisfino all' equazione della projezione della curva sferica, come si vedrà dagli esempi che mostreremo.

2. Projettando il centro dell' iperbola sulle sue tangenti, otteniamo pel luogo geometrico la curva del quarto ordine

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2.$$

Questa curva dotata di centro, e limitata in tutte le direzioni nella sua figura somiglia alle *lemniscata*, e ad essa si riduce

nel caso dell'iperbola equilatera. Costruendo sopra di essa un cono di altezza c, e coll' origine delle coordinate nel centro del cono, si avrà per la sua equazione

$$c^2(x^2+y^2)^2 = z^2(a^2x^2-b^2y^2).$$

I rapporti $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ rappresentano le tangenti trigonometriche degli angoli, che le generatrici del cono formano con il suo asse, allorchè passano per l'estremità dei semiassi a, b; tuttavia le costanti a, b, c potranno nell'equazione del cono ridursi a due per la supposizione di $c=1$, ed in questa guisa le quantità a, b rappresenteranno esse stesse i valori delle indicate tangenti trigonometriche. Adottando adunque la coesistenza delle due equazioni

$$x^2+y^2+z^2=1\,,\quad (x^2+y^2)^2 = z^2(a^2x^2-b^2y^2)$$

è chiaro che dalla intersezione di queste due superficie concentriche verrà delineata nella sfera una curva a doppia curvatura, e somigliante nella sua figura a quella della *lemniscata*. Eliminando la z, e prendendo per fissare le idee $b<1$ otterremo per la projezione della curva sferica nel piano delle xy la curva di quarto ordine

$$(x^2+y^2)\,[\,(1+a^2)x^2+(1-b^2)y^2\,] = a^2x^2-b^2y^2\,.$$

La figura della nuova curva è parimenti somigliante alla *lemniscata*, il centro è un punto doppio, e le intersezioni coll' asse delle x sono determinate dai valori

$$x=0,\ x=0,\ x=\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}\,,\quad x=-\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}\,.$$

Per l'equazione polare prendiamo

$$x=r\cos u\,,\quad y=r\,\mathrm{sen}\,u\,;$$

per ciò

$$r^2=\frac{a^2\cos^2u-b^2\mathrm{sen}^2u}{(1+a^2)\cos^2u+(1-b^2)\mathrm{sen}^2u}\,.$$

L'origine del raggio vettore r trovasi nel centro della curva,

punto doppio della medesima, ove la direzione del raggio è tangente alla curva, e l'angolo u sarà allora per $r = 0$ determinato dalla condizione

$$a^2\cos^2 u - b^2\operatorname{sen}^2 u = 0\,, \qquad \text{ovvero} \quad \operatorname{tang} u = \frac{a}{b}\,.$$

Infine per $u = 0$ il raggio r si confonde con uno dei semiassi della curva, il che porge $r = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}$, come si è ritrovato con le coordinate ortogonali. I valori poi delle coordinate x, y, z comuni alle due superficie si esprimeranno evidentemente colla sola variabile u per mezzo delle equazioni

$$x^2 = \frac{(a^2+b^2)\cos^4 u - b^2\cos^2 u}{1 - b^2 + (a^2+b^2)\cos^2 u}$$

$$y^2 = \frac{a^2\operatorname{sen}^2 u - (a^2+b^2)\operatorname{sen}^4 u}{1 - b^2 + (a^2+b^2)\cos^2 u}$$

$$z^2 = \frac{1}{1 - b^2 + (a^2+b^2)\cos^2 u}$$

e delle quali faremo uso nella ricerca dell'area sferica.

3. Per applicare la formola generale della quadratura sferica riportata al parag. 1. al caso in questione, basterà verificare l'equazione della curva di projezione

$$(x^2+y^2)\,[\,(1+a^2)\,x^2 + (1-b^2)\,y^2\,] = a^2x^2 - b^2y^2$$

per mezzo di due valori di x, y espressi da altre due variabili, il che avvertendo alle ultime equazioni del parag. antecedente, e ponendo per brevità

$$\mathrm{R}^2 = 1 - b^2 + (a^2+b^2)\cos^2 u$$

potremo fare col prendere

$$x = \frac{\rho\cos u\sqrt{[\,(a^2+b^2)\cos^2 u - b^2]}}{\mathrm{R}}$$

$$y = \frac{\rho\operatorname{sen} u\sqrt{[\,(a^2+b^2)\cos^2 u - b^2]}}{\mathrm{R}}\,.$$

La variabile ausiliare ρ dovrà esser compresa fra i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, e per la z avremo

$$z = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 [(a^2 + b^2)\cos^2 u - b^2]}{R^2}\right)}.$$

Ciò posto indichiamo con x', y' le derivate delle x, y relative alla variabile ρ, e con x_1, y_1 le derivate relative ad u, e pongasi per brevità

$$A = a^2 + 2b^2 - b^4, \quad B = -2(1-b^2)(a^2+b^2), \quad C = -(a^2+b^2)^2$$

$$A_1 = (1-b^2)b^2, \quad R_1^2 = (a^2+b^2)\cos^2 u - b^2$$

avremo, eseguite le riduzioni

$$x' = \frac{R_1 \cos u}{R}, \quad y' = \frac{R_1 \operatorname{sen} u}{R}$$

$$x_1 = \frac{\rho \operatorname{sen} u\,(A_1 + B\cos^2 u + C\cos^4 u)}{R_1 R^3}$$

$$y_1 = -\frac{\rho \cos u\,(A + B\cos^2 u + C\cos^4 u)}{R_1 R^3}.$$

Nell'integrale duplicato all'elemento $dx\,dy$ si deve nella trasformazione delle variabili sostituire il nuovo elemento

$$(x'y_1 - x_1 y')d\rho du,$$

perciò facendo

$$\alpha = -b^2(1-b^2), \quad \beta = -(a^2+b^2)(2b^2-1),$$
$$\gamma = -C = (a^2+b^2)^2$$

otterremo

$$x'y_1 - x_1 y' = \frac{\rho(\alpha + \beta\cos^2 u + \gamma\cos^4 u)}{R^4},$$

quindi l'integrale del parag. 1° rappresentante la quadratura sferica diviene

$$S = \iint \frac{(\alpha + \beta\cos^2 u + \gamma\cos^4 u)\,\rho d\rho\, du}{R^4\sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 R_1^2}{R^2}\right)}}.$$

Questo integrale è suscettivo di una riduzione: riprendiamo

infatti i valori di R^2, R_1^2 e di α, β, γ, si troverà

$$R^2 . R_1^2 = \alpha + \beta \cos^2 u + \gamma \cos^4 u$$

per ciò

$$S = \iint \frac{R_1^2 \rho \, d\rho \, du}{R^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 R_1^2}{R^2}\right)}} .$$

I limiti dell'integrale sono $\rho = 0$, $\rho = 1$, ed $u = 0$ $u = \text{arc tang}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta$ per la quarta parte dell'area sferica, onde per l'intera si ha

$$S = 4 \int_0^\theta \int_0^1 \frac{R_1^2 \rho \, d\rho \, du}{R^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 R_1^2}{R^2}\right)}} .$$

Integrando adunque relativamente alla variabile ρ fra i prescritti limiti, abbiamo per $R^2 - R_1^2 = 1$

$$\int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\left(1 - \frac{R_1^2}{R^2} \rho^2\right)}} = \frac{R^2}{R_1^2} - \frac{R}{R_1^2} ,$$

quindi l' integrale definito duplicato, si ridurrà agli integrali definiti semplici

$$S = 4\left(\int_0^\theta du - \int_0^\theta \frac{du}{R}\right) .$$

Il secondo degli integrali è un trascendente ellittico incompleto di prima specie: infatti per $b < 1$ potremo scegliere una quantità k minore dell'unità in modo che sia

$$k^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + 1}, \quad \text{ed} \quad R = \sqrt{(1 + a^2)} . \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u)}$$

d'onde

$$S = 4 \left(\theta - \frac{1}{\sqrt{(1 + a^2)}} \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u)}} \right) ,$$

e ponendo come fa Legendre

$$F(k, \theta) = \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u)}}$$

si avrà in fine

$$S = 4.\text{arc tang}\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{4}{\sqrt{(1+a^2)}} F(k, \theta),$$

ove

$$\theta = \text{arc tang}\left(\frac{a}{b}\right).$$

È dunque esprimibile per un trascendente ellittico incompleto di prima specie l'area della nuova curva sferica.

4. Volendo intraprendere una somigliante ricerca per la misura dell'area compresa fra le due superficie concentriche

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (x^2 + y^2)^2 = z^2(a^2x^2 + b^2y^2),$$

nel qual caso la base del cono è una curva del quarto ordine, luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell'ellisse sulle sue tangenti, non si avranno che a ripetere tutte le precedenti operazioni col solo cangiamento di b^2 in $-b^2$, ed i limiti dell'angolo u saranno $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, onde la richiesta superficie sarà data immediatamente da

$$S = 4\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} du - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sqrt{[1 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2 u]}}\right].$$

Qui pure facendo pel modulo $k < 1$, $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1}$ si ha definitivamente

$$S = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{F(k)}{\sqrt{(1+a^2)}}\right),$$

ove per la funzione ellittica completa abbiamo

$$F(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u)}}.$$

Quando fosse $a = b$, il cono di quarto ordine si riduce ad un cono retto circolare, ed il valore di S sarà quello di una calotta sferica: infatti per $a = b$, $k = 0$ e $F(k) = \frac{\pi}{2}$, quindi

$$S = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}\right).$$

il valore del coefficiente di 2π esprimendo l' altezza della calotta sferica, il valore di S è quello che si ha dalla Geometria elementare. Il metodo esposto nei due precedenti esempi, e che seguiremo anche pei nuovi è quello adoperato dal Sig. *Catalan* nella ricerca dell'area dell' ellissi sferica, e che trovasi esposto nel Tomo 6.° del Giornale del Sig. Liouville per l'anno 1841.

5.° Sia la curva di equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

la quale priva dei radicali ascenderà al sesto ordine: questa curva è somigliante nella sua figura all'evoluta dell' ellisse, e ad essa si riduce quando fra le costanti a, b passa una certa relazione: se poi fosse $a = b$. allora la curva viene generata dal movimento di una retta fissa a che striscia sopra due rette perpendicolari, ed ammette proprietà eleganti. Ciò posto per ottenere l'equazione di un cono di altezza c coll' origine alla sommità, e per direttrice del moto l'indicata curva del sesto ordine, si avrà per un'osservazione di già emessa nell' introduzione

$$\left(\frac{cx}{az}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{cy}{bz}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Togliendo i radicali, si trova egualmente che la superficie conica è del sesto ordine: intersechiamola con una sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

è chiaro che verrà delineata nella superficie sferica una curva

a doppia curvatura, della quale la figura è somigliante all'evoluta dell'ellisse: eliminiamo la z, otterremo l'equazione

$$\left(\frac{cx}{a\sqrt{(1-x^2-y^2)}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{cy}{b\sqrt{(1-x^2-y^2)}}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

la quale appartiene alla projezione della curva sferica nel piano delle $x\,y$: qui pure togliendo le irrazionalità, l'equazione è di sesto grado, e non essendovi omogeneità nelle variabili x, y ne segue che fatta la sostituzione polare, il raggio r si trova determinato da un' equazione di sesto grado a tutte potenze pari, il che sarebbe assai complicato per le applicazioni, che ci siamo prefissi: per trarre adunque un partito utile osserviamo che ponendo $x^2+y^2=r^2$, la precedente ultima equazione trovasi verificata dalla sostituzione trigonometrica

$$\frac{cx}{a\sqrt{(1-r^2)}}=\cos^3 u\,,\quad \frac{cy}{b\sqrt{(1-r^2)}}=\operatorname{sen}^3 u\,,$$

d'onde

$$c^2x^2=a^2(1-r^2)\cos^6 u\,,\quad c^2y^2=b^2(1-r^2)\operatorname{sen}^6 u\,.$$

Sommando si trova

$$r^2=\frac{a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}\,.$$

Di qui pe'valori di x^2, y^2 abbiamo

$$x^2=\frac{a^2\cos^6 u}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}$$

$$y^2=\frac{b^2\operatorname{sen}^6 u}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}\,.$$

In questa guisa i valori di x^2, y^2, r^2 saranno funzioni razionali di $\operatorname{sen}^2 u$, $\cos^2 u$: aggiungiamo anche il valore di

$$z^2=1-x^2-y^2\,,$$

che sarà

$$z^2=\frac{c^2}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}\,.$$

Se come si è praticato di sopra si voglia calcolare l'area com-

presa fra l' indicata superficie conica colla sfera concentrica, avremo ad eseguire primieramente una trasformazione di variabili nell'integrale duplicato. Prendiamo pertanto una variabile ausiliare ρ entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, allora per verificare l'equazione della projezione della curva sferica nel piano delle xy, e con fare per brevità

$$R^2 = c^2 + a^2\cos^6 u + b^2\operatorname{sen}^6 u\,, \quad R_1^2 = a^2\cos^6 u + b^2\operatorname{sen}^6 u$$

potremo supporre

$$x = \frac{a\,\rho\cos^3 u}{R}\,, \qquad y = \frac{b\,\rho\operatorname{sen}^3 u}{R}\,,$$

quindi

$$z^2 = 1 - \frac{R_1^2\rho^2}{R^2}.$$

Sieno x', y' le derivate relative a ρ, ed x_1, y_1 le derivate relative ad u, avremo

$$x' = \frac{a\cos^3 u}{R}\,, \quad y' = \frac{b\operatorname{sen}^3 u}{R}$$

$$x_1 = -\frac{3a\,\rho\operatorname{sen} u\cos^2 u\,(c^2 + b^2\operatorname{sen}^4 u)}{R^3}$$

$$y_1 = \frac{3b\,\rho\cos u\operatorname{sen}^2 u\,(c^2 + a^2\cos^4 u)}{R^3}\,,$$

d'onde si trae

$$x'y_1 - x_1 y' = \frac{3ab\,\rho\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u}{R^2}$$

e siccome per le nuove variabili ρ, u

$$dx\,dy = (x'y_1 - x_1 y')d\rho\,du$$

così pel noto integrale dell'area sferica, ricaviamo

$$S = 3ab\iint\frac{\rho\,d\rho\,du\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u}{R^2\sqrt{\left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\rho^2\right)}}.$$

Esteso questo integrale all'intera area della curva sferica, abbiamo

$$S = 12\,ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{\rho d\rho\, du\, \mathrm{sen}^2 u\, \cos^2 u R^2}{R^2 \sqrt{\left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\rho^2\right)}}\,.$$

Integrando relativamente a ρ come si è fatto nel parag. 3 otteniamo

$$S = 12ab\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{sen}^2 u\, \cos^2 u\, du}{R_1^2} - c\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{sen}^2 u\, \cos^2 u du}{R_1^2 R}\right].$$

Il primo di questi integrali per mezzo di una ripetuta decomposizione della frazione razionale si può ottenere in quantità algebriche, il che però tralasciamo di fare, perchè ci porterebbe troppo a lungo; ed il secondo appartiene alla classe dei trascendenti ultraellittici: tuttavia nel caso di $a = b$ è riducibile ai trascendenti ellittici completi di prima e terza specie, come si vedrà da quanto siamo ad esporre.

6. I valori di R^2, R_1^2 per $a = b$ divengono

$$R^2 = c^2 + a^2(1 - 3\mathrm{sen}^2 u \cos^2 u)\,,\ R_1^2 = a^2(1 - 3\mathrm{sen}^2 u \cos^2 u).$$

Poniamo $u = 2\varphi$, perciò

$$R^2 = \frac{4(c^2+a^2) - 3a^2\mathrm{sen}^2\varphi}{4}\,,\ R_1^2 = \frac{a^2}{4}(4 - 3\mathrm{sen}^2\varphi)$$

ed integriamo entro i medesimi limiti, purchè si duplichi l'integrale, sarà

$$S = 24\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\varphi d\varphi}{(4 - 3\mathrm{sen}^2\varphi)} - c\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\varphi d\varphi}{(4 - 3\mathrm{sen}^2\varphi\sqrt{[4(c^2+a^2) - 3a^2\mathrm{sen}^2\varphi]}}\right].$$

Il primo integrale è algebrico, ed il secondo contiene i trascendenti ellittici completi di prima e terza specie. Dalla decomposizione delle frazioni risulta come per la divisione

$$\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{4 - 3\mathrm{sen}^2\varphi} = \frac{4}{3(4 - 3\mathrm{sen}^2\varphi)} - \frac{1}{3}\,,$$

quindi avvertendo che

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(4 - 3\text{sen}^2\varphi)} = \frac{\pi}{4},$$

Si avrà col togliere il fattore comune 3

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{c d\varphi}{\sqrt{[4(c^2+a^2) - 3a^2\text{sen}^2\varphi]}}\right.$$

$$\left. - 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{c d\varphi}{(4 - 3\text{sen}^2\varphi)\sqrt{[4(c^2+a^2) - 3a^2\text{sen}^2\varphi]}}\right].$$

Pongasi

$$n = -\frac{3}{4}, \quad k^2 = \frac{3a^2}{4(c^2+a^2)}, \quad \Delta = \sqrt{(1 - k^2\text{sen}^2\varphi)}$$

si ricaverà

$$S = 4\left[\frac{\pi}{2} + \frac{c}{\sqrt{(c^2+a^2)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta} - \frac{c}{\sqrt{(c^2+a^2)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(1+n\text{sen}^2\varphi)\Delta}\right]$$

È dunque esprimibile l'area sferica di cui si tratta in trascendenti ellittici completi di prima e terza specie, e sarà secondo le notazioni di Legendre

$$S = 4\left[\frac{\pi}{2} + \frac{cF(k) - c\Pi(n, k)}{\sqrt{(c^2 + a^2)}}\right].$$

Il parametro n negativo trovasi compreso fra la quantità, $-k^2$, e, -1, perciò chiamando k' il complemento del modulo, e θ un'angolo ausiliare, si potrà fare con Legendre

$$n = -1 + k'^2 \text{sen}^2\theta.$$

Nel caso in cui siamo $n = -\frac{3}{4}$, $k'^2 = \frac{4c^2 + a^2}{4(c^2 + a^2)}$,

e quindi

$$\text{sen}^2\theta = \frac{c^2 + a^2}{(4c^2 + a^2)}.$$

Ciò posto ritenendo che $F(k, \theta)$, $E(k, \theta)$ rappresentino i due trascendenti ellittici di prima e seconda specie di modulo k, e

di ampiezza θ, per una formola data da Legendre, si ha la riduzione dei trascendenti ellittici completi di terza specie in quei incompleti di prima e seconda, sicchè facendo

$$\Phi(\theta) = F(k)\,E(k',\theta) + F(k',\theta)\,E(k) - F(k)\,F(k',\theta)$$

$$\Delta(k,\theta) = \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta)}$$

avremo (*)

$$\frac{k'^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\Delta(k',\theta)}\Big(\Pi(n,k) - F(k)\Big) = \frac{\pi}{2} - \Phi(\theta).$$

Nel problema che abbiamo risoluto

$$\cos\theta = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{(4c^2+a^2)}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{(c^2+a^2)}}{\sqrt{(4c^2+a^2)}},$$

$$\Delta(k',\theta) = \sqrt{(1 - k'^2 \operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Di qui

$$\frac{F(k) - \Pi(n,k)}{\sqrt{(c^2+a^2)}} = \frac{2\Phi(\theta)}{c} - \frac{\pi}{c},$$

d'onde

$$S = 4\left(2\Phi(\theta) - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ognun vede, che l'area della curva sferica dipende in questo modo dai trascendenti ellittici incompleti di prima, e seconda specie.

7. L'esposta applicazione ne somministra un'altra, che è ben di conoscere. Riprendiamo la curva di equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

la quale, come è noto, potrà rappresentare l'evoluta dell'ellisse, quando alle costanti a, b si sostituiscano le nuove costanti

(*) Fonctions elliptiques Tom. 3. pag. 114.

$$\frac{a^2-b^2}{a}, \quad \frac{a^2-b^2}{b},$$

e cerchiamo nella generalità l'equazione della curva, luogo geometrico delle perpendicolari abbassate dal centro di questa curva sulle sue tangenti; sarà facile il vedere che la nuova curva è composta di quattro ovali eguali e simili, che si riuniscono nel centro, e somiglianti nelle loro figure a quella della *lemniscata*. Quando poi si voglia che l'equazione precedente rappresenti l'evoluta dell'ellisse, allora è chiaro che le tangenti all'evolute sono normali all'ellisse, e perciò la curva luogo dei piedi del centro dell'evoluta dell'ellisse sulle sue tangenti, dovrà coincidere con la curva luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell'ellisse sulle sue normali. Differenziando perciò la precedente equazione abbiamo

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{dx}{a}+\left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{b}=0,$$

quindi l'equazioni della tangente e della normale abbassata dal centro saranno

$$\frac{X}{a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{Y}{b\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}}}=1 \qquad bY\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}}-aX\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=0.$$

L'eliminazione delle x, y porgerà la richiesta equazione fra le X, Y della nuova curva.

Osserviamo che l'equazione fra le x, y è verificata dalla sostituzione

$$x=a\cos^3 u, \qquad y=b\,\mathrm{sen}^3 u,$$

d'onde l'equazioni della tangente e della normale divengono

$$bX\,\mathrm{sen}u+aY\cos u=ab\,\mathrm{sen}u\cos u, \qquad \mathrm{tang}u=\frac{a}{b}\cdot\frac{X}{Y}.$$

Dalla seconda si trae

$$\operatorname{sen} u = \frac{aX}{\sqrt{(a^2X^2 + b^2Y^2)}}, \quad \cos u = \frac{bY}{\sqrt{(a^2X^2 + b^2Y^2)}}.$$

Infine per la sostituzione nella prima, otteniamo

$$(X^2 + Y^2)^2(a^2X^2 + b^2Y^2) = a^2b^2X^2Y^2.$$

La richiesta curva è di sesto ordine come la primitiva. Mutiamo per semplicità le lettere X, Y in x, y, sarà

$$(x^2 + y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2) = a^2\, b^2\, x^2\, y^2.$$

Nell'ipotesi di $a = b$ quest'equazione si ridurrà ad

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2\, x^2\, y^2.$$

In ambedue i casi il centro è un punto quadruplo, e cercando l'espressione dell'arco per $a = b$, trovasi esso rappresentato da un trascendente ellittico di prima specie, nel quale l'angolo del modulo è di 60°. Che se la primitiva curva fosse l'evoluta dell' ellisse, allora la curva derivata avrà evidentemente per equazione

$$(x^2 + y^2)^2(a^2y^2 + b^2x^2) = (a^2 - b^2)^2\, x^2y^2$$

e coinciderà con la projezione ortogonale del centro dell'ellisse sulle sue normali,

8. Per semplificare alquanto le operazioni algebriche, si sostituisca a, b invece di a^2, b^2; si riprenda l' equazione generale

$$(x^2 + y^2)^2(ax^2 + by^2) = abx^2y^2$$

e si costruisca sopra questa curva un cono di altezza $\sqrt{c}$, con l'origine alla sua sommità, e coll'asse delle z nella direzione di $\sqrt{c}$, avremo per l'equazione di questo cono

$$c(x^2 + y^2)^2(ax^2 + by^2) = abx^2y^2z^2.$$

Intersecando ora la superficie conica con una sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

verrà delineata nella superficie sferica una curva a doppia curvatura somigliante nella sua figura alla base del cono.

L'eliminazione della z porge l'equazione della projezione della curva sferica nel piano delle xy, e sarà

$$c(x^2+y^2)^2(ax^2+by^2)+ab(x^2+y^2)x^2y^2=abx^2y^2,$$

la quale appartiene al sesto ordine, ed è anche essa composta di quattro ovali, che si riuniscono nel suo centro. Facendo la sostituzione

$$x=r\cos u, \qquad y=r\,\mathrm{sen}\,u$$

si trova per l'equazione polare

$$r^2=\frac{ab\,\mathrm{sen}^2u\cos^2u}{bc+(ab+ac-bc)\cos^2u-ab\cos^4u}.$$

Di qui ponendo

$$\mathrm{R}^2=bc+(ab+ac-bc)\cos^2u-ab\cos^4u$$

si trae per i valori di x^2, y^2, z^2

$$x^2=\frac{ab\,\mathrm{sen}^2u\cos^4u}{\mathrm{R}^2},\ y^2=\frac{ab\cos^2u\,\mathrm{sen}^4u}{\mathrm{R}^2},\ z^2=\frac{c(a\cos^2u+b\,\mathrm{sen}^2u)}{\mathrm{R}^2}.$$

Tutte le precedenti espressioni prendono un' aspetto più semplice per $a=b$, in modo che l'equazione del cono, e della projezione dell'area sferica nel piano delle xy, saranno

$$c(x^2+y^2)^3=ax^2y^2z^2,\ (x^2+y^2)\,[c(x^2+y^2)^2+a\,x^2y^2]=a\,x^2y^2.$$

Infine per i valori di x^2, y^2, z^2 si ha

$$x^2=\frac{a\,\mathrm{sen}^2u\cos^4u}{c+a\,\mathrm{sen}^2u\cos^2u},\quad y^2=\frac{a\cos^2u\,\mathrm{sen}^4u}{c+a\,\mathrm{sen}^2u\cos^2u},$$

$$z^2=\frac{c}{c+a\,\mathrm{sen}^2u\cos^2u}.$$

I limiti dell'angolo u in ambedue i casi saranno per l' ottava parte dell'estensione $u=0$, $u=45°$.

9. Nel caso generale di a diverso da b volendo cercare la quadratura dell' area sferica, intersezione del cono, e della sfera concentrica, converrà trasformare l'integrale duplicato riportato nel parag. 1 in altre variabili. A questo oggetto scelta

una grandezza ρ entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, prenderemo per x, y le espressioni

$$x = \frac{\sqrt{ab.\rho}\ \text{sen}u \cos^2 u}{R}, \quad y = \frac{\sqrt{ab.\rho}\ \cos u\ \text{sen}^2 u}{R},$$

d'onde per la $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, si deduce

$$z^2 = 1 - \rho^2 \frac{ab\ \text{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2}.$$

Sieno sempre x', y' le derivate relative a ρ, ed x_1, y_1 le relative ad u, e pongasi in queste ultime per un istante

$$\cos u = U,$$

sarà

$$x' = \frac{\sqrt{ab}.\text{sen}u \cos^2 u}{R}, \quad y' = \frac{\sqrt{ab}.\cos u\ \text{sen}^2 u}{R}$$

$$x_1 = \sqrt{ab}.\rho \cos u \left[\frac{-2bc + (4bc - ab - ac)U^2 + 2(ab + ac - bc)U^4 - abU^6}{R^3}\right]$$

$$y_1 = \sqrt{ab}.\rho\ \text{sen}u \left[\frac{-bc + 3bcU^2 + (ab + 2ac - 2bc)U^4 - abU^6}{R^3}\right].$$

Formando con queste derivate le differenze dei prodotti $x' y_1$, $x_1 y'$, il numeratore conterrà il valore di R^2, e perciò

$$x' y_1 - x_1 y' = \frac{ab\rho\ \text{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2},$$

d'onde

$$dxdy = \frac{ab\rho\ \text{sen}^2 u \cos^2 u\ d\rho\ du}{R^2},$$

Avvertendo dunque al valore di z, ed il tutto sostituito nell' integrale della superficie sferica, ed integrando entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, $u = 0$, $u = 45°$, si avrà per l' area sferica della nostra curva

$$S = 8ab \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \int_0^1 \frac{\rho\ d\rho\ du\ \text{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2 \sqrt{\left(1 - \frac{ab\ \text{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2} \cdot \rho^2\right)}}.$$

Dalla integrazione relativa a ρ deduciamo

$$\int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\left(1-\frac{\rho^2 ab\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}{R^2}\right)}} = \frac{R^2}{ab\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u} - \frac{R\sqrt{(R^2 - ab\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u)}}{ab\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}$$

Sostituendo si troverà

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{du\sqrt{[bc + c(a-b)\cos^2 u]}}{\sqrt{[bc + (ab + ac - bc)\cos^2 u - ab\cos^4 u]}}\right].$$

Nell'ipotesi di $a = b$, si ha

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \sqrt{c}.\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{du}{\sqrt{(c + a\cos^2 u - a\cos^4 u)}}\right],$$

ed allora l'integrale del secondo membro riducesi ad un trascendente ellittico completo di prima specie. Infatti ponendo $2u = \frac{\pi}{2} - \varphi$, perciò ai limiti $u = 0$, $u = \frac{\pi}{4}$, corrispondono $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$; rovesciando quindi i limiti col cangiamento di segno, e facendo

$$k^2 = \frac{a}{4c + a}$$

si otterrà

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{(4c + a)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi)}}\right],$$

ossia

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{c}.F(k)}{\sqrt{(4c + a)}}\right].$$

Sostituendo nuovamente c^2, a^2 invece di c, a il valore di S diviene

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \frac{cF(k)}{\sqrt{(4c^2 + a^2)}}\right]$$

ed il quadrato del modulo,

$$k^2 = \frac{a^2}{4c^2 + a^2} .$$

10. Un'altra applicazione la desumeremo da una curva piana, che può derivarsi nel seguente modo. Quando si cerchi la natura della linea alla quale sieno tangenti le rette perpendicolari all'estremità di tutti i diametri di un ellisse data, si giunge a riconoscere che la linea in questione è algebrica, e di sesto ordine. In una nota pubblicata nella Raccolta scientifica di marzo 1846, mostrai che se $x = a\cos\varphi$, $y = b\,\mathrm{sen}\varphi$ sieno l'equazioni di un ellisse, le coordinate x, y della nuova curva, sono

$$x = \frac{\cos\varphi}{a}[a^2 + (a^2 - b^2)\mathrm{sen}^2\varphi] ;$$

$$y = \frac{\mathrm{sen}\varphi}{a}[b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi]$$

quindi come può vedersi nell' indicata nota, facendo l'eliminazione dell'angolo φ trovai un'equazione di sesto grado colle potenze pari tutte delle x, y, e con un termine indipendente. Questa curva è chiamata comunemente la curva di *Talbot*. Essa è dotata di un centro, di forma ovale, e passa pe' quattro vertici dell'ellisse. Per costruire sopra di una essa un cono di altezza c basterà sostituire $\frac{cx}{z}$, $\frac{cy}{z}$ invece di x, y, perciò l'equazione della superficie conica fra le coordinate x, y, z sarà la risultante ottenuta dall'eliminazione dell'angolo φ fra le due equazioni

$$\frac{cx}{z} = \frac{\cos\varphi}{a}[a^2 + (a^2 - b^2)\mathrm{sen}^2\varphi]$$

$$\frac{cy}{z} = \frac{\mathrm{sen}\varphi}{b}[b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi] .$$

Intersecando poi la superficie conica con una sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 ,$$

verrà delineata nella superficie sferica una linea, che nella sua figura somiglia alla detta curva di *Talbot*.

Infine l'eliminazione della z porgerà la curva di projezione nel piano xy, ed anche essa di sesto ordine; ma senza eseguire tutte queste operazioni, noi ci serviremo delle precedenti formole coll'angolo ausiliare φ, le quali si adoperano più facilmente nel problema della quadratura sferica.

11. Mutiamo le costanti a^2, b^2, c^2 in a, b, c, eleviamo al quadrato, e sostituiamo $r^2 = x^2 + y^2$, $z^2 = 1 - r^2$, si avrà

$$\frac{cx^2}{1-r^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a}[a + (a - b)\text{sen}^2\varphi]^2$$

$$\frac{cy^2}{1-r^2} = \frac{\text{sen}^2\varphi}{b}[b - (a - b)\cos^2\varphi]^2.$$

Sommando queste due equazioni, e riducendo tutto alle potenze di $\cos\varphi$, e ponendo

$$A = b(a-b)(2a-b),\ B = (a-b)^2(a-2b),\ C = -(a-b)^3,\ \cos\varphi = u$$

otteniamo

$$\frac{abcr^2}{1-r^2} = ab^2 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6,$$

d'onde prendendo

$$R^2 = ab(c + b) + Au^2 + Bu^4 + Cu^6$$

si troverà

$$r^2 = \frac{ab^2 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6}{R^2}.$$

Questo è il valore del quadrato del raggio vettore r condotto dal centro della curva di projezione ad un suo punto qualunque corrispondente al punto (x, y, z) della curva sferica. Una cosa importante da osservarsi è, che le due quantità componenti il valore di r^2 rimangono invariabili, se si muti a in b b in a, $\cos\varphi$ in $\text{sen}\varphi$, che anzi il numeratore è decomponibile in tre fattori, due dei quali sono ripetuti. Rappresentiamo con R_1^2 il numeratore di r^2, e sostituiamo nuovamente i valori di

A, B, C, e poniamo inoltre $(a-b)u^2=\omega$, si avrà

$$R_1^2=-[\omega^3-(a-2b)\omega^2-b(2a-b)\omega-ab^2].$$

Ora l'equazione $R_1^2=0$ si verifica non solo per $\omega=a$, ma ben anche per altre due radici eguali e negative, $\omega=-b$, perciò

$$R_1^2=-(\omega-a)(\omega+b)^2,$$

ovvero per la sostituzione di ω e di u, sarà

$$R_1^2=[a-(a-b)\cos^2\varphi][b+(a-b)\cos^2\varphi]^2.$$

Il valore di R_1^2 rimane evidentemente invariabile col cangiare a in b, b in a, $\cos\varphi$ in $\operatorname{sen}\varphi$. Di più fra le due quantità R^2, R_1^2 sussiste la relazione

$$R^2=abc+R_1^2$$

e rimarrà per conseguenza anche invariabile R^2 sotto il prefisso cangiamento: giova tuttavia di ottenere anche l'espressione di R^2 per le potenze ascendenti di $\operatorname{sen}\varphi$.

Sia $\operatorname{sen}\varphi=v$, avremo identicamente

$$R^2=ab(c+b)+A(1-v^2)+B(1-v^2)^2+C(1-v^2)^3.$$

Sviluppando il secondo membro, e fatto per brevità

$A_1=a(b-a)(2b-a)$, $B_1=(b-a)^2(b-2a)$, $C_1=-(b-a)^3$

si ha

$$R^2=ab(c+a)+A_1v^2+B_1v^4+C_1v^6.$$

Le nuove costanti A_1, B_1, C_1 si deducono dalle precedenti A, B, C col solo cangiamento di a in b e di b in a. Ciò premesso otteniamo

$$1-r^2=z^2=\frac{abc}{R^2}$$

come dalle prime equazioni di questo parag.

$$x^2=\frac{b\cos^2\varphi[2a-b-(a-b)\cos^2\varphi]^2}{R^2}$$

$$y^2=\frac{a\operatorname{sen}^2\varphi[b-(a-b)\cos^2\varphi]^2}{R^2}.$$

Questi sono quei valori che convenientemente modificati ci occorreranno nella ricerca dell'area sferica in questione.

12. Come già si è fatto nelle precedenti applicazioni trasformiamo l'integrale definito

$$S = \iint \frac{dxdy}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}} \cdot$$

in altre variabili. Prendendo sempre un raggio ρ entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, i valori di x, y nel problema del quale ora ci occupiamo, saranno

$$x = \sqrt{b}.\frac{\rho \cos\varphi\,[2a - b - (a - b)\cos^2\varphi]}{R}$$

$$y = \sqrt{a}.\frac{\rho \operatorname{sen}\varphi\,[b - (a - b)\cos^2\varphi]}{R},$$

dai quali in forza del valore di R_1^2, si ha

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - \rho^2 \frac{R_1^2}{R^2}.$$

Le derivate parziali x', y' relative a ρ si riducono evidentemente ai coefficienti di ρ, e sono

$$x' = \sqrt{b}.\frac{\cos\varphi\,[2a - b - (a - b)\cos^2\varphi]}{R}$$

$$y' = \sqrt{a}.\frac{\operatorname{sen}\varphi\,[b - (a - b)\cos^2\varphi]}{R}.$$

Per le derivate x_1, y_1 relative all'angolo φ prendiamo per ora il valore della x, ed eleviamo al quadrato, si avrà col moltiplicare per R^2

$$R^2 x^2 = b\rho^2 \cos^2\varphi\,[2a - b - (a - b)\cos^2\varphi]^2.$$

Differenziamo relativamente a φ, e trasportiamo nel secondo membro i termini provenienti dalla differenziazione di R^2, e poniamo

$$L = 2a - b - (a - b)\cos^2\varphi,\quad M = 3(a - b)\cos^2\varphi - (2a - b)$$

$$N = A + 2B\cos^2\varphi + 3C\cos^4\varphi$$

avremo

$$R^2 x dx = \text{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi \, (b\rho^2 . L . M + N x^2)$$

e sostitnendoci nuovamente il valore di x^2, si ha

$$R^2 x dx = \frac{b\rho^2 \text{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi \, L.(MR^2 + LN\cos^2\varphi)}{R^2} \quad \ldots\ldots (m)$$

Si eseguiscano nel secondo membro le moltiplicazicni e riduzioni col sostituire nuovamente i valori di A, B, C, L, M, N, e pongasi

$$\alpha = -ab(c+b)(2a-b), \quad \beta = 3ab\,(c+b)(a-b)$$

$$\gamma = a(a-b)^2(2a-b), \quad \delta = -3a(a-b)^3,$$

otterremo

$$x_1 = \sqrt{b}\,\frac{\rho\,\text{sen}\varphi\,(\alpha + \beta\cos^2\varphi + \gamma\cos^4\varphi + \delta\cos^6\varphi)}{R^3}.$$

Per la derivata y_1 basterà mutare a in b, e b in a, senφ, cosφ in cosφ, senφ, e dφ in $-$ dφ, e siccome il valore di R rimane invariabile da questo cangiamento, ne segue, che posto

$$\alpha' = -ab(c+a)(2b-a), \quad \beta' = 3ab(c+a)(b-a)$$

$$\gamma' = b(b-a)^2(2b-a), \quad \delta' = -3b(b-a)^3,$$

si avrà

$$y_1 = -\sqrt{a}\,\frac{\rho\cos\varphi\,(\alpha' + \beta'\text{sen}^2\varphi + \gamma'\text{sen}^4\varphi + \delta'\text{sen}^6\varphi)}{R^3}.$$

Non sono queste le forme più comode delle derivate per ultimare semplicemente la risoluzione del problema. Partiamo piuttosto dalla formola (m) e troviamone una somigliante pel differenziale della y. A questo oggetto si osservi che il valore di M rimane invariabile alla mutazione di a, b, cosφ in b, a, senφ, onde richiamando il significato di A_1, B_1, C_1 nel parag. 11, e ponendo

$$L_1 = 2b - a - (b-a)\text{sen}^2\varphi,$$

$$N_1 = A_1 + 2B_1\text{sen}^2\varphi + 3C_1\text{sen}^4\varphi,$$

si avrà

$$R^2 y dy = \frac{a\,\rho^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\varphi\, L_1(MR^2 + L_1 N_1 \operatorname{sen}^2\varphi)}{R^2} \quad \ldots\ldots (n)$$

In fine tanto da questa formola quanto dalla (m), otteniamo per la sostituzione dei primitivi valori di x, y le derivate

$$x_1 = \sqrt{b}\,\frac{\rho \operatorname{sen}\varphi\,(MR^2 + LN\cos^2\varphi)}{R^3}$$

$$x_1 = -\sqrt{a}\,\frac{\rho \cos\varphi\,(MR^2 + L_1 N_1 \operatorname{sen}^2\varphi)}{R^3}.$$

Queste saranno le espressioni delle derivate, che si adattano più speditamente alle operazioni analitiche. Componiamo infatti i prodotti $x'y$, $x_1 y'$, e pongasi per un'istante

$$P = b + (a - b)\cos^2\varphi$$

e si ritenga $u = \cos\varphi$, $v = \operatorname{sen}\varphi$, otterremo

$$x'y_1 - x_1 y' = -\sqrt{ab}\,\frac{\rho\,[MR^2 P + LL_1(N + N_1)u^2 v^2]}{R^4}.$$

Si riprendano i valori di N, N_1 ed ordiniamo relativamente alle potenze di $u = \cos\varphi$, avremo

$$N + N_1 = A + A_1 + 2B_1 + 3C_1 + 2(B - B_1 - 3C_1)u^2 + 3(C + C_1)u^4,$$

ove sostituendo i valori di A, B.... tutti i termini si annullano; perciò si ottiene definitivamente

$$x'y_1 - x_1 y' = \sqrt{ab}\,\frac{\rho\,[b + (a-b)u^2]\,[2a - b - 3(a-b)u^2]}{R^2}.$$

Questa è la forma più semplice che possa ottenersi pel valore del primo membro. Siccome poi nell'integrale esprimente la quadratura sferica all'elemento $dx\,dy$ deve sostituirsi il nuovo elemento differenziale $(x'y_1 - x_1 y')\,d\rho\,d\varphi$, così facendo l'intera sostituzione nella formola riportata al principio di questo parag. ed integrando entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, avremo

$$S=4\sqrt{ab}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{[b+(a-b)u^2][2a-b-3(a-b)u^2]\rho\, d\rho\, d\varphi}{R^2\sqrt{\left(1-\frac{\rho^2 R_1^2}{R^2}\right)}}$$

Integriamo relativamente a ρ, sarà dopo la sostituzione

$$S=4\sqrt{ab}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{[b+(a-b)u^2][2a-b-3(a-b)u^2]d\varphi}{R_1^2}\right.$$

$$\left.-\sqrt{abc}.\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{[b+(a-b)u^2][2a-b-3(a-b)u^2]d\varphi}{R_1^2 R}\right].$$

Da altra parte si è veduto nel parag. 11 che per R_1^2, si ha

$$R_1^2=[a-(a-b)u^2][b+(a-b)u^2]^2,$$

perciò

$$4=4\sqrt{ab}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{[2a-b-3(a-b)u^2]d\varphi}{[a-(a-b)u^2][b+(a-b)u^2]}\right.$$

$$\left.-\sqrt{abc}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{[2a-b-3(a-b)u^2]d\varphi}{[a-(a-b)u^2][b+(a-b)u^2]R}\right].$$

Il primo degli integrali si trova in termini algebrici, ma il secondo col richiamare il valore della quantità irrazionale R dipende dai trascendenti ultraellittici. Per giungere infine alle riduzioni ultime decomponiamo in frazioni semplici il coefficiente razionale di $d\varphi$, ed osserviamo che

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{a-(a-b)\cos^2\varphi}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{b+(a-b)\cos^2\varphi}=\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

si otterrà col sostituire nuovamente a^2, b^2, c^2 invece di a, b, c

$$S=4ab.\left[\frac{\pi}{2ab}-2\,abc\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{[b^2+(a^2-b^2)\cos^2\varphi]R}\right.$$

$$\left.+abc\int_0^{\pi\frac{1}{2}}\frac{d\varphi}{[a^2-(a^2-b^2)\cos^2\varphi]R}\right],$$

ove per la R si ha come dal parag. 11,

$$R^2 = a^2b^2c^2 + [a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi][b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2\varphi]^2,$$

la irrazionale R contenendo le potenze seste di $\cos\varphi$, i due integrali non sono riducibili ai trascendenti ellittici delle tre note specie.

13. Prendiamo ancora per base di un cono una curva di quarto ordine, derivata dall'ellisse secondo una certa legge, la qual curva vien conosciuta comunemente sotto il nome di *curva dei parametri*. Un'ellisse di semiassi principali a, b coll'origine al centro, ha per equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

ed il parametro $p = \frac{2b^2}{a}$, la distanza c del foco dal centro è $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, e si trova col sostituire nell'equazione della curva $\frac{1}{2}p$ invece della y. Sieno ora m, n due semiassi dell'ellisse, obliqui e conjugati, l'equazione della curva riferita ai nuovi assi sarà sempre della forma

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1;$$

e generalizzando la definizione del parametro col fare per $m > n$, $p_1 = \frac{2n^2}{m}$, è evidente che ad una ordinata eguale ad $\frac{1}{2}p_1$, corrisponderà un'ascissa $c_1 = \sqrt{(m^2 - n^2)}$. Ciò posto le coordinate $\frac{1}{2}p_1$, c_1 sono variabili per ogni sistema di assi obliqui e diametrali, in modo che segnando tutti i punti nel piano dell'ellisse per ogni sistema di assi diametrali risulterà una nuova linea, della quale è facile rintracciar l'equazione. Osserviamo primieramente che questa curva passa pe' due fochi dell'ellisse, mentre nei vertici le tre grandezze m, n, c, si riducono ad a, b, c. La curva in questione passerà anche pel centro, infatti è noto, che nell'ellisse esiste un sistema di assi obliqui diametrali eguali inclinati fra loro del minimo angolo: in questo sistema si avrà $c_1 = 0$, perciò il centro sarà un

punto della nuova curva. Questo ragionamento potendosi estendere a tutti i quattro rami dell'ellisse, ne viene che la nuova curva sarà composta di quattro rami chiusi eguali e simili, che si riuniscono nel centro, punto doppio della medesima, e la sua figura sarà al tutto somigliante alla *lemniscata*. Per trovare la sua equazione, riferiamo l'ellisse e la nuova curva coll'origine al centro agli assi principali della stessa ellisse, e dal centro C conduciamo un raggio vettore m, e prendiamo sulla sua direzione a partir da C una lunghezza $c_1 = \sqrt{(m^2 - n^2)}$, ove n sia il semiasse conjugato ad m. Ciò posto è chiaro che l'estremità del semiasse m appartiene ad un punto dell'ellisse e l'estremità della lunghezza c_1 ad un punto della nuova curva, perciò il centro, e i due punti coorrispondenti alle due curve sono in linea retta. Sieno adunque x, y le coordinate di un punto qualunque dell'ellisse, ed X, Y di un punto corrispondente della nuova curva, si avrà facilmente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y}, \quad m^2 = x^2 + y^2$$

$$X^2 + Y^2 = m^2 - n^2, \quad a^2 + b^2 = m^2 + n^2.$$

Eliminiamo tra le due ultime il semisase a, e cangiamo m in r, avremo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$2r^2 = X^2 + Y^2 + a^2 + b^2.$$

Dalla seconda deduciamo

$$\frac{x^2}{X^2} = \frac{y^2}{Y^2} = \frac{x^2 + y^2}{X^2 + Y^2} = \frac{r^2}{X^2 + Y^2},$$

d'onde

$$x^2 = \frac{X^2(X^2 + Y^2 + a^2 + b^2)}{2(X^2 + Y^2)}$$

$$y^2 = \frac{Y^2(X^2 + Y^2 + a^2 + b^2)}{2(X^2 + Y^2)}.$$

Questi valori sostituiti nell'equazione dell'ellisse danno

$$(X^2 + Y^2)(a^2Y^2 + b^2X^2) = (a^2 - b^2)(b^2X^2 - a^2Y^2).$$

La nuova curva è del quarto ordine, e la precedente trovasi già esposta dal Capitano di artiglieria Sig. *Jacob* (*). L'analisi della equazione trovata conduce a quelle conseguenze di sopra enunciate. Per l'equazione polare ponendo

$$X = R\cos u\,, \quad Y = R\,\mathrm{sen}\,u$$

si ha

$$R^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2\cos^2 u - a^2\mathrm{sen}^2 u)}{a^2\mathrm{sen}^2 u + b^2\cos^2 u},$$

la quale si potrebbe anche trovare immediatamente dalla relazione fra i raggi r, R delle due curve, pe'quali si ha

$$2r^2 = R^2 + a^2 + b^2\,,$$

mentre l'angolo polare u essendo il medesimo sotto due punti corrispondenti delle due curve, si avrà nell'ellisse

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2 u + a^2\mathrm{sen}^2 u},$$

d'onde si trae il valore di R^2. È importante poi di osservare che verificando l'equazione dell' ellisse per mezzo delle sostituzioni

$$x = a\cos\theta\,, \quad y = b\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \quad r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\mathrm{sen}^2\theta$$

si ricaverà per la nuova curva, l'equazione

$$R^2 = (a^2 - b^2)\cos 2\theta\,,$$

la quale ha una somiglianza coll'equazione polare della *lemniscata*. Fra gli angoli u, θ snssiste la relazione

$$a\,\mathrm{tang}\,u = b\,\mathrm{tang}\,\theta\,.$$

Infine osserviamo, che come si sono ottenuti i valori delle x, y espressi per le X, Y della nuova curva, così potremo ottenere reciprocamente i valori delle X , Y per le x , y. Infatti

(*) Terquem. Annales de Mathé. Vol. 2., pag. 138. An. 1843.

dalle equazioni simultanee

$$X = R\cos u\,,\quad Y = R\,\mathrm{sen}\,u\,,\quad x = r\cos u\,,\quad y = r\,\mathrm{sen}\,u$$

$$2r^2 = R^2 + a^2 + b^2$$

ricaviamo

$$X = \frac{x}{r}\sqrt{(2r^2 - a^2 - b^2)},\qquad Y = \frac{y}{r}\sqrt{(2r^2 - a^2 - b^2)},$$

d'onde

$$X = \frac{x\sqrt{[2(x^2+y^2) - (a^2+b^2)]}}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$Y = \frac{y\sqrt{[2(x^2+y^2) - (a^2+b^2)]}}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

Sarebbe assai facile di esprimere i medesimi valori per uno degli angoli u, o θ, il che per brevità tralasciamo di eseguire.

14. Sia dunque la curva di quarto ordine

$$(x^2+y^2)(a^2y^2+b^2x^2) = (a^2-b^2)(b^2x^2-a^2y^2)$$

e si costruisca sopra di essa un cono di altezza c con l'origine alla sua sommità, avremo per l'equazione della sua superficie

$$c^2(x^2+y^2)(a^2y^2+b^2x^2) = (a^2-b^2)(b^2x^2-a^2y^2)z^2.$$

Intersecando questo cono di quarto ordine con una sfera concentrica

$$x^2+y^2+z^2 = 1\,,$$

la curva sferica d'intersezione sarà somigliante nella sua figura a quella della base conica. Eliminiamo la z, e per fissare le idee sia $c^2 > a^2 - b^2$, avremo per la projezione della curva sferica nel piano delle xy

$$(x^2+y^2)[b^2(a^2-b^2+c^2)x^2 + a^2(b^2-a^2+c^2)y^2]$$
$$= (a^2-b^2)(b^2x^2-a^2y^2)\,,$$

ove i coefficienti di x^2, y^2 nel primo membro sono ambedue positivi: la sua equazione polare per la sostituzione di

$$x = r\cos u\,,\quad y = r\,\mathrm{sen}\,u$$

sarà

$$r^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2\cos^2 u - a^2\operatorname{sen}^2 u)}{b^2(c^2 + a^2 - b^2)\cos^2 u + a^2(c^2 + b^2 - a^2)\operatorname{sen}^2 u};$$

i limiti dell'angolo u sono per la quarta parte dell'estensione

$$u = 0\,, \quad u = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\right),$$

ove si ha

$$r^2 = \frac{a^2 - b^2}{c^2 + a^2 - b^2}\,, \qquad r = 0.$$

Di qui pe'valori di x, y, z col porre per brevità

$$R^2 = b^2(c^2 + a^2 - b^2)\cos^2 u + a^2(c^2 + b^2 - a^2)\operatorname{sen}^2 u$$

$$R_1{}^2 = b^2\cos^2 u - a^2\operatorname{sen}^2 u$$

si avrà

$$x = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}.R_1 \cos u}{R}\,, \quad y = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}.R_1 \operatorname{sen} u}{R}\,, \quad z = \frac{cR_1}{R}.$$

Questi valori appartengono nello stesso tempo ad un punto qualunque della curva sferica.

15. Nel preparare le diverse formole che ci serviranno nella quadratura della sua area, cangiamo per semplicità a^2, b^2, c^2 in a, b, c, e poniamo ancora

$$A = b(c + a - b), \quad B = a(c - a + b),$$

per ciò

$$R^2 = A\cos^2 u + B\operatorname{sen}^2 u\,, \quad R_1{}^2 = b\cos^2 u - a\operatorname{sen}^2 u\,;$$

i valori di x, y che dovremo assumere, saranno

$$x = \frac{\sqrt{(a - b)}.\rho R_1 \cos u}{R}\,, \quad y = \frac{\sqrt{(a - b)}.\rho R_1 \operatorname{sen} u}{R}\,,$$

d'onde

$$z = \sqrt{\left(1 - \frac{(a - b)R_1{}^2}{R^2}\rho^2\right)},$$

ove sempre deve prendersi la ρ entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$. Le derivate parziali relative ad ρ sono

$$x' = \frac{\sqrt{(a-b)}.R_1 \cos u}{R}, \quad y' = \frac{\sqrt{(a-b)}.R_1 \operatorname{sen} u}{R}.$$

Per le derivate x_1, y_1 relative all'angolo u prendiamo il valore della x, eleviamo al quadrato, e riduciamo tutto alle potenze di sen u, si avrà

$$R^2 x^2 = (a-b)\rho^2[b - (a+2b)\operatorname{sen}^2 u + (a+b)\operatorname{sen}^4 u].$$

Differenziando, e trasportando nel secondo membro i termini provenienti dalla differenziazione di R^2, sostituendo nuovamente il valore di x^2, e facendo di più

$$\alpha = Aa + Bb + Ab = b\,[c(2a+b) + b(a-b)]$$
$$\beta = 2A(a+b) = 2b(a+b)(c+a-b)$$
$$\gamma = (B-A)(a+b) = (a^2-b^2)(c-a-b),$$

otterremo

$$\frac{x\,dx}{du} = \frac{(a-b)\rho^2 \operatorname{sen} u \cos u\,[-\alpha + \beta \operatorname{sen}^2 u - \gamma \operatorname{sen}^4 u]}{[A + (B-A)\operatorname{sen}^2 u]^2},$$

d'onde per la sostituzione dei valori di x ed R, sarà

$$x_1 = -\frac{\sqrt{(a-b)}.\rho \operatorname{sen} u(\alpha - \beta \operatorname{sen}^2 u + \gamma \operatorname{sen}^4 u)}{R_1 R^3}.$$

Ripetendo nella stessa guisa le operazioni analoghe nella differenziazione della y^2, si avrà per la derivata

$$y_1 = \frac{\sqrt{(a-b)}.\rho \cos u\,[b^2(c+a-b) - \beta \operatorname{sen}^2 u - \gamma \operatorname{sen}^4 u]}{R_1.R^3}.$$

Determinati i valori delle quattro derivate formiamo la differenza dei prodotti $x'y_1$, x_1y', e poniamo

$$L = b^2(c+a-b), \quad M = -2b(bc - a^2 + b^2),$$
$$N = -(a^2-b^2)(c-a-b)$$

si otterrà

$$x'y_1 - x_1y' = \frac{(a-b)\rho\,[L + M\operatorname{sen}^2 u + N\operatorname{sen}^4 u]}{R^4}.$$

Ora la quantità che trovasi nel numeratore entro parentesi è

evidentemente eguale al prodotto $R^2 R_1^2$, perciò la precedente formola diverrà

$$x'y_1 - x_1 y' = \frac{(a-b)\rho R_1^2}{R^2}.$$

Si sostituisca adunque nel noto integrale della quadratura sferica l'elemento $(x'y_1 - x_1 y')\, d\rho\, du$ all'elemento $dxdy$, ed i limiti per la quarta parte dell'estensione saranno $\rho=0$, $\rho=1$, ed

$$u=0, \quad u=\text{arc. tang}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=\theta .$$

Avremo per la quadratura della nostra curva sferica l'integrale

$$S=4(a-b)\int_0^\theta\int_0^1 \frac{R_1^2\rho\, d\rho\, du}{R^2\sqrt{\left(1-\frac{(a-b)R_1^2}{R^2}\rho^2\right)}}.$$

Integriamo relativamente a ρ, abbiamo

$$\int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\frac{(a-b)R_1^2}{R^2}\rho^2}}=\frac{R^2}{(a-b)R_1^2}-\frac{R\sqrt{[R^2-(a-b)R_1^2]}}{(a-b)R_1^2}$$

d'onde per la sostituzione di R, R_1, il valore di S diviene

$$S=4\left[\int_0^\theta du-\sqrt{c}\int_0^\theta \frac{du\sqrt{[b+(a-b)\text{sen}^2u]}}{\sqrt{[A+(B-A)\text{sen}^2u]}}\right].$$

Il secondo degli integrali si riduce ad un trascendente ellittico di terza specie. È noto in generale che la formola differenziale

$$\frac{du}{\sqrt{(\alpha+\beta\,\text{sen}^2u)}\sqrt{(\gamma+\delta\,\text{sen}^2u)}}$$

si riporta alle formole differenziali dei trascendenti ellittici col fare una delle due trasformazioni

$$\text{tang}u=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\cdot\text{tang}\varphi, \quad \text{tang}u=\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+\delta}}\cdot\text{tang}\varphi,$$

ove uno dei prodotti $\alpha(\alpha+\beta)$, $\gamma(\gamma+\delta)$ sia positivo. Nel nostro caso possiamo fare $\alpha=b$, $\beta=a-b$, perciò

$$\operatorname{tang} u = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \operatorname{tang}\varphi ,$$

e quindi

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{b \operatorname{sen}^2\varphi}{a \cos^2\varphi + b \operatorname{sen}^2\varphi} , \quad \cos^2 u = \frac{a \cos^2\varphi}{a \cos^2\varphi + b \operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$du = \frac{\sqrt{ab}.d\varphi}{a \cos^2\varphi + b \operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$\sqrt{[A + (B - A)\operatorname{sen}^2 u]} = \frac{\sqrt{[Aa + (Bb - Aa)\operatorname{sen}^2\varphi]}}{\sqrt{(a \cos^2\varphi + b\operatorname{sen}^2\varphi)}} .$$

Ai limiti poi $u = 0$, $u = \theta = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ corrispondono i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, e perciò

$$\int_0^\theta \frac{du\sqrt{[b + (a - b)\operatorname{sen}^2 u]}}{\sqrt{[A + (B - A)\operatorname{sen}^2 u]}} = ab\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{(a\cos^2\varphi + b\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{[Aa - (Aa - Bb)\operatorname{sen}^2\varphi]}} .$$

L'integrale del secondo membro è un trascendente ellittico di terza specie : infatti ponendo

$$n = -\frac{(a - b)}{a} , \quad k^2 = \frac{Aa - Bb}{Aa} = 1 - \frac{[c - (a - b)]}{c + a - b}$$

per $a > b$, il parametro n sarà negativo, e $k < 1$ pel valore del modulo, e l'ampiezza sarà data da un angolo di 45°; d'onde per la cognita notazione di Legendre otterremo

$$\int_0^\theta \frac{du\sqrt{[b + (a - b)\operatorname{sen}^2 u]}}{\sqrt{[A + (B - A)\operatorname{sen}^2 u]}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(c + a - b)}} . \Pi\left(n , k, \frac{\pi}{4}\right),$$

dunque per l'area della nostra curva sferica si ha

$$S = 4\left[\operatorname{arc\,tang.}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{(c + a - b)}} \Pi\left(n , k, \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Sostituiamo nuovamente a^2, b^2, c^2 invece di a, b, c pel modulo k, e parametro n, abbiamo

$$k^2 = \frac{2(a^2 - b^2)}{c^2 + a^2 - b^2}, \quad n = -\frac{(a^2 - b^2)}{a^2}$$

e quindi

$$S = 4\left[\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{bc}{\sqrt{(c^2 + a^2 - b^2)}}\,\Pi\left(n, k, \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Onde k sia minore dell'unità, supporremo per fissare le idee $c^2 > a^2 - b^2$.

16. Aggiungeremo ancora in poche parole l' analisi per la ricerca dell'area dell'ellisse sferica, la quale quantunque già determinata dal sig. *Catalan*, sarà tuttavia qui riportata. Sia dunque l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'equazione del cono avente la detta ellisse per base, e per origine il centro della superficie sarà

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

L'intersezione della sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

determinerà l' ellisse sferica. Eliminiamo la z si avrà per la projezione della curva sferica nel piano delle xy, l'ellisse piana

$$\frac{x^2(c^2 + a^2)}{a^2} + \frac{y^2(c^2 + b^2)}{b^2} = 1.$$

Facciamo la sostituzione di

$$x = r\cos u, \qquad y = r\,\text{sen}\,u$$

avremo per la sua equazione polare

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2(c^2 + a^2)\cos^2 u + a^2(c^2 + b^2)\text{sen}^2 u}.$$

Di qui se per brevità poniamo

$$R^2 = b^2(c^2 + a^2)\cos^2 u + a^2(c^2 + b^2)\text{sen}^2 u$$

i valori di x, y, z daranno

$$x = \frac{ab\cos u}{R}, \quad y = \frac{ab\,\mathrm{sen}\,u}{R}, \quad z = \frac{c\sqrt{(b^2\cos^2 u + a^2\mathrm{sen}^2 u)}}{R}.$$

Onde queste espressioni sieno applicabili alla ricerca dell'area dell'ellisse sferica, converrà prendere una variabile ausiliare ρ entro i limiti di $\rho = 0$, $\rho = 1$, per poter quindi ottenere il nuovo elemento differenziale da sostituirsi invece di $dx\,dy$: pe'valori adunque di x, y, z si avrà

$$x = \frac{ab\,\rho\cos u}{R}, \quad y = \frac{ab\,\rho\,\mathrm{sen}\,u}{R}, \quad z = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2b^2\rho^2}{R^2}\right)}.$$

Le derivate poi relative a ρ ed u saranno

$$x' = \frac{ab\cos u}{R}, \quad y' = \frac{ab\,\mathrm{sen}\,u}{R},$$

$$x_1 = -\frac{a^3b(c^2 + b^2)\rho\,\mathrm{sen}\,u}{R^3}, \quad y_1 = \frac{b^3a(c^2 + a^2)\rho\cos u}{R^3},$$

dalle quali equazioni si trae facilmente

$$x'y_1 - x_1y' = \frac{a^2b^2\rho}{R^2}.$$

Sostituendo pertanto tutti questi valori nell'integrale duplicato rappresentante la quadratura sferica, ed integrando entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$ $\quad u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$ si avrà per l'intera ellisse sferica

$$S = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{a^2b^2\rho\,d\rho\,du}{R^2\sqrt{\left(1 - \frac{a^2b^2\rho^4}{R^2}\right)}}.$$

Dalla prima integrazione abbiamo

$$\int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2b^2\rho^2}{R^2}\right)}} = \frac{R^2}{a^2b^2} - \frac{R^2}{a^2b^2}\cdot\frac{\sqrt{c^2(a^2\mathrm{sen}^2 u + b^2\cos^2 u)}}{R},$$

perciò

$$S = 4\left(\frac{\pi}{2} - c\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du\sqrt{(a^2\mathrm{sen}^2 u + b^2\cos^2 u)}}{\sqrt{[b^2(c^2 + a^2)\cos^2 u + a^2(c^2 + b^2)\mathrm{sen}^2 u]}}\right).$$

L'integrale del secondo membro riducesi ad un trascendente ellittico completo di terza specie, e la trasformazione delle variabili si opera in un modo al tutto somigliante a quello già praticato nel precedente parag. 15. Infatti ponendo

$$\tang u = \frac{b}{a} \tang \varphi$$

i limiti dell'integrazione saranno i medesimi; perciò se si rappresenti con U questo integrale si avrà

$$U = ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \sqrt{[c^2 + a^2 - (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 u]}}.$$

Infine col porre

$$n = -\frac{(a^2 - b^2)}{a^2}, \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{c^2 + a^2}$$

otterremo il trascendente ellittico di parametro n e di modulo k, vale a dire

$$U = \frac{b}{a\sqrt{(c^2 + a^2)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(1 + n \operatorname{sen}^2 \varphi . \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}}$$

$$= \frac{b}{a\sqrt{(c^2 + a^2)}} . \Pi(n, k).$$

Avremo dunque per l'area dell'ellisse sferica

$$S = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{bc}{a\sqrt{(c^2 + a^2)}} \Pi(n, k)\right).$$

Questa espressione è d'accordo, e coincide con quella trovata dal Sig. Catalan nel Giornale del Sig. Liouville, tom. 6.

17. Termineremo questa Memoria col fare un cenno sopra due curve piane, una di sesto ordine, e l'altra di quarto ambedue derivate dall'ellisse, o più generalmente da una sezione conica, e sopra le quali costruiti due coni, le aree delle loro intersezioni con una sfera concentrica dipendono dai trascendenti ultraellittici. La prima curva è il luogo geometrico della sommità di un angolo retto del quale i due lati sieno costantemente perpendicolari ad una conica data. Quando la conica

riducesi ad un ellisse, l'equazione della nuova curva sarà (*)

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)(a^2y^2+b^2x^2)^2=(a^2-b^2)^2(a^2y^2-b^2x^2)^2,$$

la quale trovasi anche più anticamente negli Annali di Matematica del Sig. Gergonne. La curva in questione è composta di quattro ovali, che si riuniscono nel centro dell'ellisse, che sarà nello stesso tempo un punto quadruplo della curva; ma conviene osservare che le due ovali corrispondenti all'asse maggiore dell'ellisse sono diverse dalle altre due corrispondenti all'asse minore. Costruendo pertanto un cono retto sopra questa curva, ed intersecato con una sfera concentrica, la quadratura dell'area sferica proveniente dalle due ovali eguali corrispondenti all'asse maggiore, sarà data dall'integrale doppio definito

$$S=4(a^2-b^2)^2\int_0^\theta\int_0^1\frac{(a^2\mathrm{sen}^2u-b^2\cos^2u)^2\rho\,d\rho\,du}{R^2R_1^2\sqrt{\left(1-\frac{(a^2-b^2)^2(a^2\mathrm{sen}^2u-b^2\cos^2u)^2}{R^2R_1^2}\rho^2\right)}},$$

ove

$$\theta=\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Le quantità poi R, R_1 sono formate col seguente modo. Sia c l'altezza del cono, e pongasi

$$A=b^2[c\sqrt{(a^2+b^2)}-(a^2-b^2)],\quad B=a^2[c\sqrt{(a^2+b^2)}+(a^2-b^2)]$$

$$A_1=b^2[c\sqrt{(a^2+b^2)}+(a^2-b^2)],\quad B_1=a^2[c\sqrt{(a^2+b^2)}-(a^2-b^2)]$$

si avrà

$$R^2=A\cos^2u+B\mathrm{sen}^2u,\qquad R_1^2=A_1\cos^2u+B_1\mathrm{sen}^2u.$$

Eseguita una prima integrazione relativamente a ρ, il valore di S si ridurrà ad un primo termine di forma finita: ed il secondo ad un integrale definito semplice dipendente dai trascendenti ultra-ellittici.

La seconda curva della quale vengo adar un rapido cenno è il luogo geometrico del punto medio di una retta data iscritta in una conica. Il Sig. Terquem nel volume quarto de'suoi Annali di Matematica p. 590, An. 1845 determina generalmente l'equa-

(*) Terquem. Annales de Mathém. Tom. 2, pag. 365, per *M. Vidal.*

zione di questa curva, che è di quarto ordine, e concentrica alla conica. Faremo qui osservare che la risoluzione di questo problema trovasi completa in una Dissertazione del signor Maurizio Steiner di Breslaw in data del 27 Febbrajo 1841 (*). Quando l'equazione della conica riducasi ad un ellisse, e sia $2c$ la grandezza della retta iscritta, l'equazione della curva derivata coll'indicata legge, come può vedersi nelle due citate opere dei Sigg. *Terquem* e *Steiner*, sarà

$$a^6y^4+b^6x^4+a^2b^2(a^2+b^2)x^2y^2=a^4b^2(a^2-c^2)y^2-a^2b^4(c^2-b^2)x^2,$$

Questa curva di quarto ordine concentrica all'ellisse offre delle varietà, secondo la condizione a cui è soggetta la retta $2c$, così se sia $c < a$, e $> b$, la forma della curva è somigliante alla lemniscata, ed avrà un punto doppio nel suo centro. La precedente equazione potrà anche scriversi

$$(a^4y^2+b^4x^2)(a^2y^2+b^2x^2)=a^2b^2[(a^4y^2+b^4x^2)-c^2(a^2y^2+b^2x^2)],$$

ove ponendo infine

$$R^2=a^4y^2+b^4x^2, \qquad R_1^2=a^2y^2+b^2x^2$$

si ridurrà ad

$$\frac{a^2b^2}{R_1^2}-\frac{c^2}{R^2}=1.$$

Costruendo poi sopra questa curva un cono, ed intersecandolo con una sfera concentrica, la quadratura dell'area sferica dipenderà da un integrale semplice definito che appartiene alla classe del trascendenti ultra-ellittici. Noi per brevità ci dispensiamo di riportare le diverse formole relative a queste ricerche.

Postscriptum. Diversi risultati ai quali siam giunti nella precedente Memoria possono anche rinvenirsi assai facilmente col fare direttamente uso delle coordinate sferiche. Riprendiamo

(*) Il titolo di questa Dissertazione è: « De loco geometrico centri lineae rectae definitae cujusdam longitudinis cujus termini in Peripheria lineae secundi ordinis moventur· » Vratislaviae. Typis Kupferianis.

la formola per le quadrature sferiche

$$S = \iint \frac{dx dy}{z} = \iint \frac{dx dy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}$$

e pongasi

$$z = \cos\varphi, \qquad x = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta.$$

Sieno x', y' le derivate parziali delle x, y, relative alla variabile φ ed x_1, y_1 le derivate relative a θ, avremo

$$x'y_1 - x_1y' = \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi,$$

quindi l'integrale duplicato si trasforma in

$$S = \iint \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

Integriamo relativamente a φ, e sia C una costante arbitraria dovuta all'integrazione, sarà

$$S = \int (C - \cos\varphi) \, d\theta,$$

Ora per $\varphi = 0$, $S = 0$, d'onde $C = 1$, e perciò

$$S = \int (1 - \cos\varphi) \, d\theta.$$

Questa è la nota formola per le quadrature in coordinate sferiche, della quale ne mostriamo due applicazioni.

Sia il cono di quarto ordine

$$(x^2 + y^2)^2 = z^2(a^2x^2 - b^2y^2)$$

concentrico alla sfera di raggio 1; si avrà per la sostituzione dei valori di x, y, z

$$\operatorname{tang}^2\varphi = a^2\cos^2\theta - b^2\operatorname{sen}^2\theta.$$

Di qui

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + a^2 - (a^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Integrando adunque fra i limiti

$$0 = 0, \quad \theta = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\right)$$

otterremo per l'intera area sferica proveniente dall' intersezione del cono, e della sfera concentrica

$$S = 4\left(\theta - \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{[1 + a^2 - (a^2 + b^2)\text{sen}^2\theta]}}\right).$$

Questa formola coincide con quella alla quale giungemmo nel parag. 3. Con la stessa facilità si otterrebbe la relativa quadratura sferica, quando si prendesse il cono di quarto ordine

$$(x^2 + y^2)^2 = z^2(a^2x^2 + b^2y^2).$$

Sia il cono ellittico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = z^2$$

avremo per la sostituzione dei valori delle x, y, z

$$\text{tang}^2\varphi = \frac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta},$$

d'onde

$$\cos^2\varphi = \frac{b^2 + (a^2 - b^2)\text{sen}^2\theta}{b^2(1 + a^2) + (a^2 - b^2)\text{sen}^2\theta},$$

Integrando dopo la sostituzione fra i limiti $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; si otterrà per l'intera area dell'ellisse sferica

$$S = 4\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{[b^2 + (a^2 - b^2)\text{sen}^2\theta]}}{\sqrt{[b^2(1 + a^2) + (a^2 - b^2)\text{sen}^2\theta]}}\, d\theta\right).$$

L'integrale del secondo membro si riduce ad un trascendente ellittico di terza specie per mezzo di una delle note trasformazioni, e che ci dispensiamo di riportare.

Roma 22 maggio 1849.

NUOVA DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI DI FOURIER

DEL SIG. D.r OSKAR SCHLOEMILCH

Professore all'Università di Jena.

(Estratta dal tom. 36 Gior. del Sig. Crelle di Berlino p. 268) (*)

Noi daremo qui una dimostrazione delle due formole

$$\frac{1}{2}\pi f(\gamma) = \int_0^\infty \cos\gamma u \, du \int_0^c f(t) \cos ut \, dt$$

$$\frac{1}{2}\pi f(\gamma) = \int_0^\infty \operatorname{sen}\gamma u \, du \int_0^c f(t) \operatorname{sen} ut \, dt$$

la quale non richiede che delle nozioni elementari, mentre che poi è perfettamente rigorosa.

Denotando per K il valore dell'integrale definito

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} z}{z} \, dz \qquad (**)$$

si ha facendo $z = mu$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mu}{u} \, du = K$$

purchè m sia una quantità positiva > 0. Di qui si trae

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{u} \, du + \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{u} \, du = 2K$$

(*) Si è creduto utile di riprodurre qui questa breve Memoria, ove si trovano delle formole che si suppongono dimostrate in uno opuscolo recentemente pubblicato dal dotto Professore di Jena, e che formerà il soggetto dell'articolo immediatamente susseguente. *B. T.*

(**) Si sà che questo valore è eguale ad $\frac{1}{2}\pi$, ma non è necessario di suppor cognito questo valore, mentre esso discenderà dalle stesse nostre formole.

se $a > b$ ed

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(b+a)u}{u}\,du + \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(b-a)u}{u}\,du = 0$$

Se $a < b$. Questi due risultati riuniti somministrano il teorema

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a u \cos b u}{u}\,du = K \qquad \text{se} \quad a > b$$
$$= 0 \qquad \text{se} \quad a < b$$

del quale se ne potranno fare le seguenti applicazioni.

1. Consideriamo l'integrale doppio

$$(2) \qquad P = \int_0^\infty \frac{\cos \gamma u}{u}\,du \int_0^c F(t) \operatorname{sen} u t\,dt$$

e supponiamo che la funzione $F(t)$ sia continua, e finita entro i limiti $t = 0$, $t = c$. Segue di qui che l'espressione

$$\frac{\cos \gamma u}{u} F(t) \operatorname{sen} u t$$

sarà continua, e finita entro i limiti $u = 0$, $u = \infty$, e $t = 0$, $t = c$: dunque sarà lecito d'invertire l' ordine delle integrazioni. Si otterrà in questa guisa

$$P = \int_0^c F(t)\,dt \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tu \cos \gamma u}{u}\,du$$

Conviene ora distinguere i due casi: $\gamma > c$, e $c > \gamma > 0$, Nel primo caso si ha (in forza di $c > t$) $\gamma > t$, e perciò l'integrale preso relativamente ad u, si annullerà, e resterà

$$(3) \qquad P = 0, \qquad \gamma > c.$$

Nell'altro caso di $c > \gamma > 0$ si potrà decomporre l'intervallo da 0 fino a c in due ultimi da 0 fino a γ, e da γ fino a c. Ciò da

$$P = \int_0^\gamma F(t)\,dt \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tu \cos \gamma u}{u}\,du + \int_\gamma^c F(t)\,dt \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tu \cos \gamma u}{u}\,du$$

Siccome si ha $\gamma > t$ per il primo di questi integrali, e $\gamma < t$ per il secondo, si ottiene

$$P = \int_0^c F(t)\, dt . K$$

Poniamo infine

$$\int F(t)\, dt = f(t), \quad \text{o } F(t) = f'(t)$$

avremo

$$\int_\gamma^c F(t)\, dt = f(c) - f(\gamma)$$

$$\int_0^c F(t) \operatorname{sen} ut\, dt = f(c) \operatorname{sen} cu - u \int_0^c f(t) \cos ut\, dt$$

Per mezzo di queste sostituzioni l'equazione seguente

$$\int_0^\infty \frac{\cos \gamma u}{u}\, du \int_0^c F(t) \operatorname{sen} ut\, dt = K \int_0^c F(t)\, dt$$

si cangia in

$$f(t) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} cu \cos \gamma u}{u}\, du - \int_0^\infty \cos \gamma u\, du \int_0^c f(t) \cos ut\, dt$$

$$= K\Big(f(c) - f(\gamma)\Big)$$

e siccome per $c > \gamma$ il primo integrale è eguale a K, e si ottiene

$$(4) \quad \int_0^\infty \cos \gamma u\, du \int_0^c f(t) \cos ut\, dt = K f(\gamma) \qquad c > \gamma > 0$$

Il valore dell'integrale doppio

$$\int_0^\infty \cos \gamma u\, du \int_0^c f(t) \cos ut\, dt$$

è dunque $Kf(\gamma)$ se $c > \gamma > 0$, e zero per $\gamma > c$. È facile di vedere che queste considerazioni sussistono ancora nel caso di $\gamma = 0$, e ciò rende facile la determinazione di K. Pren-

dendo per esempio $f(t) = e^{-\alpha t}$, $c = \infty$, si trova

$$\int_0^\infty \frac{\alpha \cos \gamma u}{\alpha^2 + u^2} du = Ke^{-\alpha\gamma}$$

ciò che dà $\frac{1}{2}\pi = K$ per $\gamma = 0$.

Le medesime trasformazioni applicate all' integrale (2) sono ancora applicabili all'integrale

$$Q = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \gamma u}{u} du \int_0^c F(t) \cos ut \, dt$$

e si troverà che questo è eguale ad

$$K\int_0^\beta F(t)\, dt, \qquad \text{se} \qquad \gamma > c$$

e a

$$K\int_0^\gamma F(t)\, dt \qquad \text{se} \qquad c > \gamma > 0$$

Facendo $F(t) = f'(t)$, si vedrà facilmente che il valor dell' integrale

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}\gamma u \, du \int_0^c f(t) \operatorname{sen} ut \, dt$$

è eguale a $Kf(\gamma)$ se $c > \gamma > 0$, ed a zero per $\gamma > c$. Nel caso di $\gamma = 0$ l'integrale si annulla, e non porge il valore di $Kf(c)$. Per il medesimo metodo si giunge al teorema più generale

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty \cos \gamma u \, du \int_a^b f(t) \cos ut \, dt \\ \displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} \gamma u \, du \int_a^b f(t) \operatorname{sen} ut \, dt \end{array}\right\} = Kf(\gamma),$$

sotto la condizione che γ sia entro i limiti a, e b. Per ogni altro valore positivo di γ, gli integrali si ridurranno a zero. Non è difficile di estendere questo teorema al caso, ove la continuità della funzione è interrotta nell'intervallo $t = a$ fino a $t = b$, purchè le interruzioni non sieno infinite.

SOPRA LE TRASFORMAZIONI GENERALI DI DATE FUNZIONI

(Estratto da un opuscolo del Sig. O. Schloemilch Professore all'Università di Jena.)

MEMORIA

DAL SIG. GIOVANNI NOVI

Professore di Meccanica e di Artiglieria nel Liceo militare di Firenze.

Il signor Oskar Schloemilch professore all'università di Jena, già chiaro per importanti memorie inserite nel Giornale di Crelle, e per altri gravi lavori sopra svariati soggetti di analisi, ha pubblicato nello scorso anno un opuscolo intitolato: « Trasformazione generale di date funzioni (*) » nel quale si propone la seguente quistione.

Data tra una variabile dipendente y e una variabile indipendente x una equazione della forma

$$x = \psi(y),$$

dedurne il valore di y in funzione di x. E poscia applica il metodo seguito per la risoluzione di questo problema ad un altro più generale, nel quale si tratta di ottenere non il valore di y ma quello di una data funzione di y; p. e. $f(y)$ in x. L'importanza di questa quistione verrà di leggieri veduta da chiunque consideri che in essa è contenuta la risoluzione di tutte le possibili equazioni sì algebriche che trascendenti. Newton e poscia Pfaff si sono occupati di questo soggetto, ma il processo del primo, malgrado la sua apparente semplicità, è laboriosissimo, e quello del secondo va incontro a varie restrizioni che tolgono al metodo la sua generalità. Per ovviare

(*) Die Allgemeine Umkehrung gegebener Funktionen Eine Monographie von D. Oskar Schloemilch Professor an der Universität Jena. Halle 1849.

a questi inconvenienti il sig. Schloemilch ha ripreso di nuovo la soluzione del problema, ed è giunto a risultamenti di gran lunga più eleganti e più generali di quelli trovati per lo innanzi. Ondechè noi stimiamo utile darne un qualche cenno, estraendo dall'opuscolo del dotto professore tedesco l'ultima parte, nella quale, invece di trasformare la data funzione mercè lo sviluppo in serie, come ha fatto nella prima parte, si serve per lo stesso scopo degl'integrali definiti, per mezzo dei quali ottiene una formola generalissima. in molti casi, più utile di una serie.

I.

La trasformazione di una data funzione può presentarsi sotto una seconda forma degna di considerazione, perchè non consiste in uno sviluppo in serie, ma sibbene in una integrazione fra dati limiti. Noi dimostreremo che la trasformazione dell'equazione $x = \psi(y)$ può sempre essere espressa mediante integrali della forma

$$\int_0^\infty U \cos x\,u\,du \qquad \text{ovvero} \qquad \int_0^\infty V \operatorname{sen} x\,u\,du,$$

ove U e V dipendono solamente da u, e x resta costante nell' integrazione da eseguirsi rispetto a u. Questa maniera di esposizione offre il vantaggio di dare y sotto forma finita, la quale in molte circostanze è assai più comoda e maneggiabile di una serie infinita.

Il nostro metodo riposa sopra le due formole date da Fourier

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos x\,u\,du \int_0^c F(t)\cos ut\,dt$$

$$c > x \geqq 0$$

e

$$F(x) = \frac{2}{2}\int_0^\infty \operatorname{sen} x\,u\,du \int_0^c F(t)\operatorname{sen} ut\,dt$$

$$c > x > 0$$

nelle quali x è da riguardare come costante nell'integrazione successiva rispetto a t e u.

Poichè in un integrale definito è indifferente con quali lettere s'indicano le variabili rispetto alle quali si esegue l'integrazione, le due formole di Fourier possono mettersi sotto la forma seguente,

$$(1)\quad \begin{cases} F(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \cos xu\,du \int_0^c F(x)\cos ux\,dx \\ \qquad\qquad c > x \geqq 0 \end{cases}$$

e

$$(2)\quad \begin{cases} F(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} xu\,du \int_0^c F(x)\operatorname{sen} ux\,dx \\ \qquad\qquad c > x > 0 \end{cases}$$

tenendo presente che dapprima bisogna integrare rispetto a x, considerando u costante, e poscia integrare rispetto a u, x essendo costante.

Sia $x = \psi(y)$ la funzione data e si debba dedurne

$$f(y) = f[\varphi(x)]\,;$$

facciamo

$$F(x) = f[\varphi(x)] = f(y),$$

avremo

$$\int F(x)\cos ux\,dx = \int f(y)\cos ux\,dx$$

$$= f(y)\,\frac{\operatorname{sen} ux}{u} - \frac{1}{u}\int f'(y)dy \operatorname{sen} ux$$

$$= f(y)\,\frac{\operatorname{sen} ux}{u} - \frac{1}{u}\int f'(y) \operatorname{sen}[u\psi(y)]\,dy$$

Prendendo l'integrale del primo membro fra i limiti $x=c$, ed $x = 0$, ai quali corrispondono i valori $y = \gamma$ e $y = \eta$, e supponendo che $f(\eta)$ non è infinita, si ha

$$\int_0^c F(x)\cos u\,x\,dx = f(\gamma)\frac{\operatorname{sen} uc}{u} - \frac{1}{u}\int_\eta^\gamma f(y)\operatorname{sen}[\,u\psi(y)\,]\,dy$$

e se sostituiamo questo valore nella formola (1), avremo

$$F(x) \text{ ovvero } f(y) = \frac{2}{\pi} f(\gamma)\int_0^\infty \frac{\cos x\,u \operatorname{sen} cu}{u}\,du$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos x\,u}{u}\,du\int_\eta^\gamma f'(y)\operatorname{sen}[\,u\,\psi(y)\,]\,dy\,.$$

Siccome è noto il primo integrale $= \frac{\pi}{2}$ finchè $\pi > c$, perciò, essendo quì soddisfatta questa condizione, avremo la bella formola di trasformazione

$$(3)\quad \begin{cases} f(y) = f(\gamma) - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}du\int_\eta^\gamma f'(y)\operatorname{sen}[\,u\,\psi(y)\,]\,dy \\ \psi(\gamma) > x \geqq 0 \end{cases}$$

Si procede in un modo affatto simile pel secondo teorema di Fourier. Con le stesse supposizioni si ottiene

$$\int F(x)\operatorname{sen} u\,x\,dx = \int f(y)\operatorname{sen} u\,x\,dx$$

$$= -f(y)\cos\frac{ux}{u} + \frac{1}{u}\int f'(y)\,dy\cos u\,x$$

$$= -f(y)\cos\frac{ux}{u} + \frac{1}{u}\int f'(y)\cos[u\,\psi(y)]\,dy\,.$$

E quindi

$$\int_0^c F(x)\operatorname{sen} ux\,dx = -f(\gamma)\frac{\cos uc}{u} + f(\eta)\frac{1}{u}$$

$$+\frac{1}{u}\int_\eta^\gamma f'(y)\cos[\,u\,\psi(y)\,]\,dy$$

che sostituite nella (2) dà

$$F(x) \text{ ovvero } f(y) = -\frac{2}{\pi} f(\gamma) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\, u \cos c\, u}{u} du$$

$$+ \frac{2}{\pi} f(\eta) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\, u}{u} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xu}{u} du \int_\eta^\gamma f'(y) \cos[u\psi(y)] dy.$$

Il primo integrale, come è noto, svanisce, perchè $x < c$, e perciò la prima espressione sparisce se $f(\gamma)$ non è infinita. Il secondo integrale per $x < 0$ ha il valore $\frac{\pi}{2}$ e quindi si ha

$$(4) \quad \begin{cases} f(y) = f(\eta) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xu}{u} du \int_\eta^\gamma f'(y) \cos[u\,\psi(y)] dy \\ \psi(\gamma) > x > 0 . \end{cases}$$

In entrambe le formole (3), e (4), γ è arbitrario, ma $\psi(\gamma)$ deve essere positivo ed η una radice dell'equazione $\psi(y) = 0$. Se per η si pongono tutte le radici di questa equazione, si ottengono le diverse trasformazioni dell'equazione $x = \psi(y)$. La grandezza γ dev'essere scelta in guisa che $\psi(\gamma)$ sia un massimo.

II.

Applichiamo le formole trovate a qualche esempio. Sia $f(y) = y$ e $\psi(y) = y^\mu e^y$, allora $\eta = 0$ e abbiamo secondo la formola (3)

$$(5) \quad y = \gamma^\mu e^\gamma - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos x\, u}{u} du \int_0^\gamma \operatorname{sen}(u y^\mu e^y) dy$$

ove l'integrale rispetto a y si esegue facilmente quando μ è un numero intero e positivo.

La formola (4) dà similmente

$$(6) \quad y = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xu}{u} du \int_0^\mu \cos(u y^\mu e^y) dy$$

Se al contrario fosse $\psi(y) = y^\mu e^{-y}$, allora η può essere

tanto $=0$ che $=\infty$, e perciò noi otterremo due trasformazioni y_1 e y_2. Se prendiamo $\gamma=\mu$, per cui $\psi(\gamma)$ prende il suo massimo $\left(\frac{\mu}{e}\right)^{\mu}=M$ allora si ha secondo (3)

$$(7)\qquad y_1=\mu-\frac{2}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos xu}{u}du\int_0^{\mu}\operatorname{sen}(uy^{\mu}e^{-\gamma})dy$$

$$(8)\qquad y_2=\mu+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos xu}{u}du\int_{\mu}^{\infty}\operatorname{sen}(uy^{\mu}e^{-\gamma})dy$$

e similmente secondo (4)

$$(9)\qquad y_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} xu}{u}du\int_0^{\mu}\cos(uy^{\mu}e^{-\gamma})dy$$

$$(10)\qquad y_2=\infty-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} ru}{u}du\int_{\mu}^{\infty}\cos(uy^{\mu}e^{-y})dy.$$

Però l'ultima formola non è usabile, perchè l'integrale

$$\int_{\mu}^{\infty}\cos(uy^{\mu}e^{-y})dy=\int_{\mu}^{\infty}\left(1-\frac{u^2y^{2\mu}}{1.2}e^{-2y}+\ldots\right)dy$$

viene infinito, talchè il secondo membro della (10) si riduce al risultamento privo di significato $\infty-\infty$, perciò fa d'uopo servirsi delle formole (7) e (8).

Se si sottrae la (7) dalla (8) si ha

$$(11)\qquad y_2-y_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos ru}{u}du\left[\int_{\mu}^{\infty}\operatorname{sen}(uy^{\mu}e^{-y})dy\right.$$

$$\left.+\int_0^{\mu}\operatorname{sen}(uy^{\mu}e^{-y})dy\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos xu}{u}du\int_0^{\infty}\operatorname{sen}(uy^{\mu}e^{-y})dy$$

Ma dippiù si ha

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(uy^\mu e^{-y})dy = \int_0^\infty \left[\frac{uy^\mu}{1'} e^{-y} - \frac{u^2y^{3\mu}}{3'} e^{-3y} + ..\right] dy$$

$$= \frac{u\Gamma(\mu+1)}{1'.1^{\mu+1}} - \frac{u^3\Gamma(3\mu+1)}{3'.3^{3\mu+1}} + \frac{u^5\Gamma(5\mu+1)}{5'.5^{5\mu+1}} - \ldots.$$

Se per abbreviazione si pone

$$(12) \quad U = \frac{\Gamma(\mu+1)}{1'.1^{\mu+1}} - \frac{u^3\Gamma(3\Gamma+1)}{3'.3^{3\mu+1}} + \frac{u^4\Gamma(5u+1)}{5'.5^{5\mu+1}} - \ldots \ (*)$$

si ha

$$(13) \qquad y_1 - y_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U \cos x\, u\, du;$$

per $\mu = 1$ si ottiene per U il semplicissimo valore

$$U = \frac{u^0}{1^2} - \frac{u^2}{3^4} + \frac{u^4}{5^6} - \frac{u^6}{7^8} + \ldots$$

Se noi supponiamo in generale che l'equazione $\psi(y) = 0$ abbia due radici reali $y = \eta_1$ e $y = \eta_2$, allora si ha per la (3)

$$f(y_1) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u} du \int_{\eta_1}^{\gamma} f'(y) \operatorname{sen}[u\,\psi(y)]dy$$

$$f(y_2) = +\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u} du \int_{\gamma}^{\eta_2} f'(y) \operatorname{sen}[u\,\psi(y)]\, dy;$$

si ottiene al modo stesso come innanzi mediante la sottrazione

$$(14) \quad f(y_2) - f(y_1) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u} du \int_{\eta_1}^{\eta_2} f'(y) \operatorname{sen}[u\psi(y)]\, dy$$

Una formola interamente analoga potrebbe dedursi dall' equazione (4), cioè a dire

$$(15) \qquad f(y_2) - f(y_1) = f(\eta_1) - f(\eta_2)$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xu}{u} du \int_{\eta_1}^{\eta_2} f'(y) \cos[u\,\psi(y)]\, dy$$

(*) Con il simbolo m' s'intende il prodotto 1. 2. 3. . . . m.

ma è un poco più incommoda, perchè facilmente può ridursi al risultamento $f(y_2) - f(y_1) = \infty - \infty$.

Se finalmente facciamo

$$f(y) = \int_a^y F(x)\, dx,$$

$F(x)$ indicando una funzione arbitraria di x, l'equazioni (14) e (15) si trasformano nelle seguenti

$$(16) \int_{y_1}^{y_2} F(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos xu}{u} du \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(y) \operatorname{sen} [\, u\, \psi(y)\,]\, dy$$

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} F(x)\, dx = \\ \displaystyle\int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)\, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xu}{u} du \int_{\eta_1}^{\eta_1} F(y) \cos [\, u\, \psi(y)]\, dy, \end{array} \right.$$

delle quali la prima sarà generalmente più utile che la seconda, perchè gl'integrali presi tra i limiti η_1 e η_2 possono con facilità divenire infiniti. Ma tutte e due le formole sono in tanto degne di considerazione, che per mezzo di esse è sciolto il problema sinora non ancora trattato: *ridurre un integrale definito preso fra limiti che non sono dati immediatamente, ma mediante un'equazione, ad un altro integrale i cui limiti non sono più determinati mediante un'equazione.* Che qui una tale riduzione è fatta realmente, risulta da ciò che y_1 e y_2 sono radici di un'equazione qualunque, le quali si possono trovare mediante i metodi conosciuti (*).

III.

Finalmente possiamo servirci per la trasformazione della funzione $x = \psi(y)$ della formola

(*) Vedi il bel lavoro del Dr. M. Stern. Sopra la risoluzione dell' equazioni trascendenti.

$$(18) \qquad F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-c}^{c} F(t) \cos u(x-t)\, dt$$

data anche da Fourier, che vale per $c > x > -c$; per mezzo della quale otterremo i risultamenti più generali, perchè qui non si è limitati a valori positivi di x.

Mettiamo dapprima la (18) nella forma seguente

$$(19) \left\{ \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\, du \int_{-c}^{c} F(t) \cos ut\, dt \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen} xu\, du \int_{-c}^{c} F(t) \operatorname{sen} ut\, dt, \end{aligned} \right.$$

e consideriamo provisoriamente i due integrali doppi isolatamente, scrivendo al tempo stesso x per t, ciò che, come è noto, è permesso.

Per $x = \psi(y)$, onde $y = \varphi(x)$ e $f(y) = f[\varphi(x)] = F(x)$ se ha interamente come nel numero I.

$$\int F(x) \cos ux\, dx = f(y) \frac{\operatorname{sen} ux}{u} - \frac{1}{u}\int f'(y) \operatorname{sen} [\, u\, \psi(y)\,]\, dg$$

e

$$\int F(x) \operatorname{sen} ux\, du = -f(y) \frac{\cos ux}{u} + \frac{1}{u}\int f'(y) \cos[u\psi(y)]\, dy\,;$$

e integrando fra i limiti $x = c$, $x = -c$, a cui corrispondono i valori $y = \gamma$ e $\bar{\gamma}$, avremo

$$\int_{-c}^{c} F(x) \cos ux\, dx = [\, f(\bar{\gamma}) + f(\gamma)\,] \frac{\operatorname{sen} cu}{u}$$

$$- \frac{1}{u}\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y) \operatorname{sen} [\, u\, \psi(y)\,]\, dy$$

$$\int_{-c}^{c} F(x) \operatorname{sen} ux\, dx = [\, f(\bar{\gamma}) - f(\gamma)\,] \frac{\cos cu}{u}$$

$$+ \frac{1}{u}\int_{\bar{\gamma}}^{\bar{\gamma}} f'(y) \cos [\, u\, \psi(y)\,]\, dy;$$

Dippiù se scriviamo t per x di nuovo, moltiplichiamo la prima equazione per $\cos xu\, du$, la seconda per $\operatorname{sen} xu\, du'$ e integriamo relativamente ad u trà i limiti $u=0$, $u=\infty$, ne risulta

$$\int_0^\infty \cos xu\, du \int_{-c}^{c} F(t) \cos u\, t\, dt$$

$$= [f(\bar{\gamma}) + f(\gamma)] \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} cu \cos xu}{u} du$$

$$- \int_0^\infty \frac{\cos xu}{u} du \int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y) \operatorname{sen} [u \psi(y)] dy$$

e

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} xu\, du \int_{-c}^{c} F(t) \operatorname{sen} ut\, dt$$

$$= [f(\bar{\gamma}) - f(\gamma)] \int_0^\infty \frac{\cos cu \operatorname{sen} xu}{u} du$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xu}{u} du \int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y) \cos [u \psi(y)] dy .$$

Poichè $c > x$, si ha per un teorema conosciuto

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} cu \cos xu}{u} du = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos cu \operatorname{sen} xu}{u} du = 0$$

e perciò le formole precedenti si semplificano come segue, moltiplicandole anche per $\frac{1}{\pi}$,

$$(20) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos xu\, du \int_{-c}^{c} F(t) \cos ut\, dt \\ & = \frac{f(\gamma) + f(\bar{\gamma})}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos xu}{u} du \int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y) \operatorname{sen}[u\psi(y)] dy \end{aligned} \right.$$

$$(21)\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} xu\, du \int_{-c}^{c} F(t) \operatorname{sen} ut\, dt \\ = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xu}{u} du \int_{-\gamma}^{\gamma} f'(y)\, [\cos u\psi(y)]\, dy\,. \end{cases}$$

La somma di queste equazioni dà $F(x)$ ovvero $f(y)$ e così si ottiene la formola

$$(22)\; f(y) = \frac{f(\gamma) + f(\bar{\gamma})}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_{-\gamma}^{\gamma} f'(y) \operatorname{sen} u[x - \psi(y)]\, dy$$

nella quale fa d'uopo tener presente che γ può essere scelta arbitrariamente, ma $\bar{\gamma}$ deve essere una radice dell'equazinne $\psi(y) = -\psi(\gamma)$. La formola di trasformazione vale finchè x è contenuta tra i limiti $\psi(\gamma)$ e $\psi(\bar{\gamma}) = -\psi(\gamma)$, e essa perciò si riferisce egualmente a x positivo e a x negativo. Quindi noi possiamo considerarla come la formola più generale di trasformazione dell'equazione $x = \psi(y)$ sinora trovata.

DIMOSTRAZIONE DELLE FORMOLE DI GAUSS PEL NUMERO DEGLI SPEZZAMENTI DI UN INTERO IN DUE QUADRATI

ESTRATTO DI UNA NOTA

DEL PROF. PAOLO VOLPICELLI

Letta nell'Accademia de'Lincei nel 17 Novembre 1850.

Le formole per determinare il numero delle somme, ciascuna di due quadrati, nelle quali può spezzarsi un intero, capace dello spezzamento medesimo, sono indicate dal celebre Gauss (*). Però sembra, secondo alcuni (**), non essersi an-

(*) Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae 1801. pag. 219. Recherches arithmétiques. Paris 1807 pag. 157.

(**) Nouvelles Ann. de Mathém. T. IX.. Paris 1850.

cora data rigorosamente la dimostrazione delle formole medesime, la quale perciò formerà l' oggetto di questa nota, che ho l'onore di comunicare all'Accademia.

L'espressione generale di un qualunque intero z si trova essere

$$z = 2^{\mu} S h_1^{\alpha} h_2^{\beta} \ldots h_{k-1}^{\lambda} h_k^{\tau},$$

ove sono $h_1, h_2, \ldots, h_k$ numeri diversi e primi, ciascuno della forma $4n+1$; rappresenta S un prodotto di numeri, anch'essi primi, però dalla formola $4n+3$; e sarà $S=1$, quando manchino questi fattori. Gli esponenti $\mu, \alpha, \beta, \ldots, \lambda, \tau$ sono interi; dei quali sarà $\mu = 0$, quando z sia impari.

Se la S non sia un quadrato, la z non sarà spezzabile nella somma di due quadrati: altrettanto si verificherà se abbiasi

$$\alpha = \beta = \gamma \ldots = \tau = 0,$$

ed inoltre μ sia pari.

Dopo ciò chiaro apparisce che, fatto

$$P = k_1^{\alpha} h_2^{\beta} \ldots h_k^{\tau},$$

il numero degli spezzamenti di, P ciascuno in due quadrati, sarà quello stesso degli spezzamenti simili di z. Perciò nel procedere alla dimostrazione delle indicate formole, prenderemo a considerare solamente il prodotto P.

Il numero dei divisori tutti di questo prodotto, compresovi esso, e la unità, viene dalla formola

$$N = (\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\tau+1).$$

Se degli esponenti $\alpha, \beta, \ldots$, uno almeno sia impari, certo che il numero N' dei diversi modi, nei quali potrà decomporsi P in due fattori, compresa fra questi la unità, verrà dato dalla

$$N' = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\tau+1)}{2}.$$

Quindi volendo escludere quella fra siffatte decomposizioni, ove la unità comparisce come uno de'due fattori di P, sarà il numero di tutte le altre decomposizioni espresso dalla

$$N' - 1 = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots (\tau + 1) - 2}{2}.$$

Se poi gli esponenti α, β, γ, ..., τ, sono tutti pari, certo che il numero N'' delle decomposizioni di P, ciascuna in due fattori, sarà dato dalla

$$N'' = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots (\tau + 1) + 1}{2}.$$

Volendo escludere fra queste quella decomposizione che possiede la unità come uno de'due fattori, e l'altra in che i due fattori sono eguali fra loro; sarà il numero delle restanti decomposizioni espresso con

$$N'' - 2 = \frac{(\alpha + 1)(\beta +) \ldots (\tau + 1) - 3}{2}.$$

Ciò premesso pongasi

$$P = A^2_1 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2 = \ldots = A^2_\nu + B^2_\nu ;$$

essendo ν la incognita che si cerca, vale a dire il numero totale degli spezzamenti di P, ognuno in due quadrati. Tutte le diverse uguaglianze che da queste somme potranno aversi, conbinandole fra loro due a due, col segno = fra l'una e l'altra, sono di numero $\nu - 1$; e potremo rappresentarle nel modo seguente

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1^2 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2 , \\ A_1^2 + B_1^2 = A_3^2 + B_3^2 , \\ A_1^2 + B_1^2 = A_4^2 + B_4^2 , \\ \ldots , \ldots \ldots \\ A_1^2 + B_1^2 = A^2_\nu + B^2_\nu . \end{array} \right.$$

Ora è da riflettere che qualunque delle (1) corrisponde ad una delle diverse decomposizioni di P comprese, o nel valore di $N' - 1$, od in quello di $N'' - 2$, secondo che fra gli esponenti α, β, . . . τ uno per lo meno ve ne sia impari, o tutti sieno pari. Questa verità facilmente si riconosce quando si consideri la relazione

$$P = A' . B' = (a_1^2 + b^2_1)(a^2_2 + b^2_2)$$

$$= (a_1 a_2 \mp b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 \pm b_1 a_2)^2 ,$$

nella quale abbiamo

$$A' = a_1^2 + b_1^2 , \qquad B' = a_2^2 + b_2^2 ,$$

$$A_1 = a_1 a_2 - b_1 b_2 , \qquad B_1 = a_1 b_2 + b_1 a_2 ,$$

$$A_\nu = a_1 a_2 + b_1 b_2 , \qquad B_\nu = a_1 b_2 - b_1 a_2 .$$

Dunque il numero $\nu - 1$ delle (1), uguagliar deve quello delle diverse decomposizioni appartenenti al prodotto P, comprese o nel valore di $N' - 1$, od in quello di $N'' - 2$. Avremo pertanto

$$\nu - 1 = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots (\tau + 1) - 2}{2} ,$$

pel caso in cui uno almeno degli esponenti α, β, . . . sia impari; e

$$\nu' - 1 = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots (\tau + 1) - 3}{2}$$

pel caso in cui gli esponenti medesimi sieno tutti pari. Perciò sarà pel primo caso

$$\nu = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots (\tau + 1)}{2} ,$$

e pel secondo

$$\nu' = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots (\tau + 1) - 1}{2} .$$

Queste sono le formole che il celebre geometra sig. Gauss, nella sua insigne opera *Disquisitiones arithmeticae* ha date, senza dimostrazione. Però deve avvertirsi che delle medesime la seconda trovasi, per errore di stampa, col segno $+$ invece del $-$ innanzi all'ultimo termine del suo numeratore, come già fu avvertito la prima volta per una mia nota (*).

Il chiarissimo Legendre asserisce (**) che nel caso in cui $(n'+1)(n'+1)$ ec. sia impari, dovrà il residuo $\frac{1}{2}$, nato dal dividere questo prodotto per 2, contarsi per una unità; ed invece a noi sembra che, stante la teorica esposta, dovrebbe quel residuo contarsi per zero.

Inoltre il medesimo geometra dice (***) che il numero delle somme ciascuna di due quadrati, nelle quali può il prodotto $5^4.13^4$ spezzarsi, è *tredici*; però secondo le formole ora dimostrate, questo numero è *dodici*, come facilmente si rileva, facendo

$$\alpha = 4\,,\quad \beta = 4\,,\quad \gamma = \ldots = \tau = 0$$

nel valore di ν'.

(*) Nouvelles ann. de math. T. IX. Paris 1850 par M. Terquem. Annali di scienze Mat. e Fis. T. I. Roma 1850. p. 372.

(**) Théorie des nombres. Paris 1830 p. 314.

(***) Idem pag. 315. 4.°

SULL'ESTENSIONE DELLE OSCILLAZIONI MASSIME E MINIME BAROMETRICHE

NOTA

DI FRANCESCO PISTOLESI

Mi è caduto di fare l'osservazione che la differenza fra la massima e la media altezze barometriche annuali è minore della differenza fra le altezze annuali media e minima. Questo fatto non è mai mancato nel decennio 1748 a 1757 per Denain villiers e nel decennio 1839 e 1848 per Siena. Ed il fatto medesimo si verifica anco prendendo i risultati complessivi di più annate, come rilevasi dall' annessa tabella, i di cui materiali sono desunti dal tomo secondo delle *Mémoires sur la Météorologie* del Padre Cotte.

Luoghi ed anni di osservazioni	DIFFERENZE fra la massima e la media degli anni di Contro respettivi	DIFFERENZE fra la minima e la media degli anni di Contro respettivi
	poll. lin.	*poll. lin.*
Arlesanni 2	» . 5, 9	» . 11, 0
Aix anni 3	» . 6, 6	» . 11, 4
Bristolanni 4	» . 0, 1	1 . 2,11
Amsterdam anni 5	» . 8, 6	1 . 5, 7
Dijon anni 7	» . 7, 9	1 . 4, 1
Aja anni 8	» . 9, 7	1 . 2, 8
Marsilia anni 9	» . 9, 2	» . 11, 4
Losanna anni 10	» . 3, 5	1 . 4, 9
Berlino anni 11	» . 11, 0	1 . 0, 9
Montemorenci anni 15	» . 9, 8	1 . 3, 2
Denain viliiersanmi 31	» . 10, 0	1 . 7, 0

Non saprei credere che da altri non sia stata fatta la medesima osservazione, e perciò non intendo di darla per nuova.

Si conosce per esperienza che le discese e le cadute del barometro sono più sensibili e più rapide degli inalzamenti, i quali sogliono avere il più spesso un andamento lento e regolare. Ritenendo pertanto che l' altezza media del barometro rappresenti lo stato normale della pressione atmosferica, e che quindi le altezze massima e minima indichino degli stati eccezionali, i risultati che abbiamo qui sopra presentati ci autorizzano ad enunciare la proposizione, che la scala degli abbassamenti barometrici è più estesa di quella che percorrono gli inalzamenti della colonna mercuriale. La quale proposizione sembra tanto più da valutarsi, in quanto che non verificandosi essa per mezzo dei dati mensuali, poteva facilmente tenersi come cosa soltanto accidentale, e perciò non meritevole di riflesso, la maggior estensione nel senso di abbassamento che il più spesso presentano le oscillazioni del barometro.

Altra prova della minore estensione che hanno le oscillazioni di inalzamento a fronte dell' estensione di quelle di abbassamento del barometro, viene somministrata dai seguenti risultati, che trovansi in una tavola del *Traité de météorologie* di Cotte (p. 292). Vi si vede essere di sole 8 linee la differenza fra la più grande e la più piccola delle massime altezze di 72 anni in Parigi, mentre fra la maggiore e la minore delle minime altezze è la differenza di 1 poll. 3 $^1|_4$ linee. Ma questo dotto e benemerito meteorologista non pensò a trarre dai risultati che presentava l'utile e generale conclusione che essi racchiudono.

DELLE GRANDINI LAPIDIFERE, E DEGLI AEROLITI ACCOMPAGNATI DA UN ABBASSAMENTO DI TEMPERATURA

DISCORSO

DI FRANCESCO ORIOLI

Professore nell' Università Romana.

Molti dopo Chladny han favellato delle masse aerolitiche, le quali a volta a volta, e più assai frequentemente di quello che un tempo si credeva, cadono dal cielo. Molti anche discorsero i fenomeni concomitanti, tra i quali specialmente notarono le conflagrazioni, le esplosioni, le ignizioni, e gli altri indizi manifesti d'elevata temperatura: ma non so che sia stato sin qui argomento di speciali indagini quella categoria di cadute d'esse masse, dove in luogo di fenomeni ignei s'ebbe la concomitanza d'un più o men considerabile raffreddamento. E tuttavia m' è venuto fatto di raccorre già da qualche tempo alcun numero di casi, ne'quali appunto ciò fu chiaramente osservato, e valgano a provarlo le storie che passerò succintamente a narrare.

Cominciamo dalle più evidenti, ed esplicite. — *Ex Annal. Fuldens.* — *A. DCCCXIII.* — *In multis regionibus segetes grandinis vastatione deletae, atque in quibusdam locis, simul cum ipsa grandine, veri lapides, atque ingentis ponderis.*

Ex vita Hludovici imperatoris. A. 823—25 — *Crebra et inusitata fulgura, lapidum cum grandine casus.*

In Vallisnieri Opp. (T. 2. p. 6.) — Mi trovo avere nella mia raccolta di cose naturali un sasso ovato, di peso d' once XI in circa, caduto . . . dal cielo, a cui è annessa una scrittura autenticata per man di notaio . . . e dice in questa guisa: «— *In Xsti nomine amen* — 1636 — *Indict.* 3. — In gior-
« no di sabato 29 del mese di settembrio, in Calce, territorio
» vicentino, in contrà del Settimo, in casa de M. Vincenzo

» Motta, presenti il sig. Lodovico Tovaglini della Ripa, e M.
» Alessandro Speoltin de Monte Galda, testimonii rogati e pre-
» senti. — Io infrascritto faccio ampla et indubitata fede, co-
» me essendo uscita una voce, che nel dì 7 del mese di lu-
» glio, giorno di sabato anno suddetto, nel qual giorno, a
» hore 24 in circa, era caduta una tempesta orribile di smi-
» surata grandezza, poichè la maggior parte de'grani, con for-
» me stravaganti e prodigiose, erano grossi come quadrelli
» (*cioè mattoni*), e fosse tra questi nella corte del suddetto M.
» Vincenzo caduta anco una pietra dall'aria, dove mi sono tra-
» sferito alla casa del detto Motta, e presa di ciò, alla pre-
» senzia de'suddetti testimoni, e di me Notaro infrascritto in-
» formazione di questo fatto, et ho intesa da lui, da madon-
» na Fiora sua consorte, e M. Bartolo suo figlio, come nel
» detto giorno et hora havendo fatto nettar la corte diligen-
» temente, nè essendo restata pietra di sorta alcuna, poichè nè
» anche in quel contorno vi sono pietre di sorta alcuna, e dopo
» venuta la tempesta, et andati per curiosità a vedere, come
» una cosa straordinaria trovarono tra que' pezzi di ghiaccio
» una pietra grossa più d'uno uovo d'oca ovara, et per una
» parte alquanto schizata (*cioè scheggiata*), di color berrettino
» scuro, che tira un poco al roano smorto, di non poco peso,
» e sparsa d'alcuni spazi lucidi come cristallo, la qual pietra
» era da una banda vestita da una crosta di ghiaccio, onde
» si viene in cognizione essere caduta con detta tempesta, et
» detta pietra è stata donata dal detto Motta all'illmo sig. Ge-
» rolamo Gualdo. — Et io Gio. Carato q. D. Bort. Notaro
» pubblico de autorità veneta, e cittadino di Vicenza, ho vo-
» luto fare la presente pubblica attestazione et memoria, co-
» me di cosa straordinaria e meravigliosa, alla quale gli ho an-
» teposto il mio solito sigillo segno di Notaro rogato etc.
» *Octavianus Bono Potestas - Fidem facimus* etc. etc. Seguita la
» fede di ricognizione — *Vicentiae die* 2 *novembris* 1635. —
» *Stephanus Cozzia loc. sig.* » —

In Actis Pysico-Med. Acad. Caesar. Leopoldin. Carolin. Nat. Curios. Vol. 2. *cum appendice.* A. 1730. Obs. 172. Dr. Mi-

Michaelis Bernhardi Valentini— « Cristallus inter grandines e » nubibus decidens cum aquae guttula interna. » —

Nel Journ. des Connoissances Usuelles et Pratiques. A. 1827. pag. 118. — Le 27 mai 1819, à 2 heures du soir, la Commune de Grignoncourt, arrondissement de Neufchâteau, département des Vosges, fut dévastée par une grêle énorme. Plusieurs des grêlons pesaient près d'une livre. On les fit fondre, et on trouva au centre de chacun d'eux des pierres plus larges qu'une pièce de deux francs, plates, rondes, polies, epaisses de 14 à 18 millimètres, et percées au milieu d' un trou, où l'on pouvait faire entrer le petit doigt. Ces pierres étaient couleur de café. Partout où la grêle était tombée, on en trouva un gran nombre de semblables. Procès verbal fut dressé de ce phénomène extraordinaire par le maire de Grignoncourt, et adressé au sous-préfect de l'arrondissement. Ce phénomène singulier n' avait reçu jusqu'ici aucune publicité; mais M. Eusèbe Salverte l'a consigné dans l'ouvrage qu'il vient de publier sur les Sciences Occultes. Le récit lui en a été fait par M. Iaconstoz, encore aujourd'hui Maire de Grignoncourt, qui offrait de le faire attester par tous les habitans de la Commune. Le curé du lieu a fait spontanément le même récit, et il semble qu'il n'y a aucune raison de le revoquer en doute. C'est la seule fois à notre connaissance (e vede ognuo quanto qui il giornalista è mal informato) qu'on ait parlè d'une grêle chargée d'aérolithes.

Sur les bords de l' Ognon, rivière qui coule è 10 ou 12 lieues de Grignoncourt, on voit, dit M. Salverte, une grande quantitè de pierres semblables à celles dont il s'agit, et également percées dans le milieu. Seraient-elles aussi le produit d'une grêle chargée d'aérolithes ? (Sono verisimilmente un prodotto della stessa meteora trascorsa fin colà).

Dagli Annal. de Chimie 1825. — In gennaio, nel circolo di Sterlita-mark, governo d'Oremburgo, una grandine cadde con nuclei aerolitici, che, sottoposti ad analisi chimica, si trovarono composti di ferro 70, 00; manganese 7, 50 ; magnesia 6, 25; alumina 2, 75; silice 7, 50; solfo e perdita 5,00.

Presso Giacinto Gimma — Della Fisica sotterranea lib. V. cap. XI. art. 4. 22. T. 2. pag. 203.— La pietra del grandine del Vormio, dice il Bechero . . . . . cade col tuono e col fulmine, e colla grandine d'insolita grandezza, di color di neve, simile alla creta, ma più dura, armata con corteccia di vetro.

E per non tacere altre testimonianze, un pò meno esplicite, perchè men bene vi si comprende se si parli di *sassi* e di *grandine* in senso proprio, o metaforico, aggiungeremo :

Dal libro di Giosuè cap. 10. v. 11. — *Cumque fugerent* (Chananaei) *filios Israel, et essent in descensu Bethoron, Dominus misit super eos lapides magnos de coelo usque ad Azeca: et mortui sunt multo plures lapidibus grandinis, quam quos gladio percusserant filii Israel.* (Dove l'immortale Bened. XIV. - *De servor. Dei beatif.* etc. lib. IV. Part, I. cap. I. n. II. dice : *Iuxta veriorem sententiam, in textu Iosue, non agitur de vulgari grandine, sed de pluvia lapidea*). Dall'antico Scoliaste di Giovenale. Sat. IV. 61. — *Romani, Tullo Hostilio rege, cum deseruissent* (avendo renduta deserta ... avendo disertata) *Albam, sacra sublata Romam transtulerunt, et Deos Penates, quorum penetrale tam venerabile deprehensum est , ut lapidatio de coelo caderet supra , memorati ponderis* (d'un peso di cui si serba memoria) : *propter quod prodigium ex libris Sibyllinis jussi Pontifices ex S. C. Albae sacra renovare. Tanta enim repente , cum ea vellent transferre , grando cecidit, ut intelligerent suis locis sacra non esse movenda.* (Dove una volta nominandosi la *grandine*, un'altra la *pioggia di sassi*, può credersi, quantunque è lecito dubitarne, che l'una e l'altra s'avessero).

Da Aulo Irzio, *De bello Africano* 47.- *Per id tempus fere Caesaris exercitui res accidit incredibilis auditu. Namque virgiliarum signo confecto, circiter vigilia secunda noctis , nimbus* cum saxea grandine *subito est exortus ingens. Ad hoc autem incommodum accesserat, quod Caesar non, more superiorum imperatorum, in hibernis exercitum continebat, sed in tertio quartoque die, procedendo, propiusque hostem accedendo , castra communiebat ; opereque faciendo, milites se circumspiciendi non habebant facultatem. Praeterea ita ex Sicilia exercitum transportaverat , ut praeter ipsum*

militem et arma, neque vas, neque mancipium, neque ullam rem, quae usu militi esse consuevit, in naves imponi pateretur. In Africam autem non modo sibi quidquam non adquisiverat aut paraverat, sed etiam, propter annonae caritatem ante parata consumpserat. Quibus rebus adtenuati, oppido perquam pauci sub pellibus adquiescebant: reliqui ex vestimentis tentoriolis factis, atque arundinibus scopisque contextis, permanebant. Itaque subito imbre grandineque consecuta, gravati pondere, tenebris aquaque omnes subruti disjectique, nocte intempesta, ignibus extinctis, rebusque ad victum pertinentibus omnibus corruptis, per castra passim vagabantur, scutisque capita contegebant. Eadem nocte quintae legionis pilorum cacumina sua sponte arserunt. (Dove la *saxea grando* non si sa bene se è detta in senso proprio o nel figurato, allo stesso modo che ne' due casi precedenti).

Ex Annalibus Godefridi Monaci A. 1179. — *Aestas tempestuosa extitit, ita quod mense junio lapides grandinis insolitae quantitatis ceciderunt.* — A. 1237. *In die S. Albini grando, in quantitate ovorum columbarum, vites, herbas, et segetes, plerisque in locis, et praecipue prope Coloniam prostravit. Quidam etiam affirmabant se vidisse lapidem grandinis in longitudinem dimidii cubiti, et spissitudine 4 digitorum. Unde etiam grandinem subsecutus* (turbo) *in multis locis, maxime in Westfalia, arbores radicitus eruit, domos destruit, quosdam suffocans homines et jumenta.* (Dove il *lapis grandinis* può pensarsi essere stato un grosso pezzo di gragnuola).

Da ultimo *ex Iohannis Vidoturani Chronico* (Collezione dell' Eccardo T. I. col. 1767). - *His temporibus, scilicet a. D. MCCXC, in medio fere aestatis saevissima grando veniens cum lapidibus in magnitudine pugni, arbores multas radicitus evulsit, moenia discerpsit, pecora necavit, volucres prostravit, omnia terrae nascentia sibi occurrentia vastavit, et in campis foetorem pessimum post se reliquit. Fertur antem hanc grandinem non solum in Alemannia, verum de mari ad mare percussisse, unde illa dies quasi typum extremae diei gessisse illucescit* (Dove analoghe considerazioni possono ripetersi).

Qui lascio le storie, alle quali non ho agio di cercare ne'

cataloghi delle cadute di meteoroliti, se vi siano più o men giunte da fare, queste bastando al nostr'uopo. E nasce la prima ricerca, se ne'precedenti casi (e parlo di quelli dove è manifesto che son vere pietre meteoriche quelle delle quali è narrato), i corpi lapidei, come ciò sembra esser vero pel maggior numero de'meteoroliti, realmente provennero dagli spazi celesti superiori al nostro mare atmosferico, o se debbano in questa vece supporsi, coagulati e prodotti da una materia la quale dentro l'atmosfera nuotasse sospesa. Ma rispetto a ciò le descrizioni de'fatti così come ci sono state trasmesse non danno lume che basti a trarne una risposta soddisfacente. L'una e l'altra ipotesi può esser vera, giacchè (fatta astrazione dall' accompagnamentato colla grandine, del quale parleremo poi) niuno più nega oggi la derivazione, come poco fà notavamo, da regioni ultra atmosferiche di sostanze terrose o lapidiformi. Studiò poi fin dal suo tempo Raffinesque, e pose in aperta luce la gran quantità d'atmosferico pulviscolo il quale fino ad una altezza non mediocre galleggia per l'aria, non sui continenti soltanto, ma eziandio nel bel mezzo dell'oceano e de'mari più vasti. E può esser vera una terza opinione, che qualche volta una tromba di terra generatrice ad un tempo di scariche elettriche, e di gragnuola sollevi da terra ciottoli, e colle scariche d' elettricità li fonda e vetrifichi. Perciò ne'diversi casi è possibile che diversa sia l'origine.

Per cagion d'esempio, nella meteora del 1825 la composizione de' nuclei caduti entro il circolo di Sterlitamark indica una grande analogia cogli aeroliti generati al di là de'confini dell'atmosfera. Dico altrettanto del sasso del Vallisniero *di color berrettino-oscuro con spazi lucidi come di cristallo;* e qui non pe'materiali di che si componeva, i quali s'ignorano, ma piuttosto per la configurazione, per la colorazione, e pe'cristalli qua e là apparenti. Sebbene è forza confessare che tutte queste estrinseche condizioni possono non meno esser l'effetto di una forte scarica fulminea. Tutte le quali considerazioni valgono non manco per la grandine lapidifera in Grignoncourt, e

sull'Orgon co'suoi nocciuoli *color di caffè*. Laddove par piuttosto accennare alla seconda cagione l'*enidro*, od il *crystallus cum aquae guttula interna* del Valentino; e forse alla terza la grandine del Vormio ricordata dal Gimma, nella quale par che si tratti d'una farina fossile levata in aria, di quelle che illustrò a di nostri l'Erehnberg, e dimostrò essere microscopici testacei d'inviluppo siliceo, trasportati sovente per l' aeree regioni a distanze enormi, e poi ricadenti a terra sotto forma di pioggie di sabbia, alla quale può bene l'elettricità del fulmine aggiungere la corteccia vetrificata di che ivi è menzione.

Ma una seconda e più importante ricerca qui si presenta, e risguarda la singolarità della temperatura bassissima, e del temporale grandinifero che vi si associa, di che però, a ben pensarvi sopra, la maraviglia mi par minore di quel che fa sembrarla la rarità del fenomeno.

Favellando *a priori*, se qualche cosa eccita stupore nelle tante storie delle cadute di pietre meteoriche, le quali ci sono state tramandate, ed ogni giorno ne si tramandano, più dobbiamo maravigliarci de' fenomeni ignei che per solito vi van congiunti, che del freddo intenso, e de'segni di questo freddo, i quali recan seco assai di rado, mentre parrebbe che dovesse accadere l'opposto.

E per vero quelle pietre che dagli spazi ultra-atmosferici a noi vengono a volta a volta, sembra che dovrebbero, nella regione entro la quale descrivon curve, e variamente trascorrono, avere un'assai bassa temperatura, cioè quella degli spazi celesti entro a cui s'aggirano, accresciuta al più di quel che l'irradiazione solare può aggiungervi. D'altra parte cagioni calorifiche interne o superficiali parrebbe che non dovessero averle mancando esse pietre probabilmente d'un'atmosfera propria, od almeno bastantemente densa, e in ogni ipotesi, a cagione della loro picciolezza, non essendo verisimile che le reciproche reazioni chimiche delle quali gli elementi di cui si compongono potrebbero esser suscettivi, abbian potuto durare più d'un brevissimo tempo, dopo di che i loro viaggi pel cielo avrebber dovuto seguitarsi perdendo a poco a poco ogni acqui-

stata e avventizia temperatura. Così, salvo pochissime eccezioni, si è costretti a credere, che in regola generale que' minimi asteoridi da'quali suolsi desumere l'origine la più frequente dei sassi meteorici avrebbero a dirigersi verso noi quasi tutti o freddi, o certo tutt'altro che roventi, e in istato di conflagrazione. E perciò il fatto della conflagrazione sì frequente credo io probabile che sia un fatto, le più volte, puramente elettrico, almeno ne'suoi esordi (*), al quale s'aggiunga, dopo l'ingresso nell'atmosfera nostra alcuno de'fenomeni di combustione. E vo figurandomi, che ciò così avvenga.

Se nelle regioni celesti sono nuvole circumsolari, o zone di materia aerolitica, tra cui, e con cui, reciproche perturbazioni possano accadere, io, guidato da leggi d'analogia, non veggo ragione che escluda la possibilità della nascita in esse di squilibrii di genere elettrico, e di tutte le conseguenze di questi squilibrii.

Fra le molte ipotesi che si offrono alla mente come le più naturali, eccone, per cagion d'esempio, una.

Se la nube, o la zona aerolitica, s'avvicina alla terra dentro una certa distanza, posta la nessuna verisimilitudine ch'essa e la terra si trovino in una condizione d'equilibrio quanto al naturale loro stato elettrico, vi sarà dunque di leggieri *po-*

(*) Non chiamo qui conflagrazione ogni luminosità, come per esempio quelle, che, nel precedente quaderno, il sig. Prof. Alessandro Serpieri delle Scuole Pie (p. 449 di questo vol.) attribuisce a riflessione della luce solare, tenendo in ciò l'opinione medesima del sig. John Lubboc. Ma non riconosco nè manco le sole conflagrazioni che accader possono per attrito contro all'atmosfera nostra, o per l'accensione della materia infiammabile portata dalla stella medesima. Quest'ultimo caso mi par difficile l'ammetterlo per certi asteroidi che realmente conflagrano ad altezze comparativamente somme, dove se ancor toccano l'atmosfera nostra, e l'attraversano, la toccano e l'attraversano in una regione sì diradata, che non lascia vedere la probabilità d'effetti d'una combustione di qualche importanza. Le tracce luminose possono ben essera quasi code di cometa, o tratti all'atmosfera nostra involati, e tenenti dietro all'asteroide, e percorsi da lunghi lampi, o simile.

sitività per l'una, e *negatività* per l'altra; di che poi la necessaria conseguenza sarà un'azione induttiva dell'una sull'altra, per la cui virtù, 1.° le parti più vicine tra loro, e dell'atmosfera terrestre, e della nube o zona, accresceranno i rispettivi loro stati elettrici positivo o negativo; 2.° eserciteranno esse una scambievole e crescente forza attrattiva, per l'antitesi elettrica, la quale forza potrà bene aggiungersi a quella della gravità in alcuni casi per accrescere la determinazione alla caduta sulla terra della porzione attratta, o potrà limitare l'effetto ad un'azione meramente locale, di cui svariate potranno essere le forme.

Così accadrà non di rado, che, nelle mutate direzioni, allo scemar delle distanze, la parte operativa della nube o della zona (dico quella che sofferse la induzione dianzi supposta), o il meteorolito solitario sottoposto alle influenze che si dissero, trapassi la sfera dell'azione induttiva, ed entri al di qua della distanza esplosiva, nascendo allora di fatto la esplosione; o che nel trapassarla, od anche prima del trapassarla, si abbia solo una tromba, od uno de'balli immaginati dal Volta, e indi la pioggia lapidifera co'suoi naturali annessi e connessi: con che non farà maraviglia se una crosta ialitica, e se alcuni punti di vetrificazione, o di torrefazione, e di fusione, il più delle volte, si manifestino; e se, altre volte, s'abbia invece accompagnamento di grandine, al tutto come ne' comuni uragani, colle stesse spiegazioni e le stesse cause, ma tanto più facilmente, quanto alla generazione del freddo necessario per la congelazione, posto mente, che (ammessa la temperatura bassissima recata già seco, e l'altra incontrata nelle regioni elevatissime del mare atmosferico) la formazione d'una crosta di ghiaccio intorno ai nuclei solidi per adesione di vapori, accagliativi sopra durante la discesa, è fatto che non presenta difficoltà alcuna ad esser conceputo.

Se non che tutte le cose fin qui dette possono in pari modo applicarsi a nubi di pulviscolo intraatmosferico associato con nubi di vapori, od incontrantesi con queste, potendo benissimo, l'une come l'altre, andar soggette alla stessa categoria di

effetti temporaleschi generatori di gragnuole. E dopo ciò non rimarrà che un ultimo quesito a proporci, ed è il fatto della singolarità di quelle forme annulari, le quali s' incontrarono appunto nella meteora di Grignoncourt e di Orgon. E rispetto ad esse due ipotesi mi si offrono alla fantasia tra le quali è libera la scelta.

La 1.ª m'è suggerita dall'aspetto che prendono nell'esperimento notissimo delle figure del Lichtemberg le polveri lanciate sul piatto resinoso, in cui sonosi segnate col bottone della caraffa di Leida traccie negative. Si sa che allora si dispongono esse appunto in cerchietti intorno alle traccie. Puossi dunque supporre che la nube pulverulenta positiva; incontratasi con una nube acquea negativa, e scaricandosi con tante scariche parziali su quella, si divida a quel modo in anelli, che la forza dell'elettrico abbia fuso nell'atto delle scariche suddivise, dopodichè l'incrostazione agghiacciata sarà l' effetto dell'adesione e della solidificazione d'una parte dello strato acqueo attraversato cadendo, o piuttosto lo sarà dell'attrazione esercitata dalla periferia d'ogni anello sui fiocchi di neve, o di nevischio, contemporaneamente nuotante nell'aria, alla quale attrazione succeda l' attaccarsi per quel fenomeno che alle attrazioni elettriche seguita sempre, quando tra l' attraente e l'attratto non v'è conducibilità sufficiente, e perciò non v'è facilità di ristabilimento dell'equilibrio.

La 2.ª ipotesi nasce dalla possibilità che grossi goccioloni d'acqua spolverati alla superficie di pulviscolo atmosferico, o di polvere aerolitica, nella esplosione della elettricità disperdano il noccinolo acquoso, e fondendosi indi la corteccia pulverulenta si facciano i cerchietti, che poi si cuoprano della crosta glaciale per alcune delle cagioni dette di sopra. Ciò sarà a similitudine degli anelli che forma quello degl'idrogeni fosforati il quale s'accende spontaneamente a contatto dell'aria comune, quando generandosi sott'acqua, viene a gorgogliare in gallozzole alla superficie dell'acqua nell' atmosfera. Imperciocchè si sá che il fumo bianco in mezzo al quale essi anelli compongonsi è del fosforo acidificato che assorbendo per igrome-

tricità l'umidità dell'aria circostante si rende visibile; e poichè non arde che la sola camicia fosforica d'ogni gallozzola, perciò mentre questa camicia sferica scoppia (al dilatarsi per calore del resto del gas posto dentro, e non acceso) quel che fu sfera prende la forme annulare. Infatti se lo scoppiar della sfera produce nell'indicato caso un anello, non v'è ragione per cui non possa altrettanto accadere nello scoppiar della goccia impolverata che immaginammo.

Io confesso che sto più volentieri per questa ultima ipotesi : rispetto alla quale niente poi vieta che altri sostituisca alle goccie d'acqua, grani di gragnuola primitivi intorno a cui la polvere siasi dapprima deposta. E chi più ne sa più ne dica.

Solo giova ridurre a memoria de'fisici innanzi di chiudere questo articolo ciò che co'voli su globi aerostatici s'è a quest'ultimi tempi messo in chiaro, ed è che nelle alte regioni del mare atmosferico più frequentemente di quel che altri penserebbe s'incontrano nubi, le quali , indipendentemente da ogni cagione elettrica, e per solo effetto della evaporazione rapida che promuove in esse la secchezza dell'aria circostante e la sua bassa temperatura, sono, anche in estate, e nelle temperate nostre zone, composte di minimi aghi aghiacciati, a'quali la loro somma tenuità impedisce il cadere. E ciò posto vede ognuno quanto può esser facile, in caso d'incontri elettrici, analoghi a quelli di che superiormente si favellava, le coagulazione d'un gran numero di questi aghi o fiocchi, intorno a nuclei del genere di quelli, i quali nel nostro articolo abbiam considerati, per quel giuoco d'attrazioni reciproche su cui quel che dicemmo sembrami dover bastare a persuaderne altrui il probabile intervento nelle qui considerate istorie. Ciocchè poi niente toglie all'altra probabilità di coagulazioni simili provocate dal freddo avventizio recato seco da frammenti aerolitici caduti per la loro tenuità con sufficiente lentezza perchè il precipitare attraverso alla grossezza dell'atmosfera non riesca per essi una causa di riscaldamento o di combustione.

SULLE VARIAZIONI DIURNE DELL'AGO MAGNETICO, E SULLE AURORE BOREALI

Estratto d'una lettera del Sig. Augusto de La Rive al Sig. Arago. (Annales de Chimie et de Physique Tom. XXV Mar. 1849.

Fin dal 1836 in una mia nota sulla grandine (Bibliotheque universelle nouvelle serie, tome III page 217) m'era studiato di mostrare, che l'elettricità atmosferica deve la sua origine, all'ineguale ripartimento della temperatura negli strati dell'atmosfera. È noto che scaldando un'estremità d'un corpo qualunque e raffreddando l'altra, l'elettricità positiva va dalla parte calda alla fredda, e la negativa in senso contrario; da ciò ne risulta che l'estremità inferiore d'una colonna atmosferica è costantemente negativa, e la superiore positiva. Questa differenza di stati elettrici opposti, deve essere tanto maggiore quanto più considerevole è la differenza della stessa temperatura; per conseguenza nella nostra latitudine, più notabile nell'estate che nell'inverno, e più sensibile nelle regioni equatoriali che nelle polari. È da notarsi che lo stato negativo delle parti inferiori delle colonne atmosferiche, si deve comunicare alla superficie della terra sulla quale riposano, mentre lo stato positivo delle parti superiori si trasmette più o meno dall'alto in basso, quasi a tutt'intera la colonna, secondo la facilità che il grado maggiore o minore d'umidità dell'aria, presenta alla propagazione dell'elettricità. Una colonna atmosferica è dunque come una pila ad alta pressione, a causa della conduttibilità imperfetta degli elementi di cui si compone; pila il cui polo negativo in comunicazione diretta e costante col globo terrestre, si scarica sul medesimo, mentre si carica d'elettricità dal suo polo positivo, che si distribuisce con intensità decrescente partendo da quel polo; ciò che spiega perchè l'elettricità positiva aumenta a misura che uno s'innalza nell'atmosfera.

Le cause che determinano l'accumulazione dell'elettricità

negativa alla superficie della terra, e quella dell'elettricità positiva nelle regioni superiori dell' atmosferà , agiscono in una maniera continua; e ne dovrebbe risultare una tensione illimitata dei due stati elettrici opposti, se giunti ad un certo grado di forza , essi non si neutralizzassero a vicenda per l' effetto delle diverse circostanze. In altri termini, arrivati ad un certo limite di tensione, che varia secondo lo stato dell'atmosfera e della superficie del suolo, le due elettricità non possono sorpassarlo, e si ricompongono o si neutralizzano , per tutto ciò che eccede questi limiti. Siffatta neutralizzazione accade in due maniere; una normale e costante, l'altra irregolare ed accidentale. Questa seconda maniera si presenta sotto forme svariatissime, alcune volte la semplice umidità dell'aria, ed anche meglio la pioggia, o la neve sono quelle che ristabiliscono l'equilibrio elettrico fra la terra e l' atmosfera, in qualche caso le trombe manifestano in modo violento l'azione scambievole delle due elettricità, che tendono ad unirsi. Altre volte i venti mescolando l'aria che sta a contatto della terra ed è negativa al pari di essa, coll'aria positiva delle regioni più elevate, producono i lampi di caldo, o ancora i temporali, quando ha luogo nello stesso tempo la formazione delle nuvole, e la condensazione de'vapori acquosi, a causa dell'umidità e della temperatura differente degli strati d'aria che si vanno mescolando. L' attrazione delle nuvole per le montagne, i fenomeni luminosi che si manifestano all'estremità dei punti elevati, sono dovuti egualmente alla stessa causa. Ma non mi fermo di più sopra tutte queste conseguenze naturali e facili a comprendere della teoria che sto svolgendo : mi limiterò a notare una sola cosa che cioè nelle osservazioni dell'elettricità atmosferica bisogna riflettere che l' intensità apparente dei segni elettrici, non è sempre una prova dell'intensità dell' elettricità medesima; perchè l'umidità dell' atmosfera col favorire la propagazione dell' elettricità degli strati superiori, può, come spesso si vede nell'inverno , dare origine a forti manifestazioni elettriche, anche quando la causa che le produce non è molto efficace. In estate si vede spesso l'inverso.

Passiamo ora al modo regolare e normale di neutralizza-

zione delle due elettricità; io aveva già supposto l'esistenza di esso nella mia nota del 1836, ma non l'aveva indicato espressamente, nella mancanza in cui si trovava allora la scienza, d'un dato che ora possiede, cioè la conduttibilità del globo terrestre dimostrata dall'uso del telegrafo elettrico.

Per far bene intendere come io concepisco questo modo di neutralizzazione, divido l'atmosfera in tanti strati anulari paralleli all'equatore; l'elettricità positiva accumulata nella parte esteriore dello strato, non potrà sorpassare un certo grado di tensione senza giungere, a traverso dell'aria rarefatta più o meno umida, fino alle regioni polari, ove trovando un' atmosfera satura d'umidità, essa si riunirà facilmente coll'elettricità negativa accumulata sulla terra. Ed ecco formato il circuito; ciascuno strato anulare dell'atmosfera produce una corrente, che nelle alte regioni va dalla parte superiore dello strato verso il polo, ridiscende verso la terra traversando l' atmosfera ambiente de'poli, e dal polo ritorna per la superficie del globo alla parte inferiore dello strato donde è partita. Tali correnti pertanto saranno tanto più numerose e concentrate, quanto più saranno vicine al polo; e siccome esse vanno tutte in una stessa direzione, cioè dal sud al nord nella parte superiore dell' atmosfera, e dal nord al sud sulla superficie della terra, il loro effetto diverrà più sensibile a misura che ci allontaneremo dall'equatore per avvicinarci al polo. Ma siccome le correnti prodotte dagli strati equatoriali sono individualmente più forti, di quelle che provengono dagli strati più settentrionali, la differenza, quantunque reale, sarà nondimeno minore di quello si potrebbe credere. Ciò che accade nel nostro emisfero boreale, deve ancora accadere esattamente nell'emisfero australe; le correnti vanno egualmente dall'equatore al polo nelle regioni superiori dell'aria, e dal polo all'equatore sulla superficie della terra. Per conseguenza un osservatore che andasse dal polo boreale all'australe, andrebbe nel senso della corrente dal polo boreale all'equatore, e nel senso contrario della corrente dall' equatore al polo australe; parlando sempre della corrente che scorre sulla superficie della terra. Debbo altresì osservare che

il limite che separa le regioni occupate da ciascuna di queste due grandi correnti, non è l'equatore propriamente detto, perchè esso dev' essere variabile; ma secondo la teoria che ora espongo, il limite è quello delle parallele comprese fra i tropici, che ha il sole al suo zenit; per conseguenza cangia ogni giorno.

Ora è agevol cosa il comprendere la causa delle variazioni diurne dell'ago magnetico. Conforme alle leggi stabilite da Ampere la corrente che va dal polo all'equatore deve far deviare il polo nord dell'ago all'ovest, ciò che accade nel nostro emisfero; e la corrente che va dal polo australe all'equatore, deve far deviare il polo nord dell'ago all'est, ciò che accade di fatti nell'emisfero australe. La deviazione in uno stesso luogo dev' essere tanto più notevole quanto maggiore è la differenza della temperatura, e per conseguenza degli stati elettrici, fra lo strato inferiore dell'atmosfera ed il superiore, così la deviazione aumenta dal mattino a 1^h 30^m dopo il meriggio; ed è più considerevole nei mesi ne'quali il sole sta maggior tempo sull'orizzonte, e tocca il suo minimum ne' mesi d' inverno. Finalmente queste variazioni diurne aumentano in ampiezza, allontanandosi dall'equatore ed avvicinandosi al polo; questo risultato concorda pienamente con ciò che ho detto, sul numero crescente delle correnti verso le regioni polari. In queste stesse regioni le variazioni potranno essere molto irregolari ed anche nulle, quante volte l'ago magnetico si trovi situato in quegli stessi luoghi ove le correnti elettriche traversano l' atmosfera per giungere alla terra, di fatti un ago così circondato da ogni banda dalle correnti non ne risente più l'effetto, o almeno non lo risente in un modo regolare. Ciò può spiegare alcune osservazioni, quelle in particolare fatte al porto Bowen, che sembravano formare eccezione.

Esaminando attentamente tutte le osservazioni magnetiche di cui ho potuto aver notizia, ed in particolare quelle del colonnello Sabine, sono rimasto maravigliato del modo singolare col quale possono spiegarsi secondo la teoria. Nè citerò un solo esempio; le osservazioni di recente fatte a S. Elena, pubblicate

testè dal Colonnello Sabine. A S. Elena la variazione diurna ha luogo all'ovest, finchè il sole stà al sud dell' isola, e all' est quando il sole passa al nord. Di fatti nel primo caso come già ho osservato di sopra, S. Elena deve far parte di quella regione, nella quale le correnti elettriche vanno dal polo boreale alle regioni equatoriali, sulla superficie della terra; e nel secondo caso della regione nella quale queste correnti vanno dal polo australe verso l'equatore. Il maximum della variazione diurna non accade a S. Elena nella stessa ora in cui si manifesta nei luoghi del continente, e ciò perchè la temperatura della superficie del mare, non segue nelle variazioni diurne, le stesse leggi della temperatura della superficie terrestre. E la temperatura dello strato inferiore della colonna atmosferica, è la medesima di quella della superficie del mare o della terra su cui si trova. Questa stessa circostanza spiega alcune anomalie apparenti che presentano le variazioni diurne, in varie parti del globo, come per esempio al Capo di Buona Speranza, le quali sono circondate quasi da tutte le parti da una vasta estensione di mare.

Debbo fare osservare che in quanto ho esposto finora non mi sono occupato, se non delle cause perturbatrici della direzione dell'ago magnetico, e non già della causa di questa stessa direzione, ossia del magnetismo terrestre, qual causa io non credo sia della stessa natura, ma pel momento m'astengo dal dire la mia opinione. Per ora considero il globo terrestre come una gran calamità sferica, osservando le cause esteriori, che possono modificare la direzione che essa tende ad imprimere agli aghi magnetici.

L'aurora boreale che sarà dunque secondo la teoria che ho esposto? Essa è l'effetto luminoso delle correnti elettriche, che si dirigono verso il polo boreale nelle alte regioni dell' atmosfera; effetto dovuto alla riunione di certe circostanze, che non si presentano sempre nella stessa maniera, nè in tutte le stagioni dell'anno.

Al presente è provato che l'aurora boreale è un fenomeno atmosferico, come voi da tanto tempo avevate supposto. Il no-

me di *tempesta magnetica* col quale la chiama il Sig. de Humboldt nel suo *Cosmos* allude alla stessa idea, confermata d' altronde dall' importanti particolarità che egli riferisce su questa meteora. Le osservazioni di Parry, di Franklin, e soprattutto quelle sì numerose ed esatte dei Sigg. Bravais e Lottin, sono in tutto favorevoli a quest'opinione, che viene ancora confermata dalle osservazioni del Sig. Biot nelle isole Shetland.

Ciò posto ecco come io spiego l'origine dell'aurora boreale. Quando il sole per essere passato all'emisfero australe non riscalda più tanto il nostro emisfero, i vapori acquosi, che si sono accumulati nell'estate in questa parte dell'atmosfera, cominciano a condensarsi; quella specie di calotta umida, che circonda le regioni polari, si estende sempre più, e facilita il passaggio dell'elettricità accumulata nelle regioni superiori dell'aria. Ma nelle altre regioni, e specialmente in questo tempo i vapori acquosi, devono spesso passare allo stato di piccole particelle di ghiaccio o di neve ondeggianti nell' aria, come quelle che producono gli aloni; le quali formano una specie di nebbia mezzo trasparente. Questa nebbia mezzo agghiacciata, conduce l'elettricità fino alla superficie della terra in vicinanza del polo, e nello stesso tempo viene illuminata da questa corrente o dalle scariche elettriche. Di fatti tutti gli osservatori s'accordano in riconoscere, che l'aurora boreale è sempre preceduta da una nebbia che si solleva dal polo, il cui lembo meno denso del resto, si colorisce pel primo. Perciò è più frequente vicino al polo, nei mesi d'inverno, e soprattutto in quelli nei quali v'è molto vapore nell' aria. Affinchè l' aurora boreale sia visibile ad una gran distanza dal polo, è necessario che queste nuvole, composte di particelle agghiacciate, si prolunghino senza interruzione dalle regioni polari a delle latitudini che siano sufficientemente meridionali, ciò che accade di rado. Queste stesse nuvole quando sono parziali, come avviene più spesso, producono gli aloni. Ed è molto rimarchevole l'analogia trovata dagli osservatori fra le nebbie che accompagnano l'aurora boreale, e quelle che producono gli aloni. Egli è facile di verificare per via d'un'esperienza diretta,

l'indentità che esiste fra la luce dell'aurora boreale, e quella che si ottiene, facendo passare una serie di scariche elettriche nell'aria rarefatta che contenga de'vapori acquosi, e meglio a traverso un sottilissimo strato di neve, ad un leggier velo di brina esposta sul vetro. Mi sono ancora assicurato che l'aria molto rarefatta, ma perfettamente secca, dà una luce debole, e che nell'esperienza del tubo vuoto d'aria, è necessariamente l'umidità aderente alle pareti interne del tubo, che conducendo le scariche elettriche, produce gli effetti luminosi. Si concepisce altresì, come le scariche elettriche trasmesse da questa specie di reticella di ghiaccio, concentrandosi verso il polo, devono produrvi una luce molto più viva, di quella, che sviluppano quando si estendono in una maggior ampiezza.

Ma per qual ragione la causa del fenomeno sembra essere il polo magnetico e non il terrestre? Ecco la mia risposta. Si ponga il polo d'un forte elettro-magnete sotto una gran superficie di mercurio; e si faccia comunicare questa superficie col polo negativo d'una gran pila, s'avvicini alla medesima la punta d'un pezzo di carbone che comunichi col polo positivo della pila; tostochè l'arco voltaico è formato, si vede il mercurio agitarsi al di sopra dell'elettro-magnete; e quando questo sia fermo, delle correnti luminose si veggono girare intorno al polo, e vibrare di quando in quando dei raggi molto splendenti. Vi si osserva ancora, come nell'aurore boreali, una parte oscura in forma d'un punto circolare, sopra il polo della calamita; e quest'effetto singolare cessa, quando l'elettromagnete non è più calamitato, senza che venga interrotta la luce elettrica. Con una corrente continua d'elettricità ordinaria, che si porti vicino al polo d'un forte elettro-magnete, nell'aria rarefatta ed umida, si ottengono degli effetti luminosi ancor più simili in apparenza a quelli dell'aurora boreale.

Questi fenomeni sono il risultato dell'azione delle calamite sulle correnti. Lo stesso deve accadere del polo magnetico della terra; la neutralizzazione delle due elettricità accade probabilmente in una grande estensione delle regioni polari, ma l'azione del polo magnetico determina le nebbie condut-

trici a girargli intorno vibrando dei raggi rilucenti, che per effetto di prospettiva sembrano formare la corona dell'aurora. L'odore solforoso e lo strepito, da cui si pretende sia accompagnata qualche volta l'aurora, non sarebbero inesplicabili; poichè quest'odore, come quello che accompagna il fulmine, verrebbe prodotto dalla modificazione impressa sull'ossigene dell' aria, dal passaggio delle scariche elettriche, e che il Sig. Schonbein ha chiamato ozono; quanto poi allo strepito sarebbe esso analogo a quello che vien prodotto dall'arco voltaico, quando è sotto l'influenza d'una calamita molto vicina, come già l'ho dimostrato. Se di rado ha luogo nel caso dell'aurora, egli è perchè accade assai raramente che l' arco luminoso sia sufficientemente vicino alla terra, e per conseguenza al polo. Ma del resto la descrizione che hanno data di questo rumore coloro che l'hanno ascoltato, é perfettamente identica a quella, che io aveva data del rumore che produce l'arco voltaico, sotto l'azione del magnetismo, senza che allora sospettassi dell'analogia.

Le perturbazioni magnetiche che accompagnano costantemente l'apparizione d'un'aurora boreale, riescono ora facili a spiegarsi. Questa riunione accidentale d'una proporzione maggiore d'elettricità accumulata, deve turbare l' azione normale della corrente regolare; il senso poi o la direzione della perturbazione, dipenderà dalla parte della corrente che agirà sull' ago, e per conseguenza da circostanze impossibili a prevedersi, perchè dipendono dall'estensione del fenomeno, e dalla posizione dell'ago rispetto al medesimo. Di fatti secondo che il piano orizzontale nel quale si muove l'ago di declinazione, stà al di sopra o al di sotto della regione nella quale ha luogo la maggior forza del fenomeno, la corrente che passa sulla terra, o quella che va per l'aria (chè sono in senso contrario) sarà quella che agirà sull'ago; e durante la stessa aurora, potrà essere ora l'una ora l'altra. Le diverse direzioni nelle quali devia l'ago nel tempo d'un' aurora boreale, si conciliano benissimo con questa spiegazione, almeno per quanto ho potuto conchiudere dalle diverse osservazioni riportate negli *Annales de Chimie*

ed in varj viaggi scientifici. L'effetto rimarchevole che il sig. Matteucci ha osservato nell' apparecchio del telegrafo elettrico situato fra Ravenna e Pisa, nel tempo della magnifica aurora del 17 Novembre del 1848, prova l'esistenza d'una corrente circolante sulla superficie della terra, e che introducendosi nel filo del telegrafo, è passata in parte per questo miglior conduttore. Il suono che danno dei lunghi fili di ferro situati nella direzione dal nord al sud, in alcune circostanze meteorologiche, sono una nuova prova che quelli vengono traversati da una corrente, la quale probabilmente deriva dalle altre, che circolano sulla superficie della terra dal nord al sud sul nostro emisfero.

Sarebbe della massima importanza il profittare dei fili telegrafici che si trovano in una direzione più o meno vicina a quella dell'ago, per farvi (quando questi non siano in attività) delle osservazioni dirette a scoprire, e misurare le correnti elettriche, che probabilmente li traversano; ciò sarebbe facile compiendo la comunicazione di questi fili col suolo, in una delle loro estremità, col mezzo d'un galvanometro moltiplicatore. Il paragone fra i risultati così ottenuti, e quelli che fornirebbe l'osservazione simultanea delle variazioni diurne dell'ago sarebbe senza dubbio molto importante, e potrebbe condurre a qualche conseguenza meteorologica assai rimarchevole.

Prima di terminare quest'estratto ricorderò, che il Sig. Arago fin dal 1820 poco tempo dopo la scoperta d'Oersted, aveva già notato la possibilità dell'azione di questa calamita sull'arco voltaico, e l'analogia che potrebbe risultare fra questo fenomeno e quello dell'aurora boreale.

L. A.

INDICE DEGLI ARTICOLI

Sopra le superficie parallele, ed applicazione ài questa Teorica all'ellissoide. Ricerche di Barnaba Tortolini. pag. 5

Sullo stato elettrico della Telegrafia elettrica. Relazione di A. Secchi . . . . . » 23

Sopra le occultazioni di Aldebaran, ed altre stelle per la luna. Articolo di Giuseppe Bianchi . . . . » 42

Sulla integrazione dell'equazioni differenziali. Studii del D.r Gaspare Mainardi . . . . . » 50

Sulla mancanza di rapporto fra le apparizioni delle stelle cadenti in frequenza delle Aurole Boreali, delle Meteore luminose, e degli Aeroliti, e piogge terrose, e sull' Origine di questi fenomeni. Nota di Francesco Pistolesi. » 90

D'alcune singolarità relative ai cristalli. Nota di Francesco Orioli . . . . . » 97

Sulla materia fosforescente dei pesci, e sulla fosforescenza del mare di C. Matteucci . . . . . » 104

Dell'influenza del Magnetismo sul potere rotatorio di alcuni corpi. Art. di C. Matteucci. . . . . . » 106

Nota concernente alcune viste principali di geologia atte a fissare l'attenzione degl'Ingegneri, ed Agricoltori di Antonio Toschi . . . . . » 109

Sulle equazioni differenziali lineari. Nota di Placido Tardy. » 136

Rettificazione dell'Articolo sulle occultazioni di Aldebaran di Giuseppe Bianchi . . . . . » 140

Sulla quadratura delle superficie curve. Lettera del Sig. William Roberts al Compilatore . . . . » 143

Sui Terremoti. Memoria di Francesco Pistolesi . . » 145
Estratto della nota del Prof. Paolo Volpicelli sulla generale soluzione in interi delle $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2=z^2$ » 156
Ricerche di Reometria Elettrica. Memoria di A. Secchi. » 167
Sulla Cometa del 1264-1556-1848. *Estratto di una lettera di Ioh. Taylor di Liverpool al Compilatore.* . » 223
Estratto di una lettera del Sig. Hind al Signor Leverrier (*Comptes Rendus Seance du* 25 *Mars* 1850) . » 224
Sopra una nuova equazione in idrodinamica. Osservazioni di Placido Tardy . . . . . » 225
Effemeridi per le osservazioni di Iride nella opposizione. Comunicazione di Ioh. Taylor . . . . . » 237
Elementi ed Effemeridi de' nuovi pianeti. Lettera di Ioh. Taylor al Compilatore. . . . . . » 238
De' pesci, e del mare che rilucono nella oscurità. Nota di Francesco Orioli . . . . . » 242
Sulle apparizioni dell'Aurola Boreale ne' tempi equinoziali, e nei solstiziali. Nota di Francesco Pistolesi. . » 247
Sopra un Teorema del Möbius riguardante la specie della sezione Conica, che passa per cinque punti dati in un piano. Nota del Professore Giusto Bellavitis. . » 249
Sull'integrazione dell'Equazioni differenziali. Studii del D.r Gaspare Mainardi (*Continuazione, e fine*) . . » 251
Occultazione di α *Toro osservata al Campidoglio. Nota di Ignazio Calandrelli* . . . . . » 256
Notizie Bibliografiche del The Cambridge *and Dublin Mathematical journal n.* 22 *pubblicato dal Sig. W. Thomson.* » 261
Sulle applicazioni del Calcolo delle differenze finite alle questioni di analisi indeterminata. Nota del Dott. Gabrio Piola . . . . . » 263

Storia Fisica del Bacino di Roma, da servire di appendice all'Opera, il Suolo Fisico di Roma. Memoria del Prof. Giuseppe Ponzi . . . . . » 281
Sopra una formola d'Idrodinamica. Lettera del Prof. Vincenzo Amici al Compilatore. . . . . . » 302
Sopra la Cometa di Petersen attualmente visibile ad occhio nudo. Nota di A. Colla . . . . . » 305
Estratto di una lettera del Prof. Santini di Padova al Direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano . . » 309
Sulla propagazione della corrente elettrica nell' interno di una sfera. Nota di Riccardo Felici. . . . . » 312
Sur une formule pour la quadrature des Surfaces. Nota de William Roberts . . . . . » 318
Sopra una semplificazione dell'ordinario sistema delle condizioni di integrabilità per le differenziali, e le differenze replicate. Articolo di S. R. Minich . . . . » 321
Sull'Equazioni lineari alle differenze finite. Nota di P. Tardy. » 337
Nuovi Teoremi di Analisi. Memoria di Gaspare Mainardi. » 342
Dei poligoni massimi inscritti, e dei minimi circoscritti all' ellisse, e dei poliedri analoghi dell'Ellissoide. Nota di G. Mainardi. . . . . . » 348
Sopra i differenti metodi per trovare con esattezza la differenza dei meridiani e di longitudine dei luoghi terrestri. Lettera di G. Bianchi al Compilatore. . . . » 355
Nota di Trigonometria sferica del medesimo . . » 358
Sulla dottrina del calorico raggiante. Discorso di Giusto Bellavitis . . . . . » 362
Lettera di Vincenzo Amici al Compilatore . . . » 368
Estratto di una seconda nota sulla generale soluzione in interi della $x^2 + y^2 = z^2$ *di P. Volpicelli* . » 369

Soluzione di due problemi di Geometria analitica di B. Tortolini . . . . . » 377
Osservazioni rispetto al periodico abbassamento di temperatura che suole accadere all' approssimarsi della metà di Maggio. Lettera di Domenico Paoli a Fr. Orioli. » 381
Sulla riduzione degli angoli fatti dagli archi geodetici di un piccolo triangolo agli angoli fatti dalle loro corde. Lettera di Fabrizio O. Mossotti al Compilatore . » 387
Sulle stelle cadenti del 10 *Agosto. Lettera di A. Secchi al Compilatore* . . . . . » 398
Elementi dell'Orbita del nuovo pianeta Partenope. Nota di Ignazio Calandrelli . . . . . » 401
Effemeridi del Tevere dell'anno 1845 *al* 1849 *dell'Ingegnere Giovanni Cavalieri* . . . . . » 403
Sulla fissezza del livello del mare. Memoria di F. Pistolesi » 416
Sulla risoluzione numerica della $x^2 + y^2 = C$. *Nota di G. Bellavitis* . . . . . » 422
Sopra la determinazione analitica dell'efflusso dei liquidi per una piccolissima apertura. Memoria di Enrico Betti. » 425
Sulle condizioni affinchè la $x^2 + y^2 = z^2$ *abbia luogo per numeri fra loro primi, o non primi. Nota di P. Volpicelli* . . . . . » 443
Sopra un articolo dell' Institut *relativo alle stelle cadenti. Lettera del P. Alessandro Serpieri al Compilatore.* » 448
Sopra la scoperta di una nuova cometa e di un nuovo pianeta. Estratto di una lettera di Ioh. Taylor al Compilatore . . . . . » 453
Sulle proprietà generali dei corpi. Discorso di G. Bellavitis. » 454
Applicazione dei trascendenti ellittici alla quadratura di alcune curve sferiche. Memoria di B. Tortolini . » 469

Nuova dimostrazione dei Teoremi di Fourier del Sig. Dr. Oskar Schloemilch . . . . . » 513

Sopra le trasformazioni generali di date funzioni. Estratto da un opuscolo del Sig. O. Schloemilch. Memoria del Prof. Giovanni Novi . . . . . » 517

Dimostrazione sulla formula di Gauss pel numero degli spezzamenti di un intero in due quadrati. Estratto di una Nota di P. Volpicelli . . . . . » 527

Sull'estenzione delle oscillazioni massime e minime barometriche. Nota di Francesco Pistolesi . . . » 532

Delle grandini Lapidifere e degli aeroliti accompagnati da un abbassamento di temperatura. Discorso di Francesco Orioli. . . . . . » 534

Sulle variazioni diurne dell' ago magnetico, e sulle aurore boreali. Estratto di una lettera del Sig. Augusto de la Rive al Sig. Arago . . . . . » 545

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
5	14	*Superficibus*	*Superficibus*
18	4	$\frac{2kha}{c}$	$\frac{2kab}{c}$
ivi	ultima	$x^2 + y^2 + z^2 = k$	$= k^2$
19	22	assi	semiassi
92	1	rapporro	rapporto
ivi	16	trovo notata	non trovo notate
ivi	(Nota 2)	approverebbero	proverebbero
93	6(Not.2)	cerno	cono
ivi	7 id.	l'uno	il cono
ivi	15 (Nota)	estensione	estinzione
94	16	base della luna	fase della luna
ivi	16	quella	quelle
	(Nota 1)	La specie	Le specie
	2	la quale	le quali
	3	come quella	come in quella
95	9	da quella	di quella
ivi	13	spingere	spiegare
96	4	(forza elettrica)	(forse elettrica)

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
109	24	essenziele	essenziale
140	12	tempio	tempo
144	6	L'istantc	L'istante
ivi	12	simnltaneamente	simultaneamente
ivi	30	sndetta	suddetta
281	13	delle antichità delle antichità	delle antichità
421	23	atterramenti	interrimenti

IMPRIMATUR

Fr. D. Buttaoni O. P. S. P. A. Mag.

IMPRIMATUR

Joseph Canali Patriar. Constantinop. Vicesg.

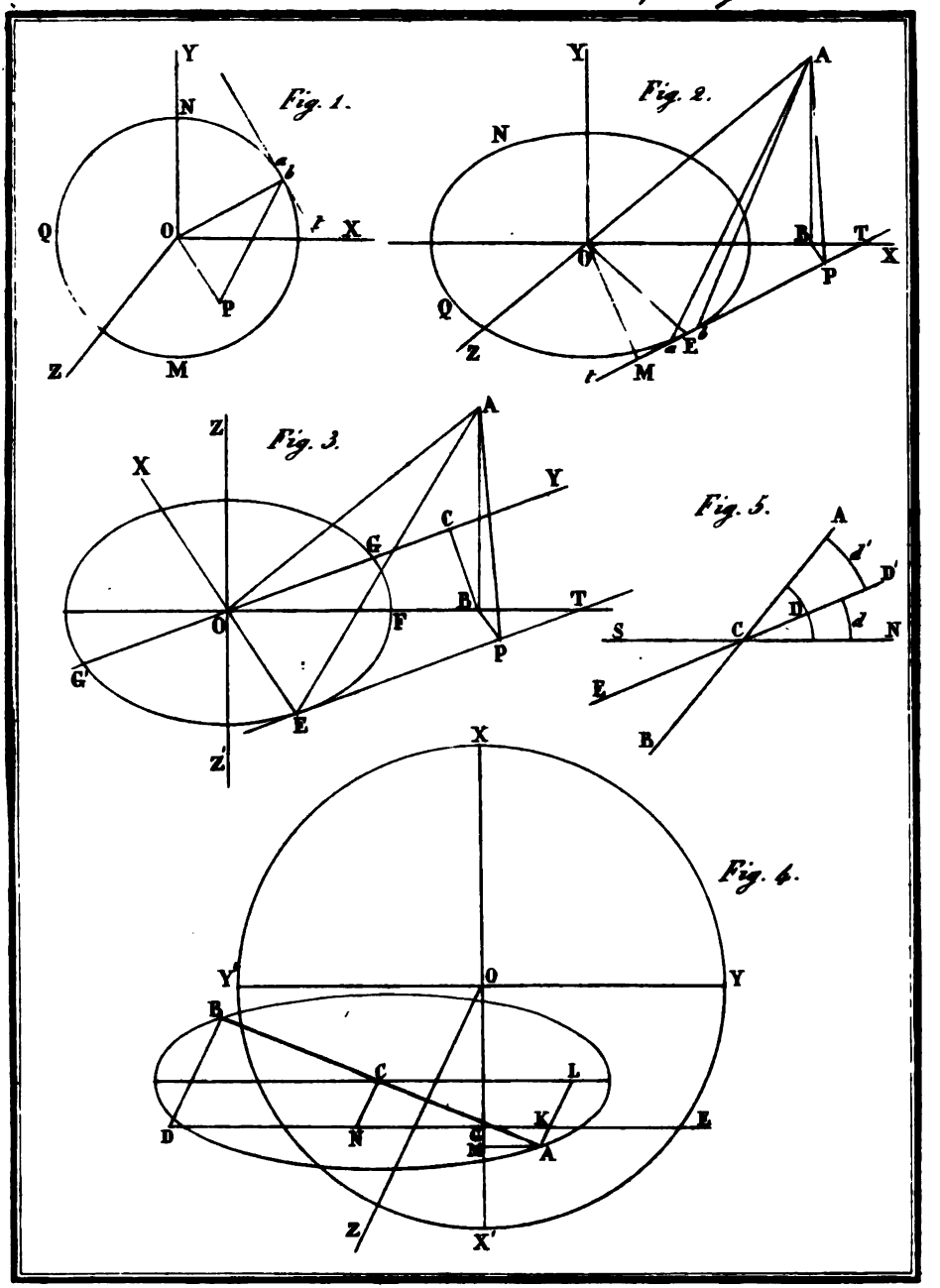


Fig. 1.
Y
N
a
b
Q
O
t
X
P
Z
M
Fig. 2.
Y
A
N
B
T
X
O
P
Q
Z
a
E
b
t
M
Fig. 3.
Z
A
X
Y
C
G
B
T
O
F
P
G'
E
Z'
Fig. 5.
A
d'
D'
D
d
S
C
N
E
B
Fig. 4.
X
Y'
O
Y
B
C
L
D
N
G
K
E
M
A
Z
X'